SINTEZE LYCEUM

ALEXANDRU LEONTE • RODICA TRANDAFIR

PRINCIPII ȘI STRUCTURI FUNDAMENTALE ÎN MATEMATICA DE LICEU

★★

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

SINTEZE LYCEUM

ALEXANDRU LEONTE • RODICA TRANDAFIR

PRINCIPII ŞI STRUCTURI FUNDAMENTALE ÎN MATEMATICA DE LICEU

(Volumul II)

geometrie şi trigonometrie

Prefaţă de acad. Caius Iacob

EDITURA ALBATROS • BUCUREŞTI, 1986

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Se știe că una dintre disciplinele matematice, predate în liceu, care a dat loc la numeroase discuții, cu prilejul diferitelor readaptări și modernizări ale învățămîntului nostru matematic, a fost geometria.

În principiu, geometria, avînd ca scop studiul formelor spațiale, a proprietăților figurilor, este o aplicație a instrumentului de cercetare matematic pentru investigarea spațiului uni-, bi- și tridimensional sau ale generalizărilor acestuia. Ea ar trebui deci să apară mai ușoară, mai intuitivă, elevilor decît alte capitole ale matematicii. Dar pretențiile legate de acest studiu sînt mari. Prin sistematizarea lui Euclid, de acum mai bine de două milenii, geometria a devenit o știință pur deductivă care pleacă de la anumite fapte intuitive admise, adevărate date experimentale care ne apar ca evidente (așa-numitele principii sau axiome). O dată acestea acceptate, ele trebuie să ne conducă la studiul tuturor proprietăților geometrice prin simplă deducție logică, ceea ce reflectă unitatea și relația de interdependență a structurilor spațiale.

Printre axiomele admise de Euclid, figura însă și una a cărei independență față de celelalte era mai puțin evidentă. Era așa-numitul „postulat" al paralelelor. Matematicienii au fost conduși să se întrebe dacă acest „postulat" nu ar fi cumva o simplă consecință a celorlalte axiome. Se știe că această problemă multiseculară a primit un răspuns în secolul al XIX-lea. J. Bolyai (1823) și N.I. Lobacevski (1829) au pus în evidență faptul că „postulatul" paralelelor constituie în realitate o axiomă independentă de celelalte axiome ale geometriei și că se pot construi geometrii perfect coerente care să nu admită acest postulat, experiența singură putînd să decidă care dintre aceste geometrii trebuie să fie adoptată. La scara noastră obișnuită de măsură, geometria euclidiană tridimensională se impune și ea servește de cadru mecanicii newtoniene (mecanica clasică).

Scanned with OKEN Scanner

Cercetările îndelungate ale geometrilor au pus în evidență pe de altă parte și faptul că sistemul axiomatic al geometriei lui Euclid, așa cum a fost el dat acum 2 000 de ani, nu mai corespunde necesităților de completitudine și de independență cerute de epoca noastră. Teoria mulțimilor, dezvoltată la sfîrșitul secolului al XIX-lea, a permis matematicianului german D. Hilbert să formuleze în 1899 un nou sistem de axiome ale geometriei euclidiene (axiomele de incidență, ordonare, congruență, continuitate) pe baza cărora geometria să poată fi efectiv reconstruită ca o știință deductivă. De atunci s-au impus și alte sisteme de axiome, care să fie și mai simple.

Chestiunile privind axiomatizarea geometriei privesc însă desigur mai mult pe specialiști. Problema care se punea totuși era cum trebuie să se reflecte aceste preocupări în învățămîntul de cultură generală și de asemenea să se adopte notațiile cele mai potrivite în geometrie pentru ca prezentările geometrice, acum bazate pe teoria mulțimilor, să se bucure de o cît mai mare precizie, concizie și rigoare.

În învățămîntul actual al geometriei din clasele VIII-IX-X ale școlilor noastre s-a adoptat ca sistem axiomatic de bază acela propus de G.D. Birkhoff, care constituie o simplificare a sistemului lui Hilbert. Sistemul lui Birkhoff figurează în manualele noastre actuale în timp ce acela al lui Hilbert era admis în manualele care le precedaseră. Oricum ar fi, în învățămîntul de cultură generală faptele de natură elementară intuitivă, care nu reclamă demonstrație, o dată admise ca axiome (fie că ele figurează într-un sistem axiomatic sau altul), desfășurarea geometriei se face deductiv, elevii fiind conștienți că orice proprietate geometrică pe care ei o admit față de demonstrație decurge din sistemul de axiome și că raționamentele pe care le fac pe această bază permit demonstrarea altor proprietăți care nu sînt evidente a priori.

Dar raționamentele geometrice sînt în general dificile. Ele reclamă o mare putere de concentrare, de analiză a configurației geometrice examinate, de găsire a conexiunii dintre proprietățile ei, astfel ca să se ajungă la proprietatea care se cere a fi stabilită sau infirmată, pornind de la ipotezele date. De aceea geometria, la fel ca studiul limbilor clasice (latina, greaca), are un rol deosebit în formarea intelectuală a omului contemporan. Geometria, pe lîngă interesul și aplicativ pentru viitorii matematicieni, mecanicieni, fizicieni, ingineri și tehnicieni, este de pe băncile școlii cea mai bună gimnastică a consecvenței în gîndire și a spiritului critic.

Scanned with OKEN Scanner

Însușirea metodelor geometriei reclamă deseori o ingeniozitate deosebită, care se obține numai prin studiu perseverent și prin exerciții îndelungate, căci după cum spunea geometrul Menehmos regelui Egiptului Ptolemeu II Filadelful (185—246) — care dorea o inițiere facilă și rapidă în această ramură a cunoașterii —, „în geometrie nu există o cale regală".

Rostul culegerilor de probleme de geometrie este tocmai acela de a ajuta pe cititor să parcurgă calea plină de dificultăți care duce la însușirea în mod creator a elementelor geometriei, pentru a putea rezolva cu ușurință, în cadrul geometriei intrinseci, probleme geometrice de caracter cît mai variat, în condițiile în care elementele geometriei analitice, geniala descoperire a lui Descartes (1596—1650) — care înarmează geometria cu metode de rezolvare ce țin de domeniul algebrei și analizei matematice —, se predau de-abia în clasa a XI-a și nu pot, sau nu se admite, a fi utilizate.

Situația este întrucîtva similară cu aceea din aritmetica din clasele mici. Elevii acestor clase sînt nevoiți să rezolve deseori probleme, desigur dificile pentru ei, cu metode rudimentare care revin în realitate în rezolvarea pur mintală a unor ecuații algebrice de gradul I. Dar elementele de algebră și rezolvarea ecuației de gradul I se studiază de-abia în clasa a VI-a.

În această situație, este de înțeles că pe lîngă manualele existente de geometrie care cuprind și numeroase probleme și aplicații, destul de dificile, servind chiar de model pentru problemele propuse la concursuri și examene de admitere, să se simtă necesitatea culegerilor speciale de probleme.

Numeroase culegeri au apărut în ultimii ani și s-au epuizat rapid. Volumul „Principii și structuri fundamentale în matematica de liceu. Geometrie și Trigonometrie", realizat de profesorii dr. Alexandru Leonte și dr. Rodica Trandafir — conferențiari universitari —, caută să răspundă acestei necesități, oferind profesorilor de liceu și elevilor lor o foarte bogată selecție de probleme.

În sistemul actual al învățămîntului nostru, trigonometria este inclusă în geometrie. Acest lucru se poate justifica prin faptul că trigonometria nu constă numai din studiul funcțiilor circulare și al inverselor lor, ci mai ales din aplicarea acestor funcții la rezolvarea problemelor de geometrie și de geodezie.

Împărțită în 13 capitole, lucrarea cuprinde enunțurile și soluțiile a peste 700 de probleme privind noțiunile generale, teoria segmentelor proporționale, a relațiilor metrice, coliniaritatea și concurența, determinarea ariilor, transformările

Scanned with OKEN Scanner

geometrice, calculul vectorial, geometria analitică, geometria în spațiu, construcțiile geometrice, maxime și minime geometrice, probleme date la concursuri. La acestea se adaugă și un număr de 10 teste, cuprinzînd 50 de chestiuni sau probleme cu un caracter recapitulativ și de verificare a cunoștințelor însușite.

Pentru a sublinia și mai mult caracterul de știință deductivă al geometriei, lucrarea este precedată de o parte introductivă în care este expus sistemul axiomatic al lui D. Hilbert, pe care se bazează și sistematizarea lui C.D. Birkhoff, fixîndu-se notațiile de bază (aceleași ca în învățămîntul matematic liceal actual) și precizîndu-se unele definiții. Lucrării i se anexează și un „Scurt itinerar de cunoștințe", care recapitulează definițiile și rezultatele geometrice principale, de un uz curent în rezolvarea problemelor mai complexe.

În alegerea acestor probleme autorii au ținut seamă nu numai de cîteva culegeri clasice indicate în bibliografie, printre care se remarcă în primul rînd aceea a marelui geometru român Gheorghe Țițeica, dar și de numeroasele probleme de geometrie și trigonometrie propuse în ultimii ani de ei sau de diverși alți autori în „Gazeta Matematică", cu indicarea numelor propunătorilor. Era desigur util ca aceste probleme, în general dificile, să fie grupate după specificul lor într-un volum, împreună cu soluțiile lor, pentru a se ține seamă de efervescența matematică deosebită întreținută de „Gazeta Matematică", revistă lunară, în lumea școlii românești.

Sentimentul pe care-l am după parcurgerea volumului este acela de admirație pentru munca tenace depusă în vederea realizării lui. Am convingerea că el corespunde, astfel cum a fost conceput, unei reale necesități, permițînd tuturor elevilor din liceele românești să-și consolideze cunoștințele matematice primite în clasă și să se pregătească în mod temeinic pentru concursurile de admitere.

Editura Albatros, căreia îi datorăm și publicarea altor culegeri de probleme din trecut, acum desigur epuizate – mă refer în special la acelea ale profesorului G. Ionescu-Țiu, aduce, la fel ca și cu alte ocazii, un real serviciu școlii românești, punînd la dispoziția profesorilor și elevilor această nouă culegere de probleme de geometrie și trigonometrie.

Acad. CAIUS IACOB

București, 24 aprilie 1985

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Prin caracterul ei abstract, cît şi prin legăturile pe care le are cu problemele filozofice care se referă la noţiunile de spaţiu, timp şi materie, geometria a fost acea disciplină matematică ce i-a pasionat pe matematicieni încă din antichitate.

Antichitatea ne-a lăsat ca moştenire geometria, numită şi geometria lui Euclid[1], deoarece în cărţile lui Euclid geometria apare ca o doctrină complet constituită din punct de vedere teoretic, ca o ştiinţă deductivă ale cărei adevăruri numite „teoreme" se deduc pe cale logică dintr-o serie de definiţii şi axiome — definiţii şi axiome rezultate din experienţă, din observaţiile făcute asupra figurilor din spaţiul în care trăim.

Elementele constituie prima încercare de axiomatizare a unei teorii matematice — geometria. Sistemul axiomatic al lui Euclid este intuitiv, deoarece noţiunile şi relaţiile lui primare au un conţinut intuitiv.

Datorită faptului că fiecare teoremă se demonstrează, geometria lui Euclid a fost considerată mult timp ca o ştiinţă perfectă, în care nimic nu rămîne fără o explicaţie logică.

Expunerile lui Euclid în cele 13 cărţi ale sale numite *Elemente de geometrie* au constituit o carte căreia timp de 2 000 de ani nu i s-au putut aduce modificări importante. *Elementele* lui Euclid conţin materialul a ceea ce numim azi geometrie elementară. Analize critice ulterioare ale *Elementelor* au scos la iveală o serie de deficienţe ale acestora. Considerată din punct de vedere al matematicii contemporane, expunerea *Elementelor* este nesatisfăcătoare din multe puncte de vedere asupra cărora nu intenţionăm să ne oprim.

Reconceperea geometriei drept studiu logic — deductiv a determinat reformularea sistemului axiomatic al lui Euclid

---

[1] Euclid a trăit între anii 306—283 î.e.n. La noi în ţară, prima ediţie completă a *Elementelor* a apărut în 1939.

Scanned with OKEN Scanner

de către David Hilbert[1] în cartea sa *Fundamentele geometriei* apărută în 1899. În această lucrare, Hilbert dă un sistem complet de axiome, de la care plecînd se poate obține prin deducție logică întregul material al geometriei.

În axiomatica lui Hilbert noțiunile și relațiile primare sînt simboluri abstracte, iar axiomele sînt propoziții care prescriu proprietățile pe care dorim să le aibă aceste simboluri. Se conturează astfel caracteristica geometriei de a îmbina permanent gîndirea concretă cu cea abstractă, imaginația cu rigoarea.

Cunoașterea axiomaticii hilbertiene este necesară pentru oricine studiază geometria. Considerat prea masiv, solicitînd o gîndire matematică formată, pentru studiul geometriei în liceu, în scopuri didactice, s-a adoptat sistemul axiomatic al lui G.D. Birkhoff. Întrucît acest sistem axiomatic este expus în manualul de liceu, vom da aici sistemul axiomatic al lui Hilbert.

În axiomatica lui Hilbert noțiunile primare sînt: punctul, dreapta și planul, iar relațiile primare sînt: incidența, congruența și relația „între". Hilbert numește punctele „elementele geometriei pe dreaptă"; punctele și dreptele — „elementele geometriei în plan", iar punctele, dreptele și planele — „elementele geometriei în spațiu" sau „elementele spațiului". Axiomele lui D. Hilbert se împart în cinci grupe și anume: axiomele de incidență, axiomele de ordonare, axiomele de congruență, axiomele de contituitate și axioma paralelelor.

I. Axiomele de incidență

I.1. (Axioma de determinare unică a dreptelor). Pentru oricare două puncte, există o unică dreaptă care le conține.

I.2. Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

I.3. Orice dreaptă conține cel puțin două puncte. Există cel puțin trei puncte necoliniare.

I.4. Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan care le conține. Orice plan conține cel puțin un punct (distinct de cele trei care l-au determinat).

I.5. Prin trei puncte nesituate pe aceeași dreaptă trece un singur plan.

I.6. Dacă două puncte A, B ale dreptei (d) sînt situate în planul (α), atunci dreapta (d) este conținută în planul (α).

---

[1] Hilbert David, (1861—1943), matematician german.

Scanned with OKEN Scanner

I.7. (Axioma de intersecție a planelor.) Fiind date două plane (α), (β), dacă există un punct A aparținînd planelor (α) și (β), atunci există cel puțin încă un punct B aparținînd celor două plane.

I.8. (Axioma dimensiunii.) Există cel puțin patru puncte nesituate în același plan.

Următoarele propoziții sînt consecințe ale axiomelor de incidență:

P_{11}: Există cel puțin un punct A nesituat pe o dreaptă dată (d). Există cel puțin un punct A nesituat într-un plan dat (α).

P_{12}: Date două drepte (d_1) și (d_2) distincte există cel mult un punct situat pe fiecare dreaptă, numit punct comun al dreptelor.

P_{13}: Dacă (d) este o dreaptă și (α) un plan și (d) nu este conținută în plan, atunci există cel mult un punct conținut și de dreapta (d) și de planul (α), numit punct comun al dreptei cu planul.

P_{14}: Fie (α) și (β) două plane; dacă există un punct A conținut în cele două plane, atunci există o dreaptă (d) care trece prin A și este conținută în ambele plane (numită dreaptă comună sau de intersecție a celor două plane).

II. Axiomele de ordine

Definiție. Punctele de pe o dreaptă se găsesc unele față de altele în anumite relații exprimate prin cuvîntul „între". Dacă B este între A și C, vom nota $A - B - C$.

II_1: Dacă un punct B se găsește între punctul A și punctul C rezultă că punctele A, B, C sînt distincte, coliniare și B se găsește de asemenea între C și A.

II_2: (Axioma punctului interior.) Oricare ar fi două puncte A, B există cel puțin un punct C pe dreapta AB, astfel că punctul C se găsește între A și B.

II_3: A, B, C fiind trei puncte coliniare, unul și numai unul este situat între celelalte două.

Definiție. Fiind date două puncte A, B se numește segment (deschis) determinat de punctele A, B mulțimea

$$|AB| =_{\text{def}} \{M \in AB \mid A - M - B\},$$

orice punct $M \in |AB|$ se numește punct interior al segmentului $|AB|$, iar punctele A, B se numesc capetele segmentului $|AB|$. Toate celelalte puncte ale dreptei AB vor fi numite puncte exterioare segmentului $|AB|$.

Scanned with OKEN Scanner

Numim segment închis determinat de punctele A, B mulțimea

$$[AB] =_{\text{def}} |AB| \cup \{A, B\}.$$

$\mathbf{II_4}$: (Axioma lui Pasch.) Fie A, B, C trei puncte necoliniare și (d) o dreaptă în planul ABC care nu conține niciunul din punctele A, B, C. Atunci, dacă dreapta (d) trece printr-un punct al segmentului $|AB|$, ea trece sau printr-un punct al segmentului $|AC|$ sau printr-un punct al segmentului $|BC|$.

Avem următoarele consecințe deduse din axiome:

$\mathbf{P_{21}}$: Între trei puncte oarecare A, B, C situate pe o dreaptă, există întotdeauna unul care este situat între celelalte două.

$\mathbf{P_{22}}$: Dacă o dreaptă (d) intersectează două din trei segmente $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$, ea nu poate tăia și segmentul al treilea.

$\mathbf{P_{23}}$: Între două puncte oarecare ale unei drepte există o infinitate de puncte ale aceleiași drepte.

$\mathbf{P_{24}}$: Dacă punctele C și D se găsesc între punctele A și B, toate punctele segmentului $|CD|$ aparțin segmentului $|AB|$.

$\mathbf{P_{25}}$: Fie o un punct fixat pe dreapta (d). Există două mulțimi de puncte (d'), $(d'') \subset (d)$ și numai două, care au proprietățile: (1) $(d') \cup (d'') = (d) \setminus \{0\}$; (2) dacă $A, B \in (d')$ și $C, D \in (d'')$, atunci $O \notin |AB|$, $O \notin |CD|$, $O \in |AC|$.

Definiție. Fie o dreaptă (d) și O un punct al ei. Mulțimile de puncte (d') și (d'') care satisfac (1) și (2) din P_{25} se numesc semidrepte deschise cu originea în O ale dreptei (d).

Notăm o semidreaptă deschisă cu $|OA$, $A \in (d)$, iar o semidreaptă închisă este $[OA = |OA \cup \{O\}$.

Fie O, A două puncte ale dreptei (d) și (d'), (d'') semidreptele dreptei (d) cu originea în O. Dacă $A \in (d')$ vom numi (d') semidreapta pozitivă și o vom nota (d^+), deci $(d^+) = OA$. Cealaltă semidreaptă o vom numi semidreaptă negativă și se notează cu $(d^-) = (d'')$.

$\mathbf{P_{26}}$: Fie (d) o dreaptă conținută în planul (α). Există două mulțimi de puncte (α'), $(\alpha'') \subset (\alpha)$ și numai două care au următoarele proprietăți: (1) $(\alpha') \cup (\alpha'') = (\alpha) \setminus (d)$; (2) dacă $A, B \in (\alpha')$ și $C, D \in (\alpha'')$, atunci $|AB| \cap (d) = \Phi$, $|CD| \cap d = \Phi$ și $|AC| \cap (d) \neq \Phi$.

Definiție. Mulțimile de puncte (α') și (α'') care satisfac (1) și (2) din P_{26} se numesc semiplane (deschise) determinate de dreapta (d) (ale planului (α)).

Scanned with OKEN Scanner

Semiplanele diferite (α'), (α'') determinate de aceeași dreaptă și incluse în același plan se numesc opuse.

P_{27}: Fie un plan (α) în spațiul $\mathcal{E}$. Există două mulțimi de puncte (s'), $(s'') \subset \mathcal{E}$, și numai două care satisfac proprietățile: (1) $(s') \cup (s'') = \mathcal{E} \setminus (\alpha)$, $(s') \cap (s'') = \Phi$; (2) dacă $A, B \in (s')$ și $C, D \in (s'')$, atunci $|AB| \cap (\alpha) = \Phi$, $|CD| \cap (\alpha) = \Phi$, $|AC| \cap (\alpha) \neq \Phi$.

Definiție. Mulțimile de puncte (s') și (s'') care satisfac proprietățile (1) și (2) din P_{27} se numesc semispații (deschise) determinate de planul (α). Ele se zic opuse.

III. Axiomele de congruență

Relația primară de congruență o vom nota prin $\equiv$. Grupa a treia de axiome descrie proprietățile relațiilor de congruență.

III_1: (Axioma de congruență a segmentelor.) Dacă $|AB|$ este un segment și $|A'X$ o semidreaptă, atunci există un punct unic $B' \in |A'X$ așa încît $|AB| \equiv |A'B'|$.

III_2: (Axioma de echivalență.) Relația „congruent" între segmente este o relație de echivalență.

III_3: Dacă A, B, C și A', B', C' sînt două grupe de cîte trei puncte care verifică relațiile $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci are loc relația $|AC| \equiv |A'C'|$.

Definiție. Numim unghi o pereche de semidrepte (h), (k) care au aceeași origine și îl vom nota prin simbolul $\widehat{hk}$ sau $\widehat{hOk}$ dacă O este originea semidreptelor.

III_4: (Axioma de congruență a unghiurilor.) Fie $\widehat{hOk}$ un unghi, (d) o dreaptă, (α) un semiplan determinat de dreapta (d) și $(h') = |O'X'$ o semidreaptă a dreptei (d) cu originea în O'. Atunci în semiplanul (α) există o unică semidreaptă $(k') = |O'Y'$ așa încît $\widehat{hOk} \equiv \widehat{h'O'k'}$

Definiție Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, se numește triunghi ABC mulțimea de puncte

$$\triangle ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA].$$

III_5: Dacă pentru triunghiurile ABC și $A'B'C$ au loc relațiile $|AB| \equiv |A'B'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $|AC| \equiv |A'C'|$, atunci are loc relația $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem următoarele consecințe:

P_{31}: Dacă A, B, C sînt trei puncte situate pe o dreaptă (d) și $A'B'C'$ sînt trei puncte situate pe o dreaptă (d') și dacă avem îndeplinite condițiile $A - B - C$, $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și B' este situat pe (d') de aceeași parte a punctului A' ca și C', atunci avem $A' - B' - C'$ și $|BC| \equiv |B'C'|$.

P_{32}: Dat un segment $|AB|$, există un punct unic $M \in |AB|$, așa încît $|AM| \equiv |MB|$, numit mijlocul segmentului.

Definiție. Se spune că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ dacă $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

Vom da în continuare cele trei cazuri de congruență ale triunghiurilor, consecințe ale axiomelor I—III.

C_1: Dacă ABC și $A'B'C'$ sînt două triunghiuri pentru care au loc relațiile $|AB| \equiv |A'B'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $|AC| \equiv |A'C'|$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

C_2: Dacă pentru triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au loc relațiile $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $|BC| \equiv |B'C'|$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

C_3: Dacă pentru triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au loc relațiile $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, $|CA| \equiv |C'A'|$ atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

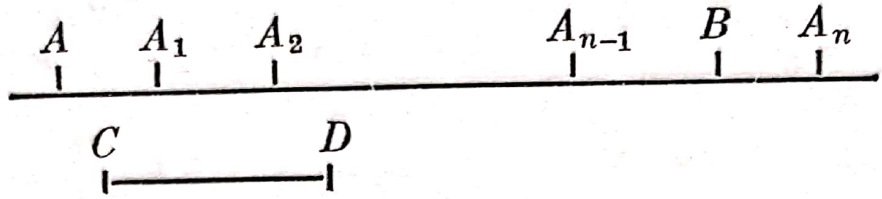
IV. Axiomele de continuitate

Axiomele din grupele I—III nu sînt suficiente pentru a putea stabili un procedeu de măsurare a segmentelor. Axioma lui Arhimede permite ca, alegînd o unitate de măsură, să se asocieze fiecărui segment un număr pozitiv, care este lungimea segmentului. Pentru a putea stabili și reciproca, spre deosebire de expunerea lui Hilbert, vom da axioma lui Cantor, care reprezintă cunoscutul principiu asupra șirului convergent de intervale.

IV_1 (Axioma lui Arhimede.) Fie $|AB|$ și $|CD|$ două segmente oarecare. Pe dreapta AB există un număr finit de puncte $A_1, A_2, \ldots, A_n$, așezate astfel încît punctul A_1 să se găsească între A și A_2, punctul A_2 să se găsească între A_1 și A_3 etc., iar segmentele $|AA_1|$, $|A_1A_2|$, $\ldots$, $|A_{n-1}A_n|$

Scanned with OKEN Scanner

să fie congruente cu segmentul $|CD|$ și B să se găsească între A și A_n.



IV$_2$: (Axioma lui Cantor.) Pe o dreaptă oarecare (d) se consideră un șir de segmente $\{|A_iB_i|\}_{i\in\mathbf{N}}$ cu următoarele proprietăți: (1) $|A_iB_i| \supset |A_{i+1}B_{i+1}|$, $\forall\, i \in \mathbf{N}$; (2) nu există nici un segment inclus în toate segmentele șirului considerat. Atunci există un punct unic $P \in (d)$ așa încît $P \in |A_iB_i|$, $\forall\, i \in \mathbf{N}$.

Aceste axiome pot fi echivalent formulate cu o singură axiomă numită axioma lui Dedekind.

P$_{41}$: Fie $\mathcal{S}$ mulțimea tuturor segmentelor de pe o dreaptă oarecare (d). Există o aplicație $m : \mathcal{S} \to \mathbf{R}$ cu proprietățile:

(1) $1 \in m(\mathcal{S})$

(2) $|AB| \equiv |CD| \Rightarrow m(|AB|) = m(|CD|)$.

(3) m este aditivă: $m(|AB| \cup |BC|) = m(|AB|) + m(|BC|)$, $B \in |AC|$.

Dacă $m\,|OU| = 1$ atunci $|OU|$ se numește *unitate de măsură* (sau de lungime) a segmentelor iar $m\,|AB|$ se numește măsura (sau lungimea) segmentului $|AB|$, prin unitatea de măsură $|OU|$. Se utilizează notația $m\,|AB| = \|AB\|$.

V. Axioma paralelelor

Definiție. Două drepte situate în același plan și neavînd nici un punct comun sînt paralele.

V: Fie (d) o dreaptă oarecare și A un punct exterior dreptei; în planul determinat de punctul A și dreapta (d), nu se poate duce mai mult de o singură dreaptă care să treacă prin A și să nu intersecteze dreapta (d).

Scanned with OKEN Scanner

1. Perpendiculara în mijlocul segmentului $|AB|$ pe dreapta AB se numește mediatoarea segmentului $|AB|$. Ea este locul geometric al punctelor M dintr-un plan care conține dreapta AB pentru care $\|MA\| = \|MB\|$. În spațiu, rolul mediatoarei este jucat de planul perpendicular pe dreapta AB în mijlocul segmentului $|AB|$, numit planul mediator segmentului $|AB|$.

2. Bisectoarea interioară unghiului semidreptelor $[Ox$, $[Oy$ este semidreapta $[Oz$, astfel că $\widehat{[Ox, [Oz} \equiv \widehat{[Oz, [Oy}$, $[Oz$ fiind situată în interiorul unghiului $\widehat{[Ox, [Oy}$. Bisectoarea interioară suplementelor unghiului $\widehat{[Ox, [Oy}$ se numește bisectoare exterioară acestuia. Dreptele suport ale acestor bisectoare se numesc încă bisectoare ale unghiului. Bisectoarele unui unghi reprezintă locul geometric ale punctelor din planul unghiului care sînt egal depărtate de laturile unghiului.

3. Într-un triunghi ABC mediatoarele laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ sînt concurente. Punctul de intersecție, O, este egal depărtat de A, B, C. Cercul de centru O și care trece prin A, B, C este cercul circumscris triunghiului.

4. Într-un triunghi ABC, bisectoarele interioare unghiurilor A, B, C sînt concurente. Punctul I de intersecție este egal depărtat de laturile triunghiului. Cercul de centru I și având raza egală cu distanța de mai sus este cercul înscris triunghiului; laturile triunghiului sînt tangente cercului înscris. Bisectoarea interioară unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B, C sînt concurente într-un punct I_a, centrul unui cerc tangent dreptelor BC, AB, CA situat în exteriorul triunghiului, cercul exînscris triunghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie ABC un triunghi, A_1 mijlocul segmentului $|BC|$. Segmentul $|AA_1|$ se numește mediana (din A) a triunghiului. Prin extensie, dreapta AA_1 se numește mediană. Medianele $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ sînt concurente într-un punct G, numit centrul de greutate al triunghiului ABC. Au loc $\|GA_1\| = \frac{1}{3}\|AA_1\|$ și celelalte.

6. Fie ABC un triunghi. Dacă A' este pe dreapta BC astfel ca AA' și BC să fie perpendiculare, $|AA'|$ se numește înălțimea din A a triunghiului. Prin extensie, se spune despre dreapta AA' că este înălțime a triunghiului. Înălțimile AA', BB', CC' sînt concurente, punctul de intersecție se numește ortocentrul triunghiului.

7. Fie P un punct exterior unui cerc; două drepte prin P taie cercul în punctele A, B, respectiv C, D, cu ordonările P, A, B și P, C, D. Atunci $\mathrm{m}(\widehat{BPD}) = \frac{1}{2}(\mathrm{m}(\overset{\frown}{BD}) - \mathrm{m}(\overset{\frown}{AC}))$, $\mathrm{m}(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{BD})$, $\mathrm{m}(\widehat{BQD}) = \frac{1}{2}(\mathrm{m}(\overset{\frown}{BD}) + \mathrm{m}(\overset{\frown}{AC}))$, Q fiind intersecția dreptelor BC și AD.

8. Fie T, A două puncte pe un cerc, P un punct exterior cercului. Dreapta PT este tangenta în T la cerc dacă și numai dacă $\mathrm{m}(\widehat{PTA}) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\overset{\frown}{TA})$ (arcul $\overset{\frown}{TA}$ interior unghiului $\widehat{PTA}$).

9. Într-un cerc coardele egal depărtate de centru sînt congruente și reciproc.

10. Patrulaterul $ABCD$ (convex) este paralelogram dacă AB și CD sînt paralele și BC, DA sînt paralele. Echivalent, $\|AB\| = \|DC\|$ și $\|BC\| = \|AD\|$. Dacă O este intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$, atunci $\|AO\| = \|OC\|$ și $\|BO\| = \|OD\|$. O este centrul de simetrie al paralelogramului. Rombul este patrulaterul convex cu laturile congruente; echivalent, paralelogramul cu diagonalele perpendiculare. Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept; echivalent, paralelogramul cu diagonalele congruente.

Scanned with OKEN Scanner

11. Patrulaterul convex $ABCD$ este trapez dacă (de exemplu) AD și BC sînt paralele (în care caz, $|AD|$ și $|BC|$ se numesc bazele trapezului). Dacă M și N sînt mijloacele bazelor $|AD|$ și $|BC|$, iar P este intersecția dreptelor AC și BD, iar Q este intersecția dreptelor AB și CD, atunci punctele M, P, N, Q sînt coliniare.

12. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă două unghiuri opuse sînt suplementare. Un patrulater este circumscriptibil (adică admite un cerc înscris) dacă și numai dacă suma lungimilor a două laturi opuse este egală cu suma lungimilor celorlalte laturi opuse.

13. Fie ABC un triunghi și B', C' puncte pe AB, respectiv AC astfel ca $B'C'$ și BC să fie paralele. Atunci $\frac{\|AB'\|}{\|AB\|} = \frac{\|AC'\|}{\|AC\|}$. Dacă dreptele d_1 și d_2 sînt drepte paralele, P un punct oarecare și dreptele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ prin P intersectează pe d_1 în $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ și pe d_2 în $B_1, B_2, \ldots B_n, \ldots$ atunci $\frac{\|A_1A_2\|}{\|B_1B_2\|} = \frac{\|A_2A_3\|}{\|B_2B_3\|} = \ldots$ și $\frac{\|PA_1\|}{\|PB_1\|} = \frac{\|PA_2\|}{\|PB_2\|} = \ldots$

14. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $|AD|$ înălțimea din A. Atunci $\|AB\|^2 = \|BD\|\,\|BC\|$, $\|AB^2\| + \|AC\|^2 = \|BC\|^2$, $\|AD\|^2 = \|BD\|\,\|DC\|$.

15. Fie un cerc de rază r, P un punct în planul cercului. O secantă prin P intersectează cercul în punctele A, B. atunci produsul $\|PA\|\,\|PB\|$ este independent de secantă și se numește puterea punctului P față de cerc. Dacă P este exterior cercului, acest produs are valoarea $d^2 - r^2$, iar dacă P este interior cercului, valoarea este $r^2 - d^2$, unde d este distanța punctului P la centrul cercului.

Fiind date două cercuri, punctele care au puteri egale față de cele două cercuri se află pe o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor, numită axa radicală a cercurilor. Trei cercuri care nu au centrele coliniare au axele radicale concurente, punctul de concurență se numește centrul radical al cercurilor.

16. O dreaptă în spațiu este paralelă cu un plan dacă și numai dacă este paralelă cu o dreaptă din acest plan.

Scanned with OKEN Scanner

17. Dacă două plane sînt paralele cu o dreaptă (d) și au puncte comune, atunci muchia lor este paralelă cu dreapta (d).

18. Două plane sînt paralele dacă și numai dacă există două perechi de drepte în cele două plane două cîte două paralele.

19. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă și numai dacă este perpendiculară pe două drepte neparalele din acesta.

Această proprietate pune la dispoziție următoarea metodă care permite să se demonstreze perpendicularitatea a două drepte în spațiu: o dreaptă (d) este perpendiculară pe dreapta (d') dacă este perpendiculară pe un plan care conține pe (d'). (Noi considerăm că prezența faimoasei teoreme a celor trei perpendiculare, cu suita ei de reciproce, în manuale, nu se justifică).

20. Două plane sînt perpendiculare dacă și numai dacă unul conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

21. Unghiul plan corespunzător diedrului planelor (P) și (Q) se construiește astfel: fie A un punct pe muchia (m) a diedrului, (p) perpendiculara în A pe muchia (m) a diedrului, situată în planul (P), iar (q) perpendiculara în A pe (m), situată în planul (Q). Unghiul plan corespunzător este unghiul dreptelor (p) și (q).

22. Ecuația generală a dreptei (într-un sistem ce se presupune ortonormat) este $ax + by + c = 0$, unde $a^2 + b^2$ nu este 0. Dreptele de ecuații $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sînt paralele dacă și numai dacă $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ și sînt perpendiculare dacă și numai dacă $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Ecuația unui fascicul de drepte, determinat de dreptele de mai sus este $\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2) = 0$, sau, cu notația $\Delta_i = a_ix + b_iy + c_i$, $i = 1,2$, $\Delta_1 + \lambda\Delta_2 = 0$. Pentru a arăta că o dreaptă variabilă (depinzînd de unul sau mai mulți parametri) trece printr-un punct fix, se pune ecuația ei în forma $\Delta_1 + \lambda\Delta_2 = 0$, în care Δ_1 și Δ_2 nu depind de parametri.

23. Distanța de la punctul $M(x_0, y_0)$ la dreapta de ecuație $ax + by + c = 0$ este $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

24. Ecuația generală a cercului este $(C) \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$, unde centrul cercului este $(-a, -b)$ și raza r este dată de $r^2 = a^2 + b^2 - c$. Cercul este real dacă și numai dacă $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$.

25. Date fiind cercurile (C') și (C''), familia de cercuri $C' + \lambda C'' = 0$ are proprietatea că oricare două cercuri ale familiei au aceeași axă radicală: $x(m' - m'') + y'(n' - n'') + p' - p'' = 0$.

26. Ecuația cercului determinat de punctele necoliniare $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ este

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

27. Tangenta în punctul $M(x_0, y_0)$, situat pe cercul (C) are ecuația $xx_0 + yy_0 + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0$.

28. Elipsa este locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor la două puncte fixe, F_1 și F_2, numite focarele elipsei, constantă, $2a$, cu $2a > 2c = \| F_1F_2 \|$. Ecuația elipsei, raportată la sistemul ortonormat în care originea este mijlocul lui $| F_1F_2 |$ și dreapta F_1F_2 este axă a x-ilor este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Dreptele $x = \frac{a^2}{c}$ și $x = -\frac{a^2}{c}$ se numesc directoarele elipsei. Raportul distanțelor unui punct al elipsei la unul din focare și la una din directoarele elipsei este constant, egal cu $\frac{c}{a}$.

29. Tangenta la elipsă, într-un punct situat pe elipsă este de ecuație $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$. Tangenta la elipsă paralelă cu dreapta $y = mx$ este de ecuație $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

30. Locul geometric al mijloacelor coardelor în elipsă, paralele cu direcția m este un diametru în elipsă situat pe dreapta de ecuație $y = m'x$ unde $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

31. Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan care au diferența distanțelor la două puncte fixe, F_1 și F_2, numite focarele hiperbolei, constantă, $2a$, cu $2a < 2c = \| F_1F_2 \|$. Ecuația hiperbolei raportată la axe (vedeți 28) este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $b^2 = c^2 - a^2$. Dreptele $y = \frac{b}{a} x$, $y = -\frac{b}{a} x$ sînt asimptote ale hiperbolei. Dreptele $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$ se numesc directoarele hiperbolei. Raportul distanțelor unui punct de pe hiperbolă la unul din focare și la una dintre directoare este constant, egal cu $\frac{c}{a}$.

32. Tangentele la hiperbolă paralele cu direcția m au ecuațiile $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ în condiția necesară — de existență $|am| > b$. Tangenta la hiperbolă în punctul $M(x_0, y_0)$ situat pe hiperbolă are ecuația $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0$.

Locul geometric al mijloacelor coardelor în hiperbolă paralele cu direcția m este dreapta $y = m'x$ dacă $|m| < \frac{b}{a}$ și două semidrepte pe această dreaptă dacă $|m| > \frac{b}{a}$, unde $mm' = \frac{b^2}{a^2}$.

33. Fiind date într-un plan un punct F și o dreaptă (d) care nu trece prin F, mulțimea punctelor din plan care au distanțele la F și la (d) egale poartă numele de parabola de focar F și directoare (d). Notînd P proiecția lui F pe (d), O mijlocul segmentului $|FP|$, în sistemul ortonormat xOy în care $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $O(0, 0)$, ecuația parabolei este $y^2 = 2px$, directoarea d are ecuația $x = -\frac{p}{2}$, axa Ox este axă de simetrie a parabolei.

Scanned with OKEN Scanner

34. Dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct pe parabolă, ecuația tangentei în M la parabolă este $yy_0 = p(x + x_0)$. Dreapta $y = mx + n$, $m \neq 0$ este tangentă parabolei dacă și numai dacă $n = \frac{p}{2m}$.

35. Mijloacele coardelor în parabolă paralele cu direcția m se află pe semidreapta $y = \frac{p}{m^2}$, $x \geqslant \frac{p}{m^4}$.

36. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$$

37. $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$.

38. Funcțiile sin și cos, definite pe întreaga axă reală au mulțimea valorilor segmentul $[-1, 1]$ și sînt periodice avînd perioada principală 2π.

39. Funcția $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ este o bijecție strict crescătoare, deci inversabilă, a cărei funcție inversă este $\arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Prin urmare, $\arcsin s = x$, cu $s \in [-1, 1]$ și $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dacă și numai dacă $\sin x = s$.

Funcția $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ este o bijecție strict descrescătoare, deci inversabilă, a cărei inversă este $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$. Deci $\arccos c = x$, cu $x \in [0, \pi]$ și $c \in [-1, 1]$ dacă și numai dacă $\cos x = c$. Ecuația $\sin x = s$ are soluții dacă și numai $s \in [-1, 1]$, soluția ei generală fiind $x = (-1)^k \arcsin s + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Ecuația $\cos x = c$ are soluții dacă și numai dacă $c \in [-1, 1]$ și în acest caz soluția ei generală este $x = \pm \arccos c + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Funcția tg este definită pe $\mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$ și are mulțimea valorilor $\mathbf{R}$ în întregime, este periodică cu perioada principală π. Funcția ctg este definită pe $\mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, are mulțimea valorilor întreaga axă reală și este periodică cu perioada principală π. Restricția $\text{tg}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-\infty, \infty)$ este o bijecție strict crescătoare, a cărei inversă este $\text{arctg}: (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $\text{arctg}\, t = x$, cu $t \in (-\infty, \infty)$ și $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ exact pentru $\text{tg}\, x = t$.

Ecuația $\text{tg}\, x = t$ are soluții pentru orice t real, soluția generală fiind $x = \text{arctg}\, t + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Restricția $\text{ctg}: (0, \pi) \to (-\infty, \infty)$ este bijecție strict descrescătoare, inversa ei este $\text{arctg}: (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$, prin urmare $\text{arctg}\, \tau = x$ dacă și numai dacă $\text{cotg}\, x = \tau$, pentru $\tau \in (-\infty, \infty)$ și $x \in (0, \pi)$. Ecuația $\text{ctg}\, x = \tau$, are soluții pentru orice τ real, soluția generală fiind $x = \text{arcctg}\, \tau + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

41. Au loc egalitățile, pentru orice x și y reali:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)].$$

Scanned with OKEN Scanner

42. Au loc egalitățile (în condiții evidente):

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} \qquad \operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y} \qquad \operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y+1}{\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}x}$$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x-x)}{\cos x\cos y}$$

$$\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y} \qquad \operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=\frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}.$$

43. Formule pentru funcțiile arcului dublu și triplu:

$\sin 2x=2\sin x\cos x$ (deseori utilizată în forma $\sin kx=2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2}$)

$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$ (care se utilizează des în una din variantele $\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$)

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x} \qquad \operatorname{ctg}2x=\frac{\operatorname{ctg}^2x-1}{2\operatorname{ctg}x}$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x \qquad \cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$$

$$\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x} \qquad \operatorname{ctg}3x=\frac{\operatorname{ctg}^3x-3\operatorname{ctg}x}{3\operatorname{ctg}^2x-1}.$$

44. Exprimarea funcțiilor trigonometrice prin funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \operatorname{ctg}x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

45. Relații între elementele unui triunghi oarecare (notații curente): $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (relația sinusurilor)

$a = b\cos C + c\cos B \quad b = c\cos A + a\cos C$

$c = a\cos B + b\cos A$ (numite și relațiile cosinusurilor)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (teorema lui Pitagora generalizată)

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

(lungimile înălțimii, bisectoarei, medianei din A)

$$\text{aria}\,[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{ab\sin C}{2} =$$

$$= \frac{ca\sin B}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{abc}{4R} = pr.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1

NOȚIUNI GENERALE. PROBLEME

1.1. Arătați că proiecțiile vîrfului A al triunghiului ABC pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor C și B ale triunghiului sînt patru puncte coliniare.

1.2. Se consideră un segment $|AB|$ de lungime a și dreptele (d_1) și (d_2) respectiv perpendiculare în punctele A și B pe dreapta AB; pe segmentul $|AB|$ se consideră un punct M, iar pe (d_1) se ia segmentul $|AC|$ congruent cu $|AM|$ și pe (d_2) se ia segmentul $|BD|$ congruent cu $|MB|$. Să se arate că dreapta CD sau trece printr-un punct fix sau este paralelă cu o direcție dată.

(Admitere, Facultatea de matematică-mecanică, București)

1.3. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza $\|BC\| = 2a$ și înălțimea $\|AA_1\| = h$. Pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ se iau punctele E și respectiv F astfel încît $\|BE\| = \|AF\| = x$. Fie M și N proiecțiile punctelor E și F pe BC. a) Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $|EF|$. Să se arate că aria trapezului $EFNM$ este constantă. c) Să se evalueze în funcția de a, h, x aria triunghiului AEF și să se determine poziția triunghiului AEF astfel ca aria lui să fie maximă.

1.4. Fie $ABCD$ un patrulater convex înscris într-un cerc. Arătați că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB sînt vîrfurile unui dreptunghi.

1.5. Fie $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ înălțimile triunghiului ABC. Arătați că tangentele la cercul circumscris triunghiului în punctele A, B, C sînt paralele cu B_1C_1, C_1A_1, respectiv A_1B_1. Deduceți că perpendicularele din A pe B_1C_1, din B pe C_1A_1 și din C pe A_1B_1 sînt concurente.

Scanned with OKEN Scanner

1.6. Fie $ABCD$ un trapez oarecare, M și N mijloacele bazelor $|AB|$ și $|CD|$, O intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$, P intersecția dreptelor AD și BC. a) Arătați că punctele M, O, N, P sînt coliniare. b) Paralela prin O la baze intersectează pe $|AD|$ în E și pe $|BC|$ în F. Arătați că au loc: $\|EO\| = \|OF\|$ și $\frac{2}{\|EF\|} = \frac{1}{\|AB\|} + \frac{1}{\|CD\|}$. c) Arătați că triunghiurile AOD și BOC au arii egale.

1.7. Fie ABC un triunghi oarecare și $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ înălțimile triunghiului. a) Arătați că triunghiurile A_1B_1C, A_1BC_1, AB_1C_1 sînt asemenea. b) Dreptele A_1A, B_1B, C_1C sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A_1B_1C_1$ (numit triunghiul ortic al triunghiului ABC). c) Cercurile de diametre $|AB|$ și $|AC|$ taie dreapta B_1C_1 în punctele P și respectiv Q (diferite de B_1 și C_1). Arătați că segmentul $|PQ|$ are lungimea egală cu perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$. d) Notînd $E = |A_1P| \cap |AB|$, $D = |A_1Q| \cap |AC|$, $F = |AA_1| \cap |B_1C_1|$, arătați că ED trece prin mijlocul segmentului $|A_1F|$. e) Notînd prin H ortocentrul triunghiului ABC, arătați că simetricele acestuia față de laturile triunghiului se găsesc pe cercul circumscris triunghiului ABC și deduceți că cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, CHA, AHB sînt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC.

1.8. Dacă trei cercuri congruente trec printr-un punct H, atunci ele se intersectează două cîte două în trei puncte A, B, C situate pe un cerc congruent cu cercurile date, iar H este ortocentrul triunghiului ABC. (Problemă a lui Gh. Țițeica.)

1.9. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct pe cercul circumscris triunghiului. Arătați că proiecțiile punctului M pe dreptele BC, CA, AB sînt coliniare. (Teorema lui Simpson. Dreapta care conține cele trei proiecții se numește dreapta lui Simpson a punctului M în raport cu triunghiul dat.)

1.10. Fie ABC un triunghi oarecare și A_1, B_1, C_1 proiecțiile punctului M de pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului pe dreptele BC, CA, AB. Atunci are loc

$$\frac{a}{\|MA_1\|} = \frac{b}{\|MB_1\|} + \frac{c}{\|MC_1\|}.$$

(Gh. I. Bercea)

Scanned with OKEN Scanner

1.11. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc M, N, P, Q mijloacele arcelor $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. a) Arătaţi că dreptele MP şi NQ sînt perpendiculare. b) Dacă patrulaterul $MNPQ$ este trapez, atunci una din diagonalele patrulaterului dat este diametru.

1.12. Fie două cercuri de centre O_1 şi O_2 secante în punctele A şi B. Dacă dreapta O_1O_2 intersectează cercul de centru O_1 în M şi N, iar cercul de centru O_2 în C şi D, să se arate că proiecţia diametrului $|MN|$ pe tangenta în A la cercul de centru O_1 este congruentă cu proiecţia diametrului $|CD|$ pe tangenta în A la cercul de centru O_2.

(Sterian Profire)

1.13. Două cercuri de centre O_1 şi O_2 sînt secante în A şi B. Prin punctul A se duce o dreaptă variabilă care intersectează cele două cercuri în punctele P_1 şi P_2 (diferite de A). Dreapta P_1B taie cercul de centru O_2 în N_2 (diferit de B), iar dreapta P_2B taie cercul de centru O_1 în N_1 (diferit de B). a) Arătaţi că perpendicularele din N_1 şi N_2 pe dreapta P_1P_2 trec prin două puncte fixe Q_1 şi respectiv Q_2 situate pe cercurile de centre O_1 şi O_2. b) Determinaţi locurile geometrice ale proiecţiilor punctelor N_1 şi N_2 pe dreapta P_1P_2. c) Arătaţi că lungimile segmentelor $|AQ_1|$ şi $|AQ_2|$ sînt proporţionale cu razele cercurilor de centre O_1 şi O_2.

1.14. Fie ABC un triunghi oarecare, (d) o dreaptă în planul triunghiului, A', B', C' proiecţiile punctelor A, B, C pe dreapta (d). Arătaţi că perpendicularele din A' pe BC, din B' pe CA, din C' pe AB sînt concurente. (Teorema ortopolului.)

1.15. a) Fie ABC un triunghi oarecare şi punctele A_1, B_1, C_1 pe dreptele BC, CA, AB. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 au un punct comun. b) Fie $ABCDEF$ un patrulater complet. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor EAD, ABF, CDF, BCE au un punct comun (punctul Miquel).

1.16. Fie Q, P, S puncte arbitrare pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului ABC. Paralelele la o direcţie (Δ) duse prin vîrfurile A, B, C taie cercurile circumscrise

Scanned with OKEN Scanner

triunghiurilor APS, BSQ, CPQ în punctele A_1, B_1, C_1 situate pe o dreaptă care trece prin punctul de intersecţie a celor trei cercuri.

(I. Hadîrcă)

1.17. Se dă cercul de diametru $|AB|$ şi fie M un punct mobil pe acest cerc. Bisectoarea unghiului $\widehat{AMB}$ intersectează cercul în punctul N şi dreapta OP în punctul Q, unde O este centrul cercului, iar P este mijlocul segmentului $|BM|$. Să se găsească locul geometric al centrului de greutate al triunghiului BQN.

(C. C. Nistorescu)

1.18. Fie un semicerc de diametru $|AB|$. Pe $|AB|$ se ia un punct oarecare C şi se consideră semicercurile de diametre $|AC|$ şi $|CB|$ de aceeaşi parte a dreptei AB cu semicercul dat. Tangenta comună acestor semicercuri are cu acestea punctele de contact A_1 şi B_1 respectiv. Arătaţi că dreptele AA_1 şi BB_1 se intersectează pe semicercul dat.

Pe baza enunţului formulaţi o problemă de loc geometric şi rezolvaţi-o!

1.19. Se consideră un triunghi ABC şi cercul de centru O circumscris acestui triunghi. Tangenta în punctul B la acest cerc intersectează dreapta AC în punctul D. Cercul circumscris triunghiului BCD taie dreapta AB în punctul E. Să se arate că:

a) Triunghiul BDE este isoscel. b) Cercul circumscris triunghiului ACE este tangent dreptei DE. c) Dreapta AO este perpendiculară pe DE.

(Admitere, Facultatea de matematică-mecanică, Bucureşti, 1969)

1.20. Fie $ABCD$ un trapez isoscel circumscris unui cerc, I intersecţia diagonalelor $|AC|$, $|BD|$, iar $\|AB\| = 2a$, $\|CD\| = 2b$, $a > b$.

a) Să se calculeze latura neparalelă şi raza cercului în funcţie de a şi b. b) Dacă AM este paralelă cu BC şi IN este paralelă cu AD, unde $M \in |AB|$ şi $N \in |DC|$, să se arate că

$$\frac{\|IM\|}{\|BC\|} + \frac{\|IN\|}{\|AD\|} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Dacă un trapez are diagonalele perpendiculare, atunci segmentul care unește mijloacele bazelor este congruent cu linia mijlocie a trapezului. În particular, dacă trapezul este și isoscel, înălțimea lui este congruentă cu linia mijlocie.

1.21. Fie $[Ox$ și $[Oy$ două semidrepte cu aceeași origine. O dreaptă variabilă de direcție fixă taie cele două semidrepte în punctele X și Y. Determinați locul geometric al mijlocului segmentului $|XY|$.

1.22. Fie d_1 și d_2 două drepte coplanare. Găsiți locul geometric al punctelor din planul dreptelor care au suma distanțelor la cele două drepte o constantă dată.

1.23. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Perpendiculara în B pe dreapta AB taie cercul în punctul P (diferit de B), iar pe AC în punctul M. Dreapta CP taie pe AB în N. Să se arate că dreptele AP și MN sînt perpendiculare. Să se găsească locul geometric al punctului M cînd baza BC este fixă, iar A descrie cercul.

(Admitere, facultăți tehnice, 1982)

1.24. Fie B și C două puncte fixe pe un cerc de centru O și A un punct variabil pe cerc. Dacă M și N sînt simetricele punctului O față de dreptele AC și respectiv AB, să se afle locul geometric al intersecției dreptelor BM și CN, precum și locurile geometrice ale punctelor M și N.

(Dan Cartianu)

1.25. Fie ABC un triunghi oarecare, O centrul cercului circumscris, H ortocentrul triunghiului, G centrul de greutate.

a) Arătați că picioarele înălțimilor și picioarele medianelor se găsesc pe un cerc. *(Cercul lui Euler).*

b) Folosind faptul că simetricele ortocentrului față de laturile triunghiului se află pe cercul circumscris (problema 1.7), deduceți că mijloacele segmentelor euleriene $|AH|$, $|BH|$, $|CH|$ se găsesc pe cercul lui Euler (numit, de aceea, „cercul celor nouă puncte").

Scanned with OKEN Scanner

c) Fie O_9 centrul cercului lui Euler. Arătați că punctele H, O_9, H, O sînt coliniare și în această ordine; în plus

$$\frac{\| OG \|}{\| ON \|} = \frac{\| O_9G \|}{\| O_9H \|} = \frac{1}{3}$$

(dreapta HO se numește dreapta lui Euler a triunghiului ABC).

1.26. Fie ABC un triunghi oarecare. Prin vîrfurile B, C se duc semidrepte paralele, (d_1) și (d_2), situate de aceeași parte a dreptei BC. Bisectoarea unghiului format de semidreptele $[BA$ și (d_1) intersectează bisectoarea unghiului format de semidreptele $[CA$ și d_2 în punctul M. Să se determine locul geometric al punctului M cînd semidreptele (d_1) și (d_2) sînt variabile, iar punctul A descrie cercul circumscris triunghiului.

(Radu Petrovici)

1.27. Pe arcul $\widehat{BC}$ care nu conține punctul A al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul arbitrar M. Arătați că $\| MA \| = \| MB \| + \| MC \|$.

1.28. Fie ABC un triunghi echilateral, m un punct în planul triunghiului nesituat pe cercul circumscris acestuia. Atunci există un triunghi avînd laturile de lungimi $\| MA \|$, $\| MB \|$, $\| MC \|$. (Teorema lui D. Pompeiu.)

1.29. Fie $BB_1A'A$ și $AA_1C'C$ pătratele construite în exterior pe catetele unui triunghi dreptunghic BAC ($m\hat{A} = 90°$). Arătați că dreptele B_1A' și A_1C' se intersectează pe perpendiculara din A pe BC. Fie a punctul de concurență. Determinați locul geometric al punctului N cînd A descrie cercul de diametru fix $| BC |$.

1.30. Două drepte paralele (d_1) și (d_2) sînt tăiate de două secante în punctele B_1, C_1 situate pe (d_1) și B_2, C_2 situate pe (d_2). Secantele se taie în punctul A. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 și AB_2C_2 sînt tangente în A. Deduceți că linia centrelor celor două cercuri trece prin A.

1.31. Fie dreptele neconcurente (a), (b), (c) într-un plan, $B = (c) \cap (a)$, $C = (a) \cap (b)$, $A = (b) \cap (c)$. O dreaptă variabilă (d) intersectează dreptele (c), (b), (a) în punctele P, Q, R. Cercurile circumscrise triunghiurilor BCR și CPQ se taie a doua oară în M. a) Să se afle locul geometric al punctului

Scanned with OKEN Scanner

M. b) Să se studieze cazul în care dreptele (a) și (b) sînt paralele. c) Dacă triunghiul ABC este echilateral, ce relație există între segmentele $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$?

(Concurs matematică, etapa finală, 1970)

1.32. În triunghiul ABC se duc bisectoarele interioare AE și AF ale unghiurilor formate de înălțimea $|AD|$ respectiv cu laturile $|AB|$ și $|AC|$. Perpendicularele din E și F respectiv pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ le intersectează în M și N. a) P fiind intersecția dreptelor DM și AE, iar Q intersecția dreptelor DN și AF, să se arate că $\|MN\| = 2\|PQ\|$. b) Patrulaterul $PQFE$ este inscriptibil. c) Să se găsească un punct pe bisectoarea AE pentru care suma distanțelor la punctele B și M să fie minimă, apoi să se calculeze această distanță minimă în funcție de $\|AB\| = c$ și măsura unghiului B.

(Concurs matematică, etapa județeană, 1969)

1.33. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct oarecare pe dreapta BC. Cercul care trece prin B și M și este tangent la AB intersectează cercul care trece prin C și M și este tangent la AC în punctul P. Determinați locul geometric al punctului P cînd M descrie dreapta BC.

1.34. În triunghiul ABC, fie $A_1 \in |BC|$, $B_1 \in |CA|$, $C_1 \in |AB|$ punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Paralela prin B_1 la dreapta AB intersectează dreapta A_1C_1 în Q, iar paralela prin A_1 la AB intersectează pe B_1C_1 în T. Să se arate că dreptele CC_1, A_1B_1, TQ sînt concurente.

(Marcel Chiriță)

1.35. Se dă un triunghi ABC ascuțitunghic. Pe latura $|AC|$ drept coardă și în exteriorul triunghiului se construiește arcul capabil de unghiul B, iar pe $|AB|$ drept coardă și în exteriorul triunghiului se construiește arcul capabil de unghiul C. O dreaptă variabilă care trece prin A taie arcele respective în B' și C'. Dreptele $B'C$ și $C'B$ se intersectează în A'. a) Să se arate că locul geometric al punctului A' cînd $B'C'$ se rotește în jurul punctului A este un arc de cerc. b) Să se arate că cercurile cărora le aparțin arcele $AB'C$, $BC'A$ și arcul loc geometric au un punct comun. c) Fie

Scanned with OKEN Scanner

C_1, C_2, C_3 centrele celor două cercuri din enunț și centrul cercului din care face parte locul geometric. Să se arate că triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $C_1C_2C_3$.

(Concurs matematică, etapa finală, 1967)

1.36. Prin mijlocul M al corzii $|AB|$ a unui cerc se duc alte două coarde arbitrare $|CD|$ și $|EF|$, punctele C și E fiind pe același arc $\overset{\frown}{AB}$. Paralela prin E la dreapta AB taie a doua oară cercul în G, iar CF și ED taie pe AB în punctele U și V. a) Să se arate că patrulaterul $CGUV$ este inscriptibil. b) Să se arate că triunghiurile GUM și EMV sînt congruente. c) Dreptele CE și FD taie pe AB în F, respectiv, Q. Să se demonstreze că patrulaterul $QGUF$ este inscriptibil. d) Să se arate că $\|PM\| = \|MQ\|$.

(Concurs matematică, etapa județeană, 1971)

1.37. Fie I intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$ ale unui patrulater convex ortodiagonal $ABCD$ și P,Q,R,S proiecțiile oblice de unghi α și de același sens ale lui I pe dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Notînd E intersecția dreptelor PQ și RS, să se demonstreze că EI este perpendiculară pe linia centrelor cercurilor circumscrise patrulaterelor $IPBQ$ și $IRDS$.

(Gh. Buicliu)

1.38. Printr-un punct O al unui cerc se consideră coardele $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$ (A, B, C-puncte pe cerc). Să se arate că cercurile de diametre $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$ se retaie două cîte două în trei puncte coliniare. *(Teorema lui Salmon.)*

1.39. Fie $|AA_1|$ bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC. Cercurile circumscrise triunghiurilor AA_1B și AA_1C intersectează dreptele AC și AB respectiv în N și M. Să se arate că $\|BM\| = \|CN\|$.

(Problema 6889, G.M., 11, 1965)

1.40. Fie A și B două puncte fixe în plan. Să se găsească locul geometric al vîrfului M al pătratului $ANMP$ astfel încît $B \in [PM]$.

1.41. a) Pe ipotenuza $|BC|$ a triunghiului ABC determinați poziția punctului M astfel ca razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AMB și AMC să aibe lungimi minime.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru M astfel determinat, calculați perimetrul triunghiului ABC în funcție de razele celor două cercuri.

(Concurs matematică, cls. VII, Giurgiu, 1983)

1.42. Fie O un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC și $M = |AO \cap |BC|$, $N = |OB \cap |CA|$, $P = |OC \cap |AB|$. R fiind raza cercului circumscris triunghiului, să se demonstreze că dacă

$$\frac{1}{\|AM\|} + \frac{1}{\|BN\|} + \frac{1}{\|CP\|} = \frac{2}{R},$$

atunci O este centrul cercului circumscris triunghiului.

(Viorel Bândilă)

1.43. Pe un cerc se consideră punctele fixe A și B care nu sînt diametral opuse și punctele mobile C și D astfel încît linia poligonală $[ABCD]$ să fie un patrulater convex și $|CD| \equiv |AB|$. Să se arate că maximul perimetrului patrulaterului $ABCD$ se obține atunci cînd CD și AB sînt paralele.

(A.V. Mihai)

1.44. Fie cercul fix de centru O, A un punct fix în planul cercului, triunghiul BMC isoscel, $\|BM\| = \|CM\|$, cu vîrfurile B, C pe cerc și astfel încît dreapta MS trece prin A. Dacă unghiul $\widehat{MBC}$ are măsura constantă, arătați că dreapta CM trece printr-un punct fix.

1.45. Fie un cerc fix de centru O, A un punct *fix* în planul cercului $|BC|$ un diametru variabil al cercului. Dreptele AM și AN retaie cercul în punctele B' și C'. Să se arate că dreapta $B'C'$ trece printr-un punct fix.

1.46. Se dă un pătrat $ABCD$. Două puncte M și N parcurg conturul pătratului în sens trigonometric, pornind unul din A, celălalt din B, cu aceeași viteză. Se cere locul geometrci al mijlocului segmentului $|MN|$. Generalizare pentru un poligon cu laturile congruente.

(C. Ottescu)

1.47. Fie ABC un triunghi oarecare, punctele $B' \in |AC$ și $C' \in |AB$ astfel încît $m(\widehat{AB'C'}) = m(\widehat{ABC})$. Determinați locul geometric al centrului cercului circumscris triunghiului $AB'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

1.48. Fie ABC un triunghi. Cercurile cu centrele în A, B, C și de raze r_a, r_b, r_c intersectează laturile triunghiului în șase puncte (se presupune că discurile respective sînt două cîte două disjuncte). Demonstrați că cele șase puncte sînt conciclice dacă și numai dacă există egalitățile $a - r_b = b - r_a$ și $b - r_c = c - r_b$.

(I.V. Maftei și A.F. Ghioca)

1.49. În triunghiul ABC înălțimea $|CD|$ determină pe mediana $|AA_1|$ segmente congruente. Se cere locul geometric al vîrfului C cînd latura $|AB|$ rămîne fixă și să se evalueze raportul lungimilor segmentelor determinate de $|CD|$ pe mediana $|BB_1|$.

(Concursul „Gh. Țițeica", Slatina, 1982)

1.50. Fie ABC un triunghi oarecare, (d) o dreaptă în planul triunghiului, A', B', C' simetricele punctelor A, B, C în raport cu dreapta (d). Arătați că perpendicularele din A' pe BC, din B' pe AC și din C' pe AB sînt concurente.

1.51. Pe dreptele (a) și (b) concurente în O se iau punctele $A \in (a)$, $B \in (b)$. Perpendiculara în A pe (a) intersectează dreapta (b) în A', iar perpendiculara în B pe (b) taie pe (a) în B'. Să se arate că: a) Patrulaterul $AA'BB'$ este inscriptibil și $\|OA'\| \cdot \|OB\| = \|OA\| \cdot \|OB'\|$. b) Dacă A, B sînt mobile, dar $\|AB\|$ este constantă, atunci și $\|A'B'\|$ este constantă. c) În ipoteza de la b) găsiți locul geometric al intersecției dreptelor AA' și BB'.

(Constantin Caragea)

1.52. Fie AD diametru în cercul circumscris triunghiului ABC, G și F proiecțiile pe AD ale punctelor B, C, E proiecția lui A pe BC, H proiecția lui E pe AB. Să se arate că: a) Punctele E, F, H sînt coliniare. b) $\|AH\| \cdot \|AB\| = \|AG\| \cdot \|AF\| = \|AE\|^2$. c) Dreapta AE este tangentă cercului circumscris triunghiului GEF.

(Constantin Caragea)

1.53. Fie (d_1) și (d_2) două drepte concurente în A. Un cerc variabil care trece prin A retaie dreptele (d_1) și (d_2) în punctele B, C. Fie M mijlocul arcului $\overset{\frown}{ACB}$ și N mijlocul arcului $\overset{\frown}{ABC}$. Fie C_1 cercul ce trece prin A și este tangent în

Scanned with OKEN Scanner

B dreptei BM, C_2 cercul ce trece prin A și este tangent în C dreptei CN. Cercurile C_1 și C_2 se retaie în T. Se cere locul geometric al punctului T.

(S. Teleman)

1.54. În triunghiul ABC se consideră $c < a < b$. Două puncte mobile M și N pornesc din A, respectiv B parcurgînd cu aceeași viteză în modul triunghiul în sensul A, B, C pînă cînd M ajunge din nou în A (și N din nou în B). Se cere locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$.

(C. Ottescu)

1.55. În patrulaterul convex $ABCD$, cercul de diametru $|AB|$ este tangent dreptei CD. Arătați că o condiție necesară și suficientă pentru ca cercul de diametru $|CD|$ să fie tangent dreptei AB este ca dreptele BC și AD să fie paralele.

1.56. Două cercuri se taie în punctele A și B. Tangentele în A la cele două cercuri le intersectează, a doua oară în punctele M și N, tangentele în B le intersectează a doua oară în punctele P și Q. Arătați că mijloacele segmentelor $|AM|$, $|AN|$, $|BP|$, $|BQ|$ și punctele A și B sînt conciclice. Precizați centrul cercului pe care se află aceste șase puncte.

(Problema 20 197, G.M.)

1.57. Fie M un punct pe arcul AB care nu conține punctul C al cercului circumscris triunghiului ABC, N intersecția perpendicularei din M pe BC cu cercul circumscris, D intersecția acesteia cu BC, E și F intersecțiile paralelei prin D la AN cu AB și AC. Arătați că: a) Dreptele ME și AB sînt perpendiculare; MF și AC sînt perpendiculare. b) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC și $R = ED \cap MH$, atunci $\|MR\| = \|MH\|$.

(Dimitrie Drăghicescu)

1.58. Două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 și O_2 se taie în S și M. Fie A_1 punct mobil pe cercul $\mathcal{C}_2$. Perpendiculara în S pe SA_1 retaie cercul $\mathcal{C}_1$ și B_1 și cercul $\mathcal{C}_2$ în A_2, SA_1 retaie cercul $\mathcal{C}_2$ în B_2. Fie T intersecția dreptelor B_1A_1 și B_2A_2 și ω_1, ω_2 centrele cercurilor TMA_1 și TMA_2. Arătați că: a) Locul geometric al punctului T este un cerc. b) Patrulaterele TA_1MB_2 și TA_2MB_1 sînt inscriptibile. c) $\|MA_1\| \cdot \|MA_2\| = \|MB_1\| \cdot \|MB_2\|$. d) Segmentul $|\omega_1\omega_2|$ trece printr-un punct fix și are lungime constantă.

(Valentin Boju)

Scanned with OKEN Scanner

1.59. Fie $|CD|$ o coardă mobilă a semicercului fix de centru O și de diametru $|AB|$, C situat între D și B. Tangentele în C și D la semicerc se taie în T, AC și BD se taie în Q, OM și CD în S (M fiind mijlocul segmentului $|BQ|$), iar cercul de diametru OS și semicercul de diametru $|AB|$ se intersectează în U. Arătați că: a) TQ și AB sînt perpendiculare; b) Produsul $\|OM\| \cdot \|OS\|$ este constant cînd coarda $|CD|$ este variabilă; c) Punctele M, U, T sînt coliniare.

(Valentin Boju)

1.60. Pe laturile $|AB|$, $|AC|$ ale triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil. Perpendicularele în M pe AB și în N pe AC se taie în S. Arătați că cercurile $AMSN$ și $BMNC$ sînt ortogonale dacă și numai dacă $|BC|$ este diametru în cercul $BMNC$.

(Florin Pîrvănescu)

1.61. Pe laturile unghiului drept xOy se iau punctele M și N pe Ox, A pe Oy. a) Cercul AON și cercul care trece prin O și M și este ortogonal celui precedent se mai taie în P. Să se arate că A, M, P sînt coliniare. b) Presupunînd M și N variabile pe Ox astfel încît cercul AMN să fie tangent axei Oy în punctul fix A, să se arate că triunghiul AOP este isoscel și să se afle locul geometric al punctului P. c) Să se arate că cercul OMP mai trece, în acest caz, încă printr-un punct fix, în afară de O.

(Vasile Vasu)

1.62. Fie A un punct fix pe diametrul fix $|MN|$ al unui cerc, C un punct variabil pe cerc, B intersecția dreptei MC cu perpendiculara în A pe MN. a) Determinați locul geometric al centrului cercului ABC. b) determinați locul geometric al punctelor de contact ale tangentelor duse din M la cercul circumscris triunghiului ABC.

(Laurențiu Hersch)

1.63. Care sînt poligoanele regulate ce pot avea toate vîrfurile pe laturile unui triunghi echilateral?

(Problema 0:302, G.M., 5,1982)

1.64. Cercurile de diametre laturile unui patrulater convex au un punct comun dacă și numai dacă patrulaterul este ortodiagonal.

(Florin Pîrvănescu)

Scanned with OKEN Scanner

1.65. Să se afle locul geometric al punctelor M situate în interiorul triunghiului echilateral ABC știind că $m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{MCA}) = 90°$.

(Laurențiu Panaitopol)

1.66. Pe cercul circumscris triunghiului ABC fie P un punct oarecare. Paralele prin P la BC, CA, AB intersectează pentru a doua oară cercul circumscris în punctele A', B', respectiv C'. Arătați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt congruente și că dreptele AA', BB', CC' sînt paralele. Determinați locurile geometrice ale centrului de greutate și ortocentrului triunghiului $A'B'C'$ cînd punctul P este variabil pe cercul circumscris triunghiului ABC.

1.67. Două cercuri de centre O_1 și O_2 au punctul comun A și nu sînt tangente. O dreaptă variabilă prin A intersectează cele două cercuri în punctele M_1 și respectiv M_2. Determinați locul geometric al intersecției dreptelor M_1O_1 și M_2O_2.

1.68. Fie $|BE|$ un segment fixat. Determinați locul geometric al vîrfului A al triunghiului isoscel ABC care are pe $|BE|$ ca mediană.

1.69. Prin ortocentrul H al unui triunghi oarecare se duce o dreaptă oarecare (d) care intersectează laturile $|AC|$ și $|AB|$ respectiv în P și Q. Perpendicularele duse din P și Q pe (d) intersectează înălțimile $|CF|$ și $|BE|$ în U și respectiv V. Arătați că dreptele UV și BC sînt paralele.

(D. Gerll, Franța)

1.70. Într-un cerc cu centrul O se consideră un diametru fix $|AB|$. Fie C un punct variabil pe cerc. a) Să se afle locul geometric al centrului cercului înscris în triunghiul ABC cînd C descrie cercul dat. b) Bisectoarele exterioare unghiurilor A și B ale triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul în punctele M și N. Să se arate că segmentul $|MN|$ are ca mărime lungimea laturii pătratului înscris în cercul dat. c) În ce poziție a punctului C, MN este paralelă cu AB? Poate fi MN perpendiculară pe AB?

1.71. Fie $|AD|$ mediana corespunzătoare laturii $|BC|$ a triunghiului oarecare ABC. Dintr-un punct E al laturii $|BC|$ se duce paralela la AD, care intersectează pe AB în

Scanned with OKEN Scanner

N și pe AC în M. a) Să se arate că $\|EM\| + \|EN\| < 2p$ ($2p$ este perimetrul triunghiului ABC). b) Dacă medianele din vîrfurile C și B sînt perpendiculare atunci $\|EM\| + \|EN\| = 3 \cdot \|BC\|$. c) Determinați locul geometric al vîrfului A cînd vîrfurile B, C sînt fixe și este îndeplinită condiția b).

1.72. Se dă un triunghi $A_1A_2A_3$. Pe latura $|A_1A_2|$ se iau punctele B_1 și D_2, pe latura $|A_2A_3|$ — punctele B_2 și D_3, pe latura $|A_3A_1|$ — punctele B_3 și D_1 astfel încît, considerînd paralelogramele $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, dreptele A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 sînt concurente. Arătați că dacă $\|A_1B_1\| = \|A_2D_2\|$ și $\|A_2B_2\| = \|A_3B_3\|$ atunci $\|A_3B_3\| = \|A_1D_1\|$.

(Concurs, U.R.S.S. 1971)

1.73. Se dau două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ de centre O_1 și O_2 care se taie în punctele A și B. a) Prin A se duc două drepte egal înclinate față de linia centrelor O_1O_2 care intersectează cercurile în punctele A_1, A_2 și B_1, B_2 (A_1 și B_1 pe $\mathcal{C}_1$, A_2 și B_2 pe cercul $\mathcal{C}_2$). Arătați că $\|A_1A_2\| = \|B_1B_2\|$. b) Să se construiască secanta A_1AA_2 astfel încît $\|A_1A_2\| = l$. Între ce limite poate varia l?

1.74. Pe cercul circumscris triunghiului dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, se consideră punctul variabil M, iar pe dreapta AC se ia punctul D astfel încît C este mijlocul segmentului $|AD|$. Paralela prin D la CM intersectează BM în N. Aflați locul geometric al mijlocului segmentului $|AN|$.

(Ilie Stănescu)

1.75. Vîrful A al triunghiului dreptunghic ABC este mobil pe cercul de diametru fix BC și centru O. Se prelungesc catetele $|AB|$ și $|AC|$ cu segmentele $|BE| \equiv |AC|$ și $|CF| \equiv |AB|$. Fie D punctul în care bisectoarea unghiului BAC retaie cercul și G diametralul opus lui A. Să se arate că: a) Punctele E, D, F, G sînt coliniare. b) Locurile geometrice ale punctelor E și F sînt arce de cercuri tangente între ele și care taie cercul dat sub unghi drept. c) Ortocentrele triunghiurilor EBD și CDF sînt situate pe cercul dat.

(Gh. Popescu)

Scanned with OKEN Scanner

1.76. Un punct M este mobil pe cercul de diametru fix $|AB|$. O dreaptă care trece prin centrul cercului, O, și este paralelă cu bisectoarea unghiului $\widehat{AMB}$ se intersectează cu AM în P, cu BM în Q și cu tangenta în M la cerc în L. a) Să se afle locul punctelor P și Q. b) Să se afle locul punctului L.

(Gh. Popescu)

1.77. În trapezul $ABCD$ având bazele $|AB|$ și $|CD|$, se consideră punctul P pe latura $|BC|$ și pe latura $|AD|$ punctul Q astfel încît AP și CQ să fie paralele. Arătați că QB și PD sînt paralele.

(Olimpiada olandeză, 1971)

1.78. Pe un cerc cu centrul A se consideră punctele B_1, C_1, B_2, C_2. B_3, C_3 în această ordine astfel încît triunghiurile AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, să fie echilaterale. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AC_1B_2, AC_2B_3, AC_3B_1 se mai intersectează două cîte două în alte trei puncte care sînt vîrfurile unui triunghi echilateral congruent cu cele date.

(Mihai Popescu)

1.79. Considerăm punctul mobil M pe latura $|BC|$ a triunghiului oarecare ABC, iar $P \in AB$, $Q \in AC$ astfel încît MP este paralelă cu AC și MQ cu AB. Fie O_1 și O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BMP și CMQ, iar B_1 și C_1 simetricele punctelor B, C față de O_1 și, respectiv, O_2. a) Să se arate că mediatoarea segmentului $|B_1C_1|$ trece printr-un punct fix. b) Dacă S este al doilea punct de intersecție al cercurilor de mai sus, să se afle locul geometric al punctului S, cînd M descrie latura $|BC|$.

(Florin Pîrvănescu)

1.80. Se dă paralelogramul $ABCD$ și un punct E pe latura $|AB|$. Trei drepte paralele duse prin A, B, C intersectează dreapta DE respectiv în M, N, P. a) Să se demonstreze că $\|MN\| = \|DP\|$. b) Fie Q intersecția paralelei prin N la AD cu dreapta CP. Să se arate că $\|PQ\| = \|AM\|$. c) Să cere locul geometric al punctului Q cînd AM, BN, CP se rotesc în jurul puctelor A, B, C rămînînd paralele între ele.

Scanned with OKEN Scanner

1.81. Fie $|AB|$ și $|CD|$ două segmente paralele, variabile ca direcție avînd mijloacele fixe M și respectiv N și astfel încît $\|AB\| + \|CD\| = 2 \cdot \|MN\|$. a) Arătați că patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal. b) Dacă E este intersecția dreptelor AC și BD atunci are loc $\|AE\| \|CE\| + \|BE\| \|DE\| = \|AB\| \|DC\|$; c) Determinați locul geometric al mijloacelor segmentelor $|BC|$ și $|AD|$. d) Determinați locul geometric al intersecției dreptelor AD și BC. e) Să se afle locul geometric al proiecțiilor (ortogonale) punctului E pe laturile patrulaterului $ABCD$ dacă $\|AB\|$ și $\|CD\|$ sînt constante.

(N. Păun)

1.82. În planul unui cerc fix se consideră punctele fixe A și B și fie M un punct variabil pe cercul dat. Fie A_1 și B_1 mijloacele segmentelor $|AM|$ și $|BM|$. a) Determinați locul geometric al mijlocului segmentului $|A_1B_1|$. b) Determinați locul geometric al centrului de greutate al triunghiului MAB.

1.83. Se consideră două cercuri cu centrele O_1 și O_2 și un punct A exterior ambelor cercuri. Din punctul A se duc tangentele $|AT_1|$ și $|AT_1'|$ la cercul cu centrul în O_1 și tangentele $|AT_2|$ și $|AT_2'|$ la cercul de centru O_2. a) Arătați că mijloacele segmentelor $|T_1T_2|$, $|T_1T_2'|$, $|T_1'T_2|$, $|T_1'T_2'|$ sînt vîrfurile unui paralelogram. b) Aflați locul geometric al punctului A astfel încît paralelogramul de mai sus să fie dreptunghi. c) Să se discute locul geometric obținut după poziția celor două cercuri date, specificîndu-se și condițiile de existență a locului.

1.84. Într-un triunghi dreptunghic ABC fie O mijlocul ipotenuzei $|BC|$ și (d) perpendiculara în A pe AO. Proiecțiile punctelor C și B pe (d) se notează cu C' și B'. a) Să se arate că $\|BB'\| + \|CC'\| = \|BC\|$ și $4\|BB'\| \cdot \|CC'\| = \|B'C'\|^2$. Să se calculeze raportul dintre ariile trapezului $BCC'B'$ și triunghiului ABC. c) Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABB' și ACC' se intersectează într-un punct situat pe $|BC|$.

1.85. Fie A' piciorul înălțimii din A în triunghiul ABC în care $\|AB\| = \|AC\|$ și M un punct pe cercul cu centrul în A și de rază $\|AA'\|$. Paralela prin M la BC taie pe AB

Scanned with OKEN Scanner

în N. Să se găsească locul geometric al punctului de intersecție al paralelei prin N la AA' cu perpendiculara din A' pe AM.

(Gh. Vernic)

1.86. Fie ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris triunghiului, I centrul cercului înscris care atinge latura $|BC|$ în A_1. Dreptele AO și AI intersectează cercul circumscris în punctele A', A''. Să se demonstreze că dreptele $A'I$ și $A''A_1$ se intersectează pe cercul circumscris.

(Gh. Țițeica)

1.87. Fie H ortocentrul triunghiului ABC înscris în cercul fix de centru O, P mijlocul segmentului $|AH|$, $|AD|$ mediana din A a triunghiului, R intersecția medianei $|AD|$ cu cercul circumscris. Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor PD și OR cînd A descrie cercul.

(Florin Pîrvănescu)

1.88. Pe cercul de diametru $|AB|$, $\|AB\| = 2a$, se consideră punctele C și D, de aceeași parte a diametrului $|AB|$, astfel încît $|AC|$ și $|AD|$ au lungimea laturii pătratului, respectiv a triunghiului echilateral înscris în cercul de diametru $|AB|$. Notînd E intersecția dreptelor BC și AD, iar F intersecția dreptelor BD și AC: a) Să se arate că EF este perpendiculară pe AB. b) Să se calculeze unghiurile și laturile triunghiului ACD. c) Să se arate că punctele C, D, E, F sînt pe un cerc a cărui rază să se determine și să se găsească distanța de la centrul acestui cerc la centrul cercului dat.

1.89. Fie pătratul $ABCD$. Prelungim diagonala $|DB|$ cu un segment $|BN|$ avînd lungimea laturii pătratului și fie M pe prelungirea laturii $|DC|$ astfel încît $m(\widehat{MAD}) = 3\, m(\widehat{AMD})$. Dreptele AM și DN se intersectează în punctul P, iar NC și AD în H. Perpendiculara în H pe AH intersectează pe MN în G. Să se arate că: a) Patrulaterul $ANMD$ este inscriptibil. b) Dreptele CP și MN sînt paralele. c) AN este tangentă cercului circumscris triunghiului APD. d) Punctele A, C, G sînt coliniare. e) Evaluați $\|DH\|$ în funcție de latura pătratului.

Scanned with OKEN Scanner

1.90. În dreptunghiul $ABCD$ cu $\| AB \| > \| AD \|$, bisectoarea unghiului $\widehat{DAC}$ intersectează pe DC în M, iar perpendiculara din B pe AC intersectează pe AC, DC, AM în N, P, respectiv Q. Să se deonstreze că: a) Triunghiul MPQ este isoscel. b) $\| DM \| \| AD \| = \| MC \| \cdot \| NC \|$. c) Dacă punctele A, B, C, Q, D sînt conciclice, atunci suma distanțelor de la orice punct situat în interiorul triunghiului ABQ la laturile acestuia este constantă. d) Considerînd M variabil pe $| CD |$, păstrînd notațiile, să se precizeze poziția lui M astfel încît AP și QC să fie perpendiculare.

(Gh. Eftimie)

1.91. Paralelele duse din centrul cercului înscris la catetele triunghiului dreptunghic ABC taie ipotenuza $| BC |$ în E și F, iar proiecțiile acestor puncte pe AB, respectiv AC sînt M și N. Să se arate că: a) Segmentul $| MN |$ împarte triunghiul ABC în două părți echivalente. b) D fiind mijlocul catetei $| AB |$, segmentele CM și DN sînt paralele.

1.92. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, H ortocentrul acestuia și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $| BC |$, $| CA |$, $| AB |$. Paralela prin A la HA_1 intersectează pe OA_1 în A', iar paralela prin A_1 la OA intersectează pe AH în A''. Analog se construiesc punctele B', C', B'', C''. Să se arate că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sînt congruente și asemenea cu triunghiul ABC.

(Th. Gh. Cocea)

1.93. Fie triunghiul ABC înscris în cercul de centru O, D diametralul opus lui A. Paralele prin D la AB și AC intersectează cercul circumscris în E și respectiv F, iar pe AC și AB în M și N. a) Să se arate că dreptele AD, FC, BE și MN sînt concurente. b) $\| MC \| = \| FN \|$.

(Laura Constantinescu)

1.94. Pe un cerc dat se consideră punctele fixe A, B astfel ca $m(\widehat{AB}) = 60°$. Două drepte variabile prin A și B, perpendiculare între ele, se intersectează (în afara cercului) în P și intersectează cercul în C și resectiv D. a) Arătați că segmentul $| CD |$ are lungime constantă. b) Arătați că $\| AD \|^2 + \| BC \|^2$ este constantă. c) Determinați locul intersecției dreptelor AD și BC.

Scanned with OKEN Scanner

1.95. Pe cercul de centru O și rază r considerăm punctul fix A și punctele mobile M și N, distincte, astfel ca $m(\widehat{MAN}) \neq 90°$. Perpendiculara din M pe AN o intersectează în P, iar perpendiculara din N pe AM o intersectează în Q. a) Arătați că PQ are direcție fixă. b) Determinați poziția punctelor M și N astfel încît distanța punctului O la dreapta PQ să fie maximă.

(Petre Dumitru)

1.96. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare, convex. Pe paralela prin A la BC se consideră punctul E astfel ca segmentele $|BC|$ și $|AE|$ să fie congruente, E de aceeași parte a lui AB cu C; pe paralela prin A la CD se ia punctul F astfel ca segmentele $|AF|$ și $|DC|$ să fie congruente și F de aceeași parte a lui DA ca și C. Dreapta AE taie dreapta DC în M iar dreapta AF taie pe BC în N. Arătați că dreptele BE, DF, MN sînt concurente.

(Cezar Coșniță)

1.97. Pe un cerc cu centrul O se consideră patru puncte oarecare A, B, C, D. Cercul cu centrul B și care trece prin O taie cercul cu centrul în A și care trece prin O în A_1, cercul cu centrul C și care trece prin O taie cercul cu centrul B și care trece prin O în B_1, cercul cu centrul D și care trece prin O taie cercul cu centrul C și care trece prin O în C_1, cercul cu centrul A și care trece prin O taie cercul cu centrul D și care trece prin D în punctul D_1. Arătați că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram.

(Cezar Coșniță)

1.98. Fie un triunghi ABC și un punct P în planul triunghiului. Tangentele în P la cercurile PAB, PBC, PCA intersectează dreptele AB, BC și respectiv CA în trei puncte coliniare, a căror dreaptă este perpendiculară pe dreapta OP, O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

(Virgil Claudian)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

SEGMENTE PROPORȚIONALE

2.1. Fie $ABCD$ un trapez $(AB \parallel CD)$ și punctul $M \in |AD|$ astfel încît $\frac{\| AM \|}{\| DM \|} = \frac{m}{n}$. Prin M se consideră paralela MN la baze, $N \in |BC|$. Arătați că

$$\| MN \| = \frac{m \cdot \| CD \| + n \cdot \| AB \|}{m + n}.$$

2.2. Fie ABC un triunghi oarecare, G centrul lui de greutate și (d) o dreaptă care nu taie triunghiul. Prin punctele A, B, C, G se duc drepte paralele care intersectează dreapta (d) în punctele A', B', C' și respectiv G'. Arătați că are loc

$$\| AA' \| + \| BB' \| + \| CC' \| = 3 \| GG' \|.$$

2.3. Fie ABC un triunghi, oarecare, $k > 0$ un număr pozitiv. Se consideră punctele $M \in |AB|$, $N \in |AC|$ astfel încît $\frac{\| BM \|}{\| MA \|} + \frac{\| CN \|}{\| NA \|} = k$. Arătați că segmentul $|MN|$ trece printr-un punct fix.

2.4. Fie ABC un triunghi oarecare și D un punct pe latura $|BC|$. O dreaptă taie segmentele $|AB|$, $|AD|$, $|AC|$ în punctele M, O, N. Are loc:

$$\| BD \| \frac{\| CA \|}{\| NA \|} + \| DC \| \frac{\| BA \|}{\| MA \|} = \| BC \| \frac{\| DA \|}{\| OA \|}$$

În particular, dacă D este mijlocul lui $|BC|$, are loc

$$\frac{\| CA \|}{\| NA \|} + \frac{\| BA \|}{\| MA \|} = 2 \cdot \frac{\| DA \|}{\| OA \|}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.5. Fie D un punct situat pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, E intersecția dreptelor AB și CD, F intersecția dreptelor AC și BD. Arătați că $\| BC \|^2 = \| BE \| \cdot \| CF \|$.

(Olimpiada matematică, Beijing, 1963)

2.6. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu diagonalele $| AC |$ și $| BD |$. O dreaptă care trece prin intersecția diagonalelor taie laturile $| AB |$ și $| CD |$ în punctele M și N. Să se arate că

$$\frac{\| MA \|}{\| MB \|} \cdot \frac{\| ND \|}{\| NC \|} \text{ este constant.}$$

(Gh. Dobrotescu)

2.7. Fie ABC un triunghi oarecare. Arătați că există un singur triunghi $A'B'C'$ cu $A' \in | BC |$, $B' \in | AC |$, $C' \in | AB$ astfel încît $A'B'$ și AB sînt antiparalele, $B'C'$ și BC sînt antiparalele, $C'A'$ și CA sînt antiparalele. Precizați triunghiul $A'B'C'$.

2.8. În triunghiul ABC, bisectoarea $| BB' |$ $(B' \in | AC |)$ este paralelă cu tangenta la cercul circumscris triunghiului dusă în punctul T diametral opus lui A. Această tangentă intersectează dreptele AB, AC în D, respectiv E. Să se arate că: a) patrulaterul $BCED$ este inscriptibil. b) $\| BB' \| = \frac{\| BC \| \cdot \| AB \|}{\| AC \|}$. c) B', centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC și mijlocul M al laturii $| BC |$ sînt puncte coliniare.

(Laura Constantinescu)

2.9. În triunghiul oarecare ABC, bisectoarea unghiului BAC taie latura $| BC |$ în D și cercul circumscris triunghiului în K. Să se arate că au loc relațiile:

$$\| AK \|^2 = \| AB \| \cdot \| AC \| + \| AK \| \cdot \| DK \|$$

$$\| AK \|^2 - \| BK \|^2 = \| AD \| \cdot \| AK \|$$

(Mihail Șt. Botez)

Scanned with OKEN Scanner

2.10. În triunghiul ABC se consideră mediana $|AM|$ și bisectoarele unghiurilor $\widehat{AMB}$ și $\widehat{AMC}$ care intersectează pe $|AB|$ în E și pe $|AC|$ în F. a) Să se arate că EF și BC sînt paralele. b) Dacă notăm cu N punctul de intersecție al dreptei AM cu EF. să se arate că $\|MN\|$ este raza cercului circumscris triunghiului EMF.

(Aamitere în facultățile de matematică)

2.11. În triunghiul dreptunghic BAC cu unghiul drept în A, bisectoarea unghiului A intersectează latura $|BC|$ în D, perpendiculara în D pe BC intersectează dreptele AB și AC în E și respectiv F. a) Să se demonstreze că $\|BD\| = \|DF\|$ și $\|CD\| = \|DE\|$. b) Să se demonstreze că simetricul punctului E față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BFC și că simetricul punctului F față de dreapta BC este pe cercul circumscris triunghiului BEC, iar aceste două cercuri sînt congruente. c) Să se arate că unghiurile $\widehat{EBF}$ și $\widehat{ECF}$ sînt congruente si că $\|AE\| \cdot \|BF\| = \|AF\| \cdot \|EC\|$.

(Etapa finală, Olimpiada cl. VIII, 1955)

2.12. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, A' mijlocul arcului $\widehat{BC}$ din cercul circumscris triunghiului. Arătați că $\|A'B\| = \|A'C\| = \|A'I\|$.

2.13. În triunghiul ABC notăm prin O, I centrele cercurilor circumscris și înscris, R și r razele celor două cercuri. Demonstrați relația lui Euler: $\|OI\|^2 = R(R - 2r)$. Deduceți inegalitatea $R \geqslant 2r$ și precizați cînd are loc egalitatea.

2.14. Fie (C_1, O_1), (C_2, O_2), (C_3, O_3) trei certuri care trec prin același punct O. Tangenta în O la C_1 taie C_2 și C_3 în punctele A și respectiv X, tangenta în O la C_2 și C_1 în punctele B și respectiv Y, iar tangenta în O la C_3 taie C_1 și C_2 în punctele C și respectiv Z. Să se arate că $\|OA\| \cdot \|OB\| \cdot \|OC\| = \|OX\| \cdot \|OY\| \cdot \|OZ\|$.

(A.V. Mihai)

2.15. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, O intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$. Să se arate că

$$\|AC\|^2 + \|OB\|^2 + \|OD\|^2 = \|BD\|^2 + \|OA\|^2 + \|OC\|^2.$$

Dacă paralela prin O la CD intersectează dreapta AB în P atunci $\|PO\|^2 = \|PA\| \cdot \|PB\|$.

Scanned with OKEN Scanner

2.16. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$, $C' \in |BA|$ astfel încît $\frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} = \frac{\|CB'\|}{\|BA\|} = \frac{\|AC'\|}{\|C'B\|}$. Fie D simetricul punctului A față de mijlocul segmentului $|A'B'|$, iar M mijlocul segmentului $|BC|$. Arătați că punctele D, M, C' sînt coliniare.

2.17. a) Fie ADC un triunghi oarecare. O secantă intersectează laturile $|AD|$, $|DC|$ și mediana $|DO|$ în punctele M, P și respectiv N. Arătați că are loc relația

$$\frac{\|DA\|}{\|DM\|} + \frac{\|DC\|}{\|DP\|} = 2\frac{\|DO\|}{\|DN\|}.$$

b) Folosind rezultatul, deduceți că dacă o secantă intersectează laturile $|AD|$, $|DC|$ și diagonala $|BD|$ a paralelogramului $ABCD$ în punctele M, P și respectiv N atunci are loc

$$\frac{\|DA\|}{\|DM\|} + \frac{\|DC\|}{\|DP\|} = \frac{\|BD\|}{\|DN\|}.$$

2.18. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC. Dreapta BO intersectează înălțimile $|AA'|$ și $|CC'|$ în S, respectiv L, iar dreapta CO intersectează înălțimile $|AA'|$ și $|BB'|$ în T, respectiv K. Punctul H fiind ortocentrul triunghiului să se arate că:

a) $\frac{\|BL\|}{\|CK\|} = \frac{\|AC'\|}{\|AB'\|} = \frac{\|C'B\|}{\|B'C\|}$;

b) $\|HS\| \cdot \|HT\| = \|LS\| \cdot \|KT\|$.

(Laura Constantinescu)

2.19. Se dă patrulaterul oarecare $ABCD$. Prin vîrfurile B, D se duc dreptele Δ_b, Δ_d paralele la diagonala $|AC|$ și se notează $M_0 = \Delta_b \cap DC$, $N_0 = \Delta_b \cap DA$, $P_0 = \Delta_d \cap BA$, $Q_0 = \Delta_d \cap BC$.

a) Să se demonstreze că dreptele N_0P_0 și M_0Q_0 se întîlnesc pe diagonala BD a patrulaterului dat. b) Să se arate că are loc relația:

$$\frac{1}{\|M_0N_0\|} + \frac{1}{\|P_0Q_0\|} = \frac{1}{\|AC\|};$$

c) Presupunînd că dreptele Δ_b și Δ_d se rotesc în jurul punctelor B, respectiv D, rămînînd paralele, ele determină pe DC și DA punctele M și N, iar pe BA și BC punctele P și Q. Determinați locul geometric al intersecției diagonalelor trapezului $MNPQ$.

(Gh. D. Simionescu)

2.20. a) Fie M și N două puncte în planul unghiului xOy, M' și N' proiecțiile ortogonale ale punctelor M și N pe Ox, iar M'' și N'' proiecțiile lor pe Oy. Demonstrați că o condiție necesară și suficientă ca dreptele OM și ON să fie simetrice față de bisectoarea unghiului xOy este ca $\frac{\| MM' \|}{\| NN'' \|} = \frac{\| MM'' \|}{\| NN' \|}$. b) Deduceți că dacă cevienele AA', BB', CC' sînt concurente în triunghiul ABC, atunci simetricele acestora față de bisectoarele interioare unghiurilor A, B, C sînt concurente. (În particular, simetricele medianelor față de bisectoarele unghiurilor respective — numite simediane — sînt concurente, în punctul lui Lemoine.)

2.21. În triunghiul ABC înălțimea $|AA'|$, $A' \in BC$, intersectează cercul circumscris triunghiului în T, tangenta în T la acest cerc intersectează dreapta BC în S, diametrul ce trece prin A taie pe BC în E, iar AS și TE intersectează cercul în G, respectiv F. Să se arate că: a) AA' și FG sînt perpendiculare; b) $\| AE \| \cdot \| AT \| = \| AB \| \cdot \| AC \|$.

(Laura Constantinescu)

2.22. Pe dreapta (d) se iau punctele O, O', B, B' astfel ca $\| BB' \| = k \cdot \| OO' \|$, $k > 1$, fixat. Se construiesc triunghiurile OPB și $O'P'B'$ astfel încît OP este paralelă cu $O'P'$, iar PB cu $P'B'$. Arătați că dreapta PP' trece printr-un punct fix.

(Dana Băcanu)

2.23. Spre exteriorul triunghiului ABC se construiesc unghiurile $\widehat{BAB_1}$ și $\widehat{CAC_1}$ de măsuri 30° și $\widehat{BB_1A}$, $\widehat{CC_1A}$ de măsuri 60°, iar spre interiorul triunghiului unghiurile $\widehat{CBA_1}$, $\widehat{BCA_1}$ de măsuri 30°. Dacă A_2 este în exteriorul triunghiului

Scanned with OKEN Scanner

astfel că triunghiul BCA_2 este echilateral, arătați că: a) Punctele B_1, A_1, C_1 sînt coliniare; b) $\| B_1A_1 \| = \| A_1C_1 \|$; c) Dreptele AA_2 și B_1C_1 sînt perpendiculare.

(I. Hadîrcă)

2.24. Fie ABC un triunghi oarecare. Pe dreapta BC se consideră un punct A'. Perpendiculara în A pe dreapta AA' intersectează perpendicularele în C și B pe BC în C' și respectiv B'. a) Arătați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea. b) Determinați locurile geometrice ale mijloacelor laturilor triunghiului $A'B'C'$ cînd A' parcurge dreapta BC.

2.25. a) Dacă două triunghiuri au înălțimile proporționale atunci ele sînt asemenea. b) Dacă două triunghiuri au medianele proporționale, atunci ele sînt asemenea.

2.26. În triunghiul ABC se notează cu B_1 proiecția lui B pe AC și cu C_1 proiecția lui C pe AB. Paralela prin C la BB_1 intersectează dreapta AB în B_2, iar paralela prin B la CC_1 intersectează pe AC în C_2. Fie M mijlocul lui $|BC|$ și N mijlocul lui $|B_2C_2|$. a) Să se arate că MN este perpendiculară pe BC, iar B_2C_2 este paralelă cu B_1C_1. b) Să se deducă relația: $\| BC \|^2 = \| B_1C_1 \| \cdot \| B_2C_2 \|$.

2.27. Fie un unghi xAy și $[Az$ o semidreaptă interioară unghiului, I un punct oarecare pe $[Az$. Prin I se duce o dreaptă mobilă care intersectează laturile Ax și Ay în punctele M și N, iar perpendiculara în I pe Az intersectează pe Ax și Ay în B, respectiv C. Prin I se duce paralela IP la AB și paralela IQ la AC, $P \in AC$, $Q \in AB$. Să se arate că:

a) $\dfrac{\| IP \|}{\| AM \|} + \dfrac{\| IQ \|}{\| AN \|} = \text{constant.}$

b) Dacă I este pe bisectoarea unghiului xAy atunci

$$\frac{1}{\| AM \|} + \frac{1}{\| AN \|} = \frac{2}{\| AB \|}.$$

2.28. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare și O un punct în planul acestuia. Două drepte care trec prin O, (d_1) și (d_2) intersectează pe AB și DC în punctele M și N (situate pe d_1),

Scanned with OKEN Scanner

respectiv pe AD și BC în P și Q (situate pe d_2). Să se demonstreze relațiile:

$$\frac{\|MN\|}{\|MO\|}+\frac{\|ND\|}{\|NC\|}\cdot\frac{\|BC\|}{\|BQ\|}=\frac{\|AD\|}{\|AP\|}+\frac{\|ND\|}{\|NC\|}\cdot\frac{\|MN\|}{\|MO\|}\cdot$$

$$\frac{\|ND\|}{\|NC\|}\cdot\frac{\|BC\|}{\|BQ\|}-\frac{\|MA\|}{\|MB\|}\cdot\frac{\|AD\|}{\|AP\|}=\frac{\|ND\|}{\|NC\|}-\frac{\|MA\|}{\|MB\|};$$

$$\frac{\|ND\|}{\|NC\|}\cdot\frac{\|BC\|}{\|BQ\|}=\frac{\|OP\|}{\|OQ\|}\cdot\frac{\|AD\|}{\|AP\|}\cdot$$

(C.T. Nedelcu)

2.29. Fie un cerc de centru O și rază R și A un punct interior cercului. Dacă M este un punct oarecare pe cerc și A' inversul lui A față de cerc, să se arate că: a) Triunghiurile OAM și $OA'M$ sînt asemenea și $\frac{\|MA\|}{\|MA'\|}=$ const.; b) Bisectoarea interioară a unghiului AMA' trece printr-un punct fix C și să se calculeze distanța $\|OC\|$ în funcție de $\|OA\|=a$ și $\|OA'\|=b$.

2.30. Fie trapezul $ABCD$ cu $|AB| \parallel |CD|$. Pe latura $|AD|$ se ia punctul P iar pe $|BC|$ punctul Q astfel încît $|AQ| \parallel |PC|$. Să se arate că $|PB| \parallel |DQ|$.

(Olimpiada din Olanda, 1971)

2.31. În triunghiul ABC se consideră o paralelă la $|BC|$ care intersectează pe $|AB|$ în D și pe $|AC|$ în E, iar înălțimea $|AA'|$ în F. Paralele duse prin F la $|AB|$ și $|AC|$ intersectează respectiv pe $|BE|$ și $|CD|$ în P și Q. Să se demonstreze că $EPA'Q$ este paralelogram.

(G.M.E., 4420, Th. Cocea)

2.32. Fie triunghiul ABC și D, E, F punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris. Pe $|BA|$ și $|CA|$ ducem spre A o lungime $\|BP\|=\|CQ\|=\|BC\|$. Paralelele duse prin E și F la $|FD|$ și $|ED|$ se intersectează în M. să se arate că M aparține dreptei PQ.

(G.M., XXX)

2.33. Fie triunghiul isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$) și un punct oarecare D pe $|BC|$. Se proiectează D pe $|AC|$ în

E și E pe $|AB|$ în F. Să se arate că $\|AB\| \cdot \|CD\| \cdot \|EF\| = \|BC\| \cdot \|DE\| \cdot \|AE\|$ și $\|CE\| \cdot \|EF\| = \|DE\|(\|AE\| - \|AF\|)$.

(G.M., E: 5012, I. Safta)

2.34. Se dă un triunghi ABC, o dreaptă CH care întîlnește pe $|AB|$ în H și o paralelă la $|AB|$ variabilă care intersectează pe $|AC|$ în A' și pe $|CB|$ în B'. Prin B se duce o secantă care intersectează pe $|CH|$ în S pe $|CA|$ în D și pe $|A'B'|$ în P. Pe paralela la CH dusă prin P se ia un punct $|Q|$ așa încît $|PQ|$ să fie împărțit de paralela $|CR|$ la $|AB|$ în raportul $\frac{\|PR\|}{\|RQ\|} = \frac{\|HA\|}{\|HB\|}$.

a) Să se demonstreze că dreapta QD împarte pe $|SA|$ într-un raport independent de H și de $|BS|$.

b) Să se demonstreze că locul geometric al lui Q cînd $|BS|$ și $|A'B'|$ rămîn fixe și H este variabil este o paralelă la CA.

c) Să se determine locul geometric al lui Q cînd $|BS|$ și H sînt fixe, iar $|A'B'|$ este variabil.

2.35. Fie un triunghi oarecare ABC, H ortocentrul său A', B', C' picioarele înălțimilor. Notăm prin A_1, B_1, C_1 intersecțiile dreptelor AA', BB', CC' cu cercul circumscris (o).

a) Să se arate că A_1, B_1, C_1 sînt simetricele lui H în raport cu laturile $|BC|$, $|CA|$ și $|AB|$.

b) Să se arate că OA, OB și OC sînt perpendiculare pe $B'C'$. $C'A'$, $A'B'$.

c) Dacă A'', B'', C'' sînt proiecțiile lui H pe $|B'C'|$, $|C'A'|$ și $|A'B'|$ să se arate că triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sînt asemenea.

2.36. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Pe $|BC|$ se iau punctele M și N simetrice față de mijlocul său. Paralelele duse prin M și N la $|AC|$ intersectează pe $|AB|$ în M' și N', iar paralelele duse prin M și N la $|AB|$ intersectează pe $|AC|$ în M'' și N''. Să se determine locul geometric al intersecției dreptelor $M'M''$ și $N'N''$ cînd M și N își schimbă poziția pe $|BC|$ rămînînd simetrice față de centrul său.

(Gh. Țițeica)

Scanned with OKEN Scanner

2.37. Fie paralelogramul $ABCD$ și O punctul de intersecție al diagonalelor. Se consideră punctele $E \in |AB|$, $F \in |AD|$ și $M \in |AB|$ cu $|AM| \equiv |MB|$. Se duc dreptele $|FH| \parallel |AB|$, $|EG| \parallel |AD|$ și $|OR| \perp |AB|$ cu $R \in |AB|$. Să se arate că: a) dreptele BF, DE și CI se întîlnesc în același punct, unde I este punctul de intersecție a lui $|FH|$ cu $|EG|$. b) dacă perpendiculara în M pe $|AB|$ intersectează diagonalele $|BD|$ și $|AC|$ în P și Q atunci avem relația

$$\frac{1}{\|MQ\|} + \frac{1}{\|MP\|} = \frac{2}{\|OR\|}.$$

2.38. Se dă patrulaterul $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Bisectoarea unghiului AOB intersectează laturile opuse $|AB|$ și $|CD|$ în E și F. Fie M un punct oarecare pe diagonala $|AC|$. Prin M se duc $|MP| \parallel |AB|$ ($P \in |BC|$) și $|MQ| \parallel |CD|$, ($Q \in |AD|$). Se cere să se demonstreze următoarele relații:

a) $$\frac{\dfrac{1}{\|OE\|}}{\dfrac{1}{\|OF\|}} = \frac{\dfrac{1}{\|OA\|} + \dfrac{1}{\|OB\|}}{\dfrac{1}{\|OC\|} + \dfrac{1}{\|OD\|}}$$

b) $$\frac{\|MP\|}{\|AB\|} + \frac{\|MQ\|}{\|CD\|} = 1.$$

Capitolul 3

RELAȚII METRICE

3.1. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele P, Q pe latura $|BC|$ astfel ca $|BP| \equiv |PQ| \equiv |QC|$. Se consideră A_1 al treilea vîrf al triunghiului echilateral PQA_1, situat în exteriorul triunghiului ABC. Se construiesc în mod analog punctele B_1 și C_1. Arătați că triunghiul $A_1B_1C_1$ este echilateral. (Această problemă este atribuită lui Napoleon.)

3.2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul H. Se iau pe direcțiile înălțimilor în sens opus față de vîrfuri segmentele $|HA'| \equiv |BC|$, $|HB'| \equiv |AC|$, $|HC'| \equiv |AB|$. Arătați că: a) laturile triunghiului $A'B'C'$ au lungimile egale cu dublul lungimilor medianelor triunghiului ABC. b) aria triunghiului $A'B'C'$ este de trei ori mai mare decît aria triunghiului ABC. c) Dreptele $A'H$, $B'H$, $C'H$ trec prin mijloacele segmentelor $|B'C'|$, $|C'A'|$, $|A'B'|$.

(Concurs de admitere, Fac. mat-mec., 1969).

3.3. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct pe segmentul $|BC|$. Arătați că $\|AM\|^2 \cdot \|BC\| = \|AB\|^2 \cdot \|MC\| + \|AC\|^2 \cdot \|MB\| - \|BC\| \cdot \|MB\| \cdot \|MC\|$. *(Relația lui Stewart.)*

3.4. Fie ABC un triunghi oarecare, G centrul său de greutate. Atunci, pentru orice punct M din planul triunghiului are loc relația:

$$3 \cdot \|MG\|^2 = \|MA\|^2 + \|MB\|^2 + \|MC\|^2 - \frac{1}{3}(\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2).$$ *(Teorema lui Leibniz.)*

3.5. Fie A', B', C' punctele în care medianele triunghiului ABC de lungimi respectiv m_a, m_b, m_c întîlnesc a doua oară cercul circumscris triunghiului. Notînd cu a', b', c' lungimile segmentelor $|B'C'|$, $|C'A'|$, $|A'B'|$ să se demonstreze că: $\frac{a \cdot m_b}{a' \cdot m_c} + \frac{b \cdot m_c}{b' \cdot m_a} + \frac{c \cdot m_a}{c' \cdot m_b} = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

3.6. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Să se găsească locul geometric al punctelor din planul patrulaterului pentru care $\| MA \|^2 + \| MC \|^2 = \| MB \|^2 + \| MD \|^2$. Să se arate că dacă există trei puncte necoliniare care satisfac relația, atunci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

3.7. În patrulaterul convex $ABCD$, fie E și F mijloacele diagonalelor $| AC |$ și $| BD |$. Are loc relația lui Euler:

$$\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CD \|^2 + \| DA \|^2 = \| AC \|^2 + \\ + \| BD \|^2 + 4 \cdot \| EF \|^2.$$

Deduceți de aici că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CD \|^2 + \\ + \| DA \|^2 = \| AC \|^2 + \| BD \|^2$.

3.8. Fie D și E proiecțiile vîrfului A al triunghiului ABC pe bisectoarele (interioare sau exterioare) ale unghiurilor B, C, iar I intersecția acestor bisectoare. Atunci are loc relația

$$\| BD \| \cdot \| CI \| = \| CE \| \ \| BI \|.$$

(Laura Constantinescu)

3.9. O dreaptă arbitrară (d) taie două cercuri în punctele A, B, C, D și axa lor radicală în O. Să se arate că

$$\frac{\| OA \|}{\| OB \|} \cdot \frac{\| OD \|}{\| OC \|} = \frac{\| AD \|^2}{\| BC \|^2}$$

(Ionel Atanasiu)

3.10. Fiind dat triunghiul ABC dreptunghic în C, să se determine mulțimea tuturor punctelor P din spațiu pentru care $\| PA \|^2 + \| PB \|^2 = \| PC \|^2$

(Olimpiada din R.D. Germană, 1982)

3.11. Fie ABC un triunghi isoscel, $| AB | \equiv | AC |$, $| AD |$ mediana laturii $| BC |$, $| DE |$ perpendiculara din D pe AC, F mijlocul segmentului $| DE |$. Să se arate că AF este perpendiculară pe BE.

3.12. Fie $| AB |$ un segment dat. Să se găsească locul geometric al punctului M pentru care $\frac{\| MA \|}{\| MB \|} = k$ (k este o constantă pozitivă).

Scanned with OKEN Scanner

3.13. Fie A_1 și A_2 două puncte fixe. Să se găsească locul geometric al punctelor M dintr-un plan care conține dreapta A_1A_2 avînd proprietatea $\| MA_1 \|^2 + \| MA_2 \|^2 = k^2$ (constantă pozitivă). Mai general, fiind date punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ într-un plan, să se găsească locul geometric al punctelor M din plan pentru care

$$\| MA_1 \|^2 + \| MA_2 \|^2 + \ldots + \| MA_n \|^2 = k^2.$$

3.14. Triunghiul ABC înscris în cercul $\mathcal{C}(0, R)$ are vîrful A fix, iar lungimile laturilor sale verifică relația $b^2 + c^2 - a^2 = k^2$, $k < 2R\sqrt{2}$, unde k este constantă. a) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $|BC|$. b) Să se afle locul geometric al piciorului înălțimii coborîte din A pe latura $|BC|$.

3.15. În triunghiul ABC, fie punctele M și N pe latura $|BC|$ astfel că dreptele AM și AN sînt simetrice față de bisectoarea unghiului A (dreptele AM și AN se numesc izogonale). Demonstrați relația lui Steiner

$$\frac{\| CN \|}{\| BN \|} \cdot \frac{\| CM \|}{\| BM \|} = \frac{\| AC \|^2}{\| AB \|^2}.$$

În particular, dacă $|AM|$ este mediana din A, $|AN|$ se numește simediana corespunzătoare vîrfului A. Are loc relația

$$\frac{\| NB \|}{\| NC \|} = \frac{\| AB \|^2}{\| AC \|^2}$$

3.16. Să se demonstreze că simediana din A este locul geometric al punctelor ale căror distanțe la dreptele AB și AC sînt proporționale cu lungimile $\| AB \|$ și $\| AC \|$. Simediana din A este locul geometric al mijloacelor antiparalelelor la BC (față de $\hat{A}$).

3.17. a) Fie A_1, B_1, C_1 puncte situate pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului ABC. Demonstrați că o condiție necesară și suficientă ca perpendicularele în A_1 pe BC, în B_1 pe CA și în C_1 pe AB să fie concurente este

$$\| A_1B \|^2 - \| A_1C \|^2 + \| B_1C \|^2 - \| B_1A \|^2 + \| C_1B \|^2 - \| C_1A \|^2 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$, perpendicularele din A pe $B'C'$, din B pe $C'A'$, din C pe $A'B'$ sînt concurente dacă și numai dacă perpendicularele din A' pe BC, din B' pe CA, din C' pe AB sînt concurente (două triunghiuri cu această proprietate se numesc triunghiuri ortologice). c) Deduceți că perpendicularele din vîrfurile A, B, C ale triunghiului ABC pe laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ale triunghiului ortic sînt concurente. d) În triunghiul ABC fie A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor unghiurilor triunghiului. Demonstrați că perpendicularele în A_1 pe BC, în B_1 pe CA, în C_1 pe AB sînt concurente dacă și numai dacă triunghiul ABC este isoscel.

3.18. Un dreptunghi se numește circumscris unui triunghi dacă una din laturile lui coincide cu o latură a triunghiului și latura opusă trece prin al treilea vîrf al triunghiului. Fie A_1, B_1, C_1 centrele dreptunghiurilor circumscrise triunghiului ABC care au ca latură pe $|BC|$, $|CA|$, respectiv $|AB|$. Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 taie laturile triunghiului ABC în A_2, B_2, C_2. Arătați că perpendicularele în A_2, B_2, C_2 pe laturile triunghiului ABC sînt concurente.

3.19. Însemnînd cu d_a, d_b, d_c distanțele unui punct M de pe cercul circumscris la laturile triunghiului ABC și cu d'_a, d'_b, d'_c distanțele la tangentele în A, B, C la același cerc, să se arate că

$$d_a \cdot d_b \cdot d_c = d'_a \cdot d'_b \cdot d'_c$$

(I. Hadîrcă)

3.20. Fie M un punct oarecare pe latura $|AB|$ a triunghiului ABC. Notînd prin r_1, r_2, r lungimile razelor cercurilor înscrise în triunghiurile AMC, BMC și ABC, iar prin ρ_1, ρ_2, ρ lungimile razelor cercurilor situate în interiorul unghiului $\widehat{ACB}$ și exînscrise, respectiv, triunghiurilor AMC, BMC și ABC, să se arate că

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}$$

(O.I.M., 1970)

3.21. Produsul distanțelor unui punct oarecare de pe cerc la două laturi opuse ale unui patrulater înscris în acel cerc este egal cu produsul distanțelor acestui punct la celelalte două laturi opuse și cu produsul distanțelor acestui punct la diagonalele patrulaterului. *(Teorema lui Pappus.)*

Scanned with OKEN Scanner

3.22. Într-un patrulater inscriptibil, produsul lungimilor diagonalelor este egal cu suma produselor lungimilor laturilor opuse. *(Teorema lui Ptolemeu.)*

3.23. În patrulaterul convex inscriptibil $ABCD$ are loc

$$\frac{\|AC\|}{\|BD\|} = \frac{\|AB\| \cdot \|AD\| + \|CB\| \cdot \|CD\|}{\|BA\| \cdot \|BC\| + \|DA\| \cdot \|DC\|}$$

(A doua teoremă a lui Ptolemeu)

3.24. Fie $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ bisectoarele interioare ale unui triunghi oarecare ABC, I centrul cercului înscris (A_1 pe $|BC|$ etc.).

Arătați că următoarele afirmații sînt echivalente:

a) Triunghiul ABC este echilateral;

b) $\dfrac{\|AI\|}{\|IA_1\|} + \dfrac{\|BI\|}{\|IB_1\|} + \dfrac{\|CI\|}{\|IC_1\|} = 6;$

c) $\dfrac{\|AI\|}{\|IA_1\|} \cdot \dfrac{\|BI\|}{\|IB_1\|} \cdot \dfrac{\|CI\|}{\|IC_1\|} = 8.$

(Alexandru Blaga)

3.25. Fie ABC un triunghi, $D \in |BC|$ și $k = \dfrac{\|CD\|}{\|CB\|}$. Să se demonstreze că $\|AD\| < k \cdot \|AB\| + (1-k)\|AC\|$, iar dacă $|AD|$ este bisectoarea interioară a unghiului A, atunci $\dfrac{2}{\|AD\|} > \dfrac{1}{\|AB\|} + \dfrac{1}{\|AC\|}$.

(Titu Andreescu)

3.26. Fie C', B' punctele diametral opuse vîrfurilor C și B ale triunghiurilor ABC în cercul circumscris triunghiului. În C' și B' se duc tangentele la acest cerc și fie $\|DF\|$ și $\|DE\|$ distanțele de la piciorul D al bisectoarei $|AD|$ la aceste tangente. Arătați că

$$\frac{\|DE\|}{\|DF\|} = \frac{\|AB\| + \|AC\| \cos^2 A}{\|AC\| + \|AB\| \cos^2 A}$$

(Laura Constantinescu)

3.27. Fie ABC un triunghi oarecare, P un punct în interiorul triunghiului, $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap AC$,

Scanned with OKEN Scanner

$C_1 = CP \cap AB$. Cunoscînd $\frac{\| PA_1 \|}{\| AA_1 \|} = \alpha$, $\frac{\| PB_1 \|}{\| BB_1 \|} = \beta$ $\frac{\| PC_1 \|}{\| CC_1 \|} = \gamma$ arătați că: a) $\alpha + \beta + \gamma = 1$. b) $\frac{\| BA_1 \|}{\| CA_1 \|} = \frac{\gamma}{\beta}$; $\frac{\| CB_1 \|}{\| AB_1 \|} = \frac{\alpha}{\gamma}$; $\frac{\| AC_1 \|}{\| BC_1 \|} = \frac{\beta}{\gamma}$. c) M fiind un punct oarecare din planul triunghiului (sau din spațiu) are loc relația $\| MP \|^2 = \alpha \| MA \|^2 + \beta \| MB \|^2 + \gamma \| MC \|^2 - \alpha\beta \| AB \|^2 - \beta\gamma \| BC \|^2 - \gamma\alpha \| CA \|^2$ care generalizează relația lui Leibniz (vedeți problema 3.4).

3.28. Să se arate că într-un trapez $ABCD$, neisoscel, avînd laturile $| AB |$ și $| CD |$ paralele au loc relațiile:

$$\frac{\| AC \|^2 - \| BD \|^2}{\| AD \|^2 - \| BC \|^2} = \frac{\| AB \| + \| CD \|}{\| AB \| - \| CD \|}$$

$$\| AC \|^2 + \| BD \|^2 = \| AD \|^2 + \| BC \|^2 + 2 \cdot \| AB \| \cdot \| CD \|$$

(Dorin Andrica)

3.29. În trapezul $ABCD$, proiecțiile punctului B pe diagonala $| AC |$ și pe latura $| DC |$ se notează cu F și respectiv E. Presupunînd că laturile paralele sînt $| AD |$ și $| BC |$ și $\| AD \| < \| BC \|$, să se arate că $\| AC \| \cdot \| CF \| = \| CB \| \cdot \| DA \| + \| CD \| \cdot \| CE \|$.

3.30. În triunghiul echilateral ABC, se consideră punctul M pe dreapta AB astfel încît $\| BM \| = \| AB \|$ și să se realizeze ordinea A, B, M. a) Să se demonstreze că $\| MB \|^2 + \| MC \|^2 = \| MA \|^2$. b) Bisectoarele unghiurilor triunghiului AMC se intersectează în P. Arătați că $\| PB \|^2 + \| PC \|^2 = \| PA \|^2$. c) Calculați raza cercului înscris în triunghiul AMC. d) Fie O proiecția punctului M pe dreapta AP; pe dreapta AO se consideră punctul N, cu ordinea A, O, N și astfel ca $\| ON \| = \| AB \|$. Să se arate că $\| NB \|^2 + \| NC \|^2 = \| NA \|^2$ și că $\| MC \| = \| AO \| = \| OB \| \cdot \sqrt{3}$.

(C. Ionescu-Țiu)

3.31. Pe latura $| BC |$ a triunghiului ABC se consideră un punct P astfel încît $\| BP \| = k \cdot \| PC \|$. a) Să se arate că lungimea segmentului $| AP |$ este dată de $\| AP \| = \frac{1}{1+k} \sqrt{(1+k)(c^2 + kb^2) - ka^2}$. b). Să se determine

k, în funcție de a, b, c astfel încît $|AP|$ să fie înălțimea din A a triunghiului. c) Precizîndu-se k, să se regăsească formulele de calcul a lungimii medianei și a lungimii bisectoarei.

3.32. Se dă un triunghi oarecare ABC și fie A', B', C' picioarele înălțimilor din A, B, C. Perpendicularele din A' pe AC și respectiv AB intersectează dreapta $B'C'$ în punctele B'' și C''. Să se arate că: a) B'' și C'' sînt simetricele punctului A' față de laturile AC și respectiv AB. b) Se consideră punctele arbitrare $M \in AB$ și $N \in AC$. Arătați că perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este mai mic decît perimetrul triunghiului $A'MN$. c) Notînd prin I intersecția dreptelor AA' și $B''C''$ să se demonstreze relația: $\|IB'\| \cdot \|IC''\| = \|IC'\| \cdot \|IB''\| = \|IA\| \cdot \|IA'\|$.

3.33. Pe diametrul $|AB|$ al unui cerc cu centrul O se consideră un punct P, iar pe cerc se ia punctul M. Perpendiculara în M pe dreapta PM intersectează tangentele în A și B la cerc în punctele C și, respectiv D. a) Să se arate că $\|MP\|^2 = \|MC\| \|MD\|$. b) Tangenta în M la cerc intersectează tangentele AC și BD în punctele C' și respectiv D'. Arătați că $\|C'D'\| = \|AC'\| + \|BD'\|$. c) I fiind intersecția dreptelor AD' și perpendiculara din M pe AB, are loc $\|MI\| = \|NI\|$ (N — proiecția lui M pe $|AB|$).

3.34. Fie $|AB|$ un diametru într-un cerc. Pe tangenta în A la cerc se consideră punctele M și N, situate de o parte și cealaltă a lui A. Dreapta BM retaie cercul în punctul P, iar dreapta BN retaie cercul în punctul Q. Să se arate că: a) Unghiurile $\widehat{BMA}$ și $\widehat{PQB}$ sînt congruente. b) Patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. c) Să se arate că $\|MP\| \cdot \|MB\| - \|NQ\| \cdot \|NB\| = \|MB\|^2 - \|NB\|^2$.

3.35. Bisectoarele interioare unghiurilor triunghiului ABC intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'. Fie M intersecția dreptelor $A'C'$, BC; N intersecția dreptelor $A'B'$, BC; P intersecția dreptelor $A'B'$, AC; Q intersecția dreptelor $B'C'$, AC; R intersecția dreptelor $B'C'$, AB; S intersecția dreptelor $A'C'$, AB. Să se arate că: a) Dreptele MQ, NR, PS sînt concurente. b) Are loc $2\|MN\| = \frac{\|IB\|^2}{\|AB\|} + \frac{\|IC\|^2}{\|AC\|}$ și analoagele, I fiind centrul cercului înscris triunghiului.

(Laura Constantinescu)

Scanned with OKEN Scanner

3.36. Dacă într-un patrulater convex lungimea segmentului care unește mijloacele a două laturi opuse este egală cu semisuma lungimilor celorlalte laturi, atunci patrulaterul este trapez.

3.37. Mediana $|AA'|$ intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctul A'' și notăm $d_a = \|AA''\|$. Fie d_b, d_c analoagele. Dacă m_a, m_b, m_c semnifică lungimile medianelor triunghiului ABC, atunci are loc $m_a d_a + m_b \cdot d_b + m_c \cdot d_c = a^2 + b^2 + c^2$.

3.38. Fie ABC și DBC două triunghiuri echilaterale de latură a simetrice față de BC și P un punct pe cercul circumscris triunghiului DBC. Arătați că $\|PA\|^2 - 2\|PB\| \cdot \|PC\| = a^2$ sau $\|PA\|^2 + 2\|PB\| \cdot \|PC\| = a^2$, după poziția punctului P pe cercul DBC.

(E. Rogai)

3.39. Din punctul A, exterior unui cerc dat, se duc tangentele $|AB|$ și $|AC|$ la cerc. Paralela prin C la AB intersectează cercul în D, AD intersectează cercul în E, BE intersectează paralela prin A la tangenta în E la cerc în F, iar CE intersectează aceeași paralelă în C și pe AB în M. Să se arate că: a) Patrulaterul $BCFG$ este inscriptibil. b) Dreptele BG și BF sînt perpendiculare; la fel dreptele CF și CG sînt perpendiculare. c) Există relațiile:

$$2(\|ME\|^2 + \|MB\|^2) = \|BE\|^2 + \|AE\|^2;$$
$$2(\|MB\|^2 + \|MC\|^2) = \|AB\|^2 + \|BC\|^2;$$
$$\|CE\|^2 + 2\|MA\|^2 = \|MC\|^2 + \|ME\|^2;$$
$$\|BG\|^2 + 2\|MA\|^2 = 2\|GM\|^2;$$
$$2(\|MG\|^2 + \|MA\|^2) + \|BF\|^2 = 5\|AG\|^2$$

(Gh. Bostan)

3.40. Fie ABC un triunghi oarecare, A_1 și A_2 picioarele bisectoarelor (interioară și exterioară) ale unghiului A, B_1 și B_2, C_1 și C_2 analoagele. Folosind rezultatul din 3.12, arătați că cercurile de diametre $|A_1A_2|$, $|B_1B_2|$, $|C_1C_2|$ au două puncte comune (fac parte dintr-un fascicul de cercuri). Deduceți apoi că mijloacele segmentelor $|A_1A_2|$, $|B_1B_2|$, $|C_1C_2|$ sînt coliniare.

3.41. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M un punct pe diagonala $|AC|$. Paralele prin M la AB și DC intersectează

Scanned with OKEN Scanner

pe BC în P și respectiv pe AD în Q. a) Arătați că $\| MP \|^2 + \| MQ \|^2 \geq \frac{\| AB \|^2 \| DC \|^2}{\| AB \|^2 + \| DC \|^2}$. În ce caz are loc egalitatea? b) Determinați locul geometric al mijlocului segmentului $| PQ |$ cînd M parcurge segmentul $| AC |$.

(D. Buşneag)

3.42. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M un punct în planul patrulaterului. Să se demonstreze că

$$2(\| MA \|^2 + \| MB \|^2 + \| MC \|^2 + \| MD \|^2) \geq \| AC \|^2 + \| BD \|^2 + \| EF \|^2$$

unde E și F sînt mijloacele diagonalelor $| AC |$ și $| BD |$.

(Marcel Chiriță)

3.43. În triunghiul ABC, medianele $| AD |$ și $| BE |$ sînt perpendiculare în punctul G, F este mijlocul laturii $| AB |$, iar M, N și P sînt proiecțiile punctului G pe laturile $| BC |$, $| CA |$ și respectiv $| AB |$. Să se arate că există relațiile:

a) $\| BC \|^2 + \| AC \|^2 = 5 \cdot \| AB \|^2$.

b) $2(\| GD \|^2 + \| GE \|^2 + \| GF \|^2) = \| AB \|^2$.

(Gh. Bostan)

3.44. Notînd cu α_1 și α_2 unghiurile formate de mediana din vîrful A al triunghiului ABC cu laturile $| AB |$ și $| AC |$, cu β_1 și β_2 unghiurile medianei din B cu laturile $| BC |$ și $| BA |$, iar cu γ_1 și γ_2 unghiurile formate de mediana din C cu laturile $| CA |$ și $| CB |$, să se arate că are loc relația

$$\frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2} = 1.$$

(M. Băghină)

3.45. Fie M un punct oarecare pe cercul circumscris unui triunghi echilateral ABC, iar N un punct pe cercul înscris acestuia. Să se arate că

$$\frac{\| MA \|^2 + \| MB \|^2 + \| MC \|^2}{\| NA \|^2 + \| NB \|^2 + \| NC \|^2} = \frac{8}{5}.$$

(Ștefan Musta)

Scanned with OKEN Scanner

3.46. Fie A_1, A_2, A_3, A_4 patru puncte distincte în plan, nesituate pe un același cerc și oricare trei necoliniare. Fie C_1 cercul determinat de punctele A_2, A_3, A_4; C_2 cercul determinat de A_1, A_3, A_4; C_3 cercul determinat de A_1, A_2, A_4 și C_4 cercul determinat de A_1, A_2, A_3. Dacă notăm prin p_i puterea punctului A_i față de cercul C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, atunci are loc: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$ și $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = 0$.

(Gh. Albu)

3.47. Se dă triunghiul ABC dreptunghic în A. Bisectoarea unghiului ABC intersectează latura $|AC|$ în D. În C se duce $|CE| \perp |AC|$ cu $\|CE\| = \|BC\|$. Să se arate că: a) Punctele B, D, E sînt coliniare; b) $\triangle CEE' \equiv \triangle ABC$, $(|EE'| \perp |BC|)$; c) $\frac{\|AD\|^2 + \|DC\|^2}{2\|AB\|^2 + \|AC\|^2} = \frac{\|DC\|^2}{\|CE\|^2}$; d) $\|AE\|^2 = 2\|AC\|^2 + \|AB\|^2$.

(M. Șt. Botez)

3.48. Să se afle locul geometric al proiecției ortocentrului unui triunghi ABC pe mediana corespunzătoare vîrfului A, știind că punctele B și C sînt fixe și că suma pătratelor lungimilor medianelor triunghiului este constantă.

(G. Țițeica)

3.49. Bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi ABC intersectează cercul circumscris triunghiului în A', B', C'. $|AC|$ intersectează pe $|A'B'|$ și $|B'C'|$ în P respectiv Q, $|AB|$ intersectează pe $|B'C'|$ și $|A'C'|$ în R respectiv S, iar $|BC|$ intersectează pe $|A'C'|$ și $|A'B'|$ în M respectiv N. Să se arate că

a) Dreptele MQ, NR, PS sînt concurente.

b) Dacă I este centrul cercului înscris triunghiului avem $2\|MN\| = \frac{\|IB\|^2}{\|AB\|} + \frac{\|IC\|^2}{\|AC\|}$ și cele analoage.

(G.M.B. 11 421, L. Constantinescu)

3.50. Să se demonstreze că în patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare avem relația

$$(\|AB\| - \|AD\|)(\|BC\| - \|CD\|) = \|ED\|(2R - \|AC\|).$$

unde R este raza cercului circumscris.

Scanned with OKEN Scanner

3.51. În patrulaterul $ABCD$ laturile opuse $|AB|$ și $|CD|$ sînt perpendiculare și se întîlnesc în punctul P. Fie $|EF|$ și $|GH|$ segmentele care unesc mijloacele laturilor $|AB|$, $|CD|$, respectiv $|BC|$ și $|AD|$. Să se arate că avem următoarele relații:

a) $\|AD\|^2 + \|BC\|^2 = \|AC\|^2 + \|BD\|^2 = 2[\|EF\|^2 + \|GH\|^2]$.

b) $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 = 4\|GH\|^2$.

c) Dacă $ABCD$ este inscriptibil atunci avem relația $(\|AC\| + \|BD\|)^2 - (\|AD\| + \|BC\|)^2 = 2\|AB\| \cdot \|CD\|$.

3.52. Fie paralelogramul $ABCD$ și E un punct variabil pe latura $|AB|$.

a) Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor DAE și ECB se intersectează a doua oară într-un punct F situat pe latura $|CD|$ a paralelogramului.

b) Dacă I este intersecția dreptei EC cu cercul circumscris triunghiului DAE, iar J intersecția dreptei AF cu cercul circumscris triunghiului ECB să se arate că $\triangle AID \cup \cup \triangle BJC$ și $\|EF\|^2 = \|AI\| \cdot \|CJ\| = \text{const.}$

c) Să se determine locurile geometrice descrise de punctele I și J.

3.53. Fie trapezul $ABCD$ între bazele căruia există relația $\|CD\| = 2\|AB\|$. Să se demonstreze că:

a) $\|AC\|^2 + \|BD\|^2 = \|BC\|^2 + \|CD\|^2 + \|DA\|^2$.

b) Dacă $\|AC\| = \|BD\|$ avem $2h^2 = \|BC\|^2 + \|BD\|^2 - \frac{5}{2}\|AB\|^2$ unde h este înălțimea trapezului.

c) Dacă $\|AC\| = \|BD\|$ raportul distanțelor a două vîrfuri opuse la diagonala corespunzătoare este egal cu raportul lungimilor bazelor.

3.54. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $|BC| \parallel |AD|$. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor și d distanța dintre baze. Să se demonstreze că:

a) $\frac{\|OA\| \|OC\|}{\|AC\|^2} = \frac{\|OB\| \|OD\|}{\|BD\|^2}$; $\frac{\|OA\| \|OD\|}{\|AD\|^2} = \frac{\|OB\| \|OC\|}{\|BC\|^2}$

b) Dacă diagonalele trapezului sînt perpendiculare avem relația

$$\frac{1}{\|AC\|^2} + \frac{1}{\|BD\|^2} = \frac{1}{d^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.55. Se consideră un trapez $ABCD$ dreptunghic în A și D. Se prelungește $|AB|$ cu $\|BB_1\| = k \cdot \|AB\|$ și $|DC|$ cu $\|CC_1\| = k\|DC\|$. Diagonalele trapezului $ABCD$ se întîlnesc în E, iar diagonalele trapezului AB_1C_1D în E_1. Dreptele AD și EE_1 se intersectează în F. Să se arate că:

a) Triunghiurile FBB_1 și FCC_1 sînt asemenea.

b) Dreptele AD, BC și B_1C_1 sînt concurente.

c) $$\frac{1}{\|EE_1\|} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\|AB\|} + \frac{1}{\|DC\|}\right).$$

d) Centrele cercurilor înscrise în triunghiurile FBC, respectiv FB_1C_1 sînt pe dreapta EE_1.

(G.M.B., 14 247, C. Ionescu-Țiu)

3.56. Se dau două cercuri (O) și (O_1) de raze R și R_1 și distanța dintre centrele lor $\|OO_1\| = d$. Prin punctele de contact ale unei tangente exterioare A și B se duce cercul de diametru $|AB|$.

a) Să se demonstreze că cercul de diametru $|AB|$ intersectează linia centrelor în două puncte dacă și numai dacă (O) și (O_1) sînt exterioare. Care trebuie să fie poziția relativă a cercurilor (O) și (O_1) ca cercul de diametru $|AB|$ să fie tangent la $|OO_1|$?

b) Dacă C și D sînt punctele în care cercul al treilea intersectează pe $|OO_1|$ avem $\|OC\| \|OD\| = R^2$ și $\|O_1C\| \cdot \|O_1D\| = R^2_1$.

3.57. Să se demonstreze că diferența puterilor unui punct M în raport cu două cercuri date (O_1) și (O_2) este egală cu de două ori produsul distanței centrelor celor două cercuri prin distanța punctului dat la axa radicală a cercurilor.

(G.M., VI)

3.58. Se dă cercul (O) și un punct P exterior lui. Polara punctului P față de cerc (dreapta care unește punctele de contact ale tangentelor duse din P — la cerc) intersectează pe $|OP|$ în A. Fie (d) o dreaptă perpendiculară pe $|OP|$ în mijlocul lui. Un punct M mobil pe cerc se proiectează pe (d) în N. Să se demonstreze că raportul $\dfrac{\|PM\|^2}{\|MN\|} = \text{const.}$ cînd M se mișcă pe cerc.

(G.M., XXXIII, prob. 3 576)

Scanned with OKEN Scanner

3.59. Două cercuri se intersectează în A și B. Tangentele în A la cele două cercuri le retaie în C și D. Să se arate că:

a) $\| AC \|^2 \| BD \| = \| AD \|^2 \| BC \|$.

b) $| AB |$ și $| CD |$ sînt perpendiculare dacă și numai dacă cercurile sînt congruente sau ortogonale.

3.60. Se dă cercul (O) de rază R și un punct P fix din planul său. Prin P se duc două coarde variabile, $| AB |$ și $| CD |$, perpendiculare. Să se demonstreze că:

a) 1° Suma pătratelor lungimilor acestor coarde este constantă.

b) 2° Dacă P este situat în interiorul cercului avem relația $\| AB \| \| CD \| \leqslant 2(2R^2 - \| OP \|^2)$.

3.61. Se dau trei triunghiuri $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$. Să se arate că există un punct M astfel încît:

$$\| MA_1 \|^2 + \| MB_1 \|^2 + \| MC_1 \|^2 = \| MA_2 \|^2 +$$

$$+ \| MB_2 \|^2 + \| MC_2 \|^2 = \| MA_3 \|^2 + \| MB_3 \|^2 + \| MC_3 \|^2.$$

(G. Țițeica, G.M., XIII)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 4

COLINIARITATE. CONCURENȚĂ

4.1. Fie (d) o dreaptă înzestrată cu un reper. Pentru două puncte A, B situate pe (d) notăm

$$\overline{AB} = \begin{cases} \|AB\| = x_B - x_A \text{ dacă } x_A < x_B \\ -\|AB\| = x_A - x_B \text{ dacă } x_B < x_A \end{cases}$$

Pentru patru puncte distincte A, B, C, D se notează

$$(A, B, C, D) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

și se numește raportul anarmonic (biraportul) al punctelor A, B, C, D în această ordine.

a) Arătați că raportul anarmonic este independent de reperul dreptei (d); b) Arătați că au loc egalitățile

$$(A, B, C, D) = (C, D, A, B) = (B, A, D, C) = (D, C, B, A)$$

$$(A, B, C, D) \cdot (B, A, C, D) = 1; \quad (A, B, C, D) + (D, B, C, A) = 1$$

Rezultă că pentru patru puncte date există 6 valori posibile, funcție de ordinea punctelor. Notînd $(A, B, C, D) = k$ celelalte valori sînt $1 - k$, $\frac{1}{k}$; $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$.

4.2. Fie (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) patru drepte concurente în O, situate în același plan, iar a o dreaptă în acest plan care nu trece prin O și care intersectează dreptele (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) în punctele A_1, A_2, A_3, A_4. Arătați că raportul anarmonic (A_1, A_2, A_3, A_4) nu depinde de dreapta (a). Valoarea acestui raport se numește raportul anarmonic (biraportul) al dreptelor (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) în această ordine și se notează $((d_1), (d_2), (d_3), (d_4))$.

Scanned with OKEN Scanner

4.3. Fie (d_1), (d_2), (d_3) trei drepte în plan concurente în O. O dreaptă oarecare (d) intersectează dreptele (d_1), (d_2), (d_3) în punctele A_1, A_2, A_3. Determinați locul geometric al punctului A_4 situat pe dreapta d astfel încît $(A_1, A_2, A_3, A_4) = k$-constant, cînd dreapta (d) este variabilă.

4.4. Fie pe dreapta (d) punctele A, B, C și pe dreapta (d') punctele A', B', C'. Dacă dreptele (d) și (d') sînt concurente în O și $(O, A, B, C) = (O, A', B', C')$ atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

4.5. Fie O, O' două puncte situate pe dreapta (d) și dreptele (a), (b), (c) trecînd prin O iar dreptele (a'), (b'), (c') trecînd prin O' astfel încît $(a, b, c, d) = (a', b', c', d)$. Atunci punctele $A = (a) \cap a'$, $B = (b) \cap (b')$, $C = (c) \cap (c')$ sînt coliniare.

4.6. Fie punctele A, B, C pe dreapta (d) și A', B', C' puncte pe dreapta (d') ((d) și (d') — drepte coplanare). Notînd $M = AB' \cap A'B$, $N = AC' \cap A'C$ și $P = BC' \cap B'C$, punctele M, N, P sînt coliniare. (Teorema lui Pappus.)

4.7. Fie ABC un triunghi și punctele $B' \in |CA|$, $C' \in |AB|$, D un punct în planul triunghiului, M intersecția dreptelor DC' și BB', iar N intersecția dreptelor DB', CC'. Să se arate că dreptele AD, CM și BN sînt concurente.

(Ioan Munteanu)

4.8. Fie $ABCD$ un patrulater convex, un punct $P \in |AB|$, punctele M, N pe $|DC|$. Notăm $\alpha = |PD| \cap |AC|$, $\beta = |PD| \cap |AN|$, $\gamma = |PD| \cap |AM|$; $\alpha' = |PC| \cap |BD|$, $\beta' = |BM| \cap |PC|$, $\gamma' = |BN| \cap |PC|$. Arătați că dreptele AC, BD, $\beta'\gamma$, $\beta\gamma'$ sînt concurente.

4.9. Fie (a), (b), (c) drepte coplanare concurente în O și punctele A, A' pe dreapta (a), B, B' pe dreapta (b), C, C' pe dreapta (c). Perechile de drepte $(BC, B'C')$, $(CA, C'A')$, $(AB, A'B')$ se intersectează în trei puncte coliniare. (Teorema lui Desargues.)

4.10. Dacă dreptele AB și $A'B'$, AC și $A'C'$, BC și $B'C'$ se intersectează în trei puncte coliniare, atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. (Teorema reciprocă a lui Desargues.)

Scanned with OKEN Scanner

4.11. În triunghiul ABC se iau punctele $N \in |AC|$, $P \in |AB|$ și fie $A_1 = |BN| \cap |CP|$. O dreaptă care trece prin A taie pe $|BN|$, $|CP|$, $|BC|$ în punctele C_1, B_1, M. Fie $A' = |BC| \cap |NB_1|$, $B' = |AC| \cap |PC_1|$, $C' = |AB| \cap |MA_1|$ și $\alpha = |NP| \cap |C'C_1|$, $\beta = |MP| \cap |A'A_1|$, $\gamma = |MN| \cap |B'B_1|$. Să se arate că grupele de puncte (A, α, A_1), (B, β, B_1), (C, γ, C_1) sînt formate din puncte coliniare.

(Ene Dumitru)

4.12. Punctele diferite A, B, C, D situate pe dreapta (d) formează, în această ordine, o diviziune armonică dacă $(A, B, C, D) = -1$. Spunem în acest caz că punctele A, B sînt conjugate armonic în raport cu punctele C și D. Dacă $(A, B, C, D) = -1$ atunci $(C, D, A, B) = -1$ și deci punctele C, D sînt conjugate armonic în raport cu punctele A, B. Folosind punctul b) din problema 4.1 deduceți că punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică dacă și numai dacă biraportul (A, B, C, D) este invariant la o transpoziție a două puncte, adică, de exemplu, $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)$.

4.13. Fie ABC un triunghi oarecare și A', B, C' intersecțiile unei drepte cu dreptele BC, CA, AB. Dreptele BB' și CC' se taie în M. Fie $A_1 = AM \cap BC$. Atunci punctele A' și A_1 sînt conjugate armonic în raport cu punctele B și C. (Teorema lui Pappus.)

4.14. Fie Ox, Oy două drepte concurente în O și P un punct fix în planul dreptelor nesituat pe ele. O dreaptă care trece prin P taie dreptele Ox și Oy în punctele X și Y. Folosind problema 4.3, deduceți că locul geometric al conjugatului armonic Q al punctului P în raport cu punctele X și Y este o dreaptă care trece prin O. Această dreaptă se numește polara punctului P față de unghiul xOy. Folosind problema 4.13, deduceți construcția polarei unui punct față de un unghi.

4.15. Fie $ABCD$ un patrulater convex și $E = BC \cap AD$, $F = AB \cap CD$. Configurația $ABCDEF$ se numește patrulater complet, $|BD|$, $|AC|$, $|EF|$ se numesc diagonalele patrulaterului complet. Utilizînd problema 4.14 arătați că într-un patrulater complet două diagonale intersectează pe a treia în puncte conjugate armonic față de extremitățile acesteia.

Scanned with OKEN Scanner

4.16. Fie dat un cerc și un punct P fixat în planul cercului, nesituat pe cerc. O dreaptă variabilă care trece prin P taie cercul în punctele X și Y. a) Să se găsească locul geometric al conjugatului armonic Q al punctului P în raport cu X, Y. Acest loc geometric se numește polara punctului P față de cerc. (Dacă punctul P este exterior cercului, punctele X și Y sînt reale cîtă vreme dreapta variabilă se află în unghiul tangentelor la cerc duse din punctul P; locul este, în acest caz, segmentul care unește punctele de tangență. Numim, totuși, polară a punctului P față de cerc dreapta care conține acest segment.) b) Arătați că dacă punctul P descrie o dreaptă q, atunci polara (p) a punctului P trece printr-un punct fix Q — numit polul dreptei (q) față de cercul dat; dual — dacă q este o dreaptă variabilă prin punctul fix P, polul Q al dreptei q descrie o dreaptă — polara punctului P.

4.17. Redemonstrați: a) *Teorema lui Menelaus:* Fie ABC un triunghi oarecare și punctele A' pe dreapta BC, B' pe dreapta CA, C' pe dreapta AB astfel încît cel mult două sînt pe laturile triunghiului. Punctele A', B', C' sînt coliniare dacă și numai dacă are loc.

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|}\cdot\frac{\|B'C\|}{\|B'A\|}\cdot\frac{\|C'A\|}{\|C'B\|}=1.$$

b) *Teorema lui Ceva:* Fie ABC un triunghi oarecare și punctele $A'\in|BC|$, $B'\in|CA|$, $C'\in|AB|$. O condiție necesară și suficientă ca dreptele AA', BB', CC' să fie concurente este: $\dfrac{\|A'B\|}{\|A'C\|}\cdot\dfrac{\|B'C\|}{\|B'A\|}\cdot\dfrac{\|C'A\|}{\|C'B\|}=1.$

4.18. Într-un triunghi oarecare dreptele care unesc vîrfurile cu punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile opuse acestora sînt concurente (punctul de concurență este cunoscut ca punctul lui Gergonne).

4.19. Fie A', B', C' puncte pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului ABC și A'', B'', C'' simetricele lor față de mijloacele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, respectiv $|AB|$. Arătați că dreptele AA'', BB'', CC'' sînt concurente dacă și numai dacă dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. (Despre dreptele AA' și AA'' se spune că sînt izotomice în raport cu triunghiul dat).

Scanned with OKEN Scanner

4.20. a) Fie ABC un triunghi oarecare. Bisectoarele exterioare ale unghiurilor B, C și bisectoarea interioară a unghiului A sînt concurente. b) Notăm prin I_a punctulde mai sus, prin I_b, I_c similarele acestuia. Cercurile cu centrele în I_a, I_b, I_c și tangente dreptelor suport laturilor triunghiului se numesc cercuri exînscrise triunghiului. Arătați că perpendicularele din I_a pe BC, din I_b pe CA, din I_c pe AB sînt concurente. c) Fie A' punctul de tangență al cercului înscris la latura $|BC|$ și A'' punctul de tangență la $|BC|$ al cercului exînscris. Arătați că punctele A', A'' sînt simetrice față de mijlocul segmentului $|BC|$. d) Cu notații similare, deduceți că dreptele AA'', BB'' CC'' sînt concurente.

4.21. Fie A, B, C, D patru puncte pe o dreaptă și O mijlocul segmentului $|AB|$. Atunci diviziunea (A, B, C, D) este armonică dacă și numai dacă $\|OA\|^2 = \|OC\| \cdot \|OD\|$.

4.22. Folosind problema precedentă, arătați că: a) Dacă Γ_1 și Γ_2 sînt două cercuri ortogonale de centre O_1 și O_2, atunci orice dreaptă care trece prin O_1 (sau O_2) intersectează cercurile în punctele A_1, B_1 situate pe Γ_1 și A_2, B_2 situate pe Γ_2 încît diviziunea (A_1, B_1, A_2, B_2) este armonică. b) Reciproc, dacă o dreaptă care trece prin O_1 este tăiată de cercurile Γ_1 și Γ_2 după o diviziune armonică atunci cercurile Γ_1 și Γ_2 sînt ortogonale.

4.23. Fie $[ABCDEF]$ un hexagon înscris într-un cerc (convex sau nu). Dreptele AB și DE, BC și EF, CD și FA se intersectează în punctele L, M, N respectiv. Punctele L, M, N sînt coliniare. *(Teorema lui Pascal.)*

4.24. Fie $ABCDEF$ un hexagon circumscris unui cerc. Dreptele AD, BE, CF sînt concurente. *(Teorema lui Brianchon.)*

4.25. Fie $|AA_1|$ mediana laturii $|BC|$ în triunghiul ABC și punctele $M \in |AB|$, $N \in |AC|$, $P \in |AA_1|$ coliniare. Atunci are loc relația $\frac{\|BM\|}{\|MA\|} + \frac{\|CN\|}{\|NA\|} = 2 \cdot \frac{\|A_1P\|}{\|PA\|}$.

4.26. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. O dreaptă care trece prin G intersectează laturile $|AB|$ în Q și $|AC|$ în P. Să se arate că $\frac{\|PC\|}{\|PA\|} + \frac{\|QB\|}{\|QA\|} = 1$.

(Admitere facultăți tehnice, 1982)

Scanned with OKEN Scanner

4.27. Fie ABC un triunghi în care $\| AB \| < \| AC \|$ și fie $P \in | AC |$ și Q pe dreapta BA, A între B și Q astfel încît $\| BQ \| = \| CP \|$. Atunci dreapta QP trece prin mijlocul laturii $| BC |$.

4.28. Pe segmentele $| AB |$ și $| AC |$, laturi ale unui triunghi ABC se consideră două puncte $M \in | AB |$ și $N \in | AC |$ astfel încît $| \| BM \| - \| CN \| | = k$, k fiind o constantă pozitivă. Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $| MN |$.

(Concursul rezolvitorilor G.M., 1980)

4.29. Mijloacele diagonalelor unui patrulater complet sînt coliniare (dreapta Newton-Gauss).

4.30. Două cercuri fixe sînt tangente cu un cerc variabil în punctele P și Q. Să se arate că există două puncte R_1 și R_2 astfel ca dreapta PQ să treacă sau prin R_1 sau prin R_2.

(Prezentată la a XV-a O.I.M., 1973)

4.31. Folosind teorema lui Pascal (vedeți 4.23) deduceți că tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A, B, C intersectează dreptele BC, CA, AB în trei puncte coliniare.

4.32. Pe diagonala AC a patrulaterului convex $ABCD$ considerăm un punct mobil F. Prin F se consideră două drepte variabile Δ' și Δ''. Notăm $M = AB \cap \Delta'$, $N = BC \cap \Delta'$, $P = CD \cap \Delta''$, $Q = AD \cap \Delta''$. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor QM și PN cînd F descrie dreapta AC, iar Δ' și Δ'' sînt variabile (se rotesc) în jurul lui F.

(Andrei Ruginâ)

4.33. Pe cercul de centru O și diametru $| AB |$ se consideră punctele C și D, situate de o parte și de cealaltă a lui AB. Notăm $AC \cap BD = E$, $BC \cap AD = F$, $EO \cap BC = M$, $EO \cap AD = N$, $FO \cap AC = P$, $FO \cap BD = R$, $BP \cap AM = T$, $AR \cap BN = S$. Să se arate că dreptele AB, CT și DS sînt concurente.

(Ion Iancu)

Scanned with OKEN Scanner

4.34. Fie $ABCD$ un trapez avînd bazele $|BC|$ și $|AD|$, iar M un punct oarecare pe dreapta BC. Notăm $P = AM \cap BD$, $Q = AC \cap MD$, $I = AC \cap BD$, $S = PQ \cap IM$. Să se găsească locul geometric al punctului S cînd M parcurge dreapta BC.

4.35. Fie patrulaterul $ABCD$ și M un punct variabil pe dreapta BC. Notăm $P = BD \cap AM$, $Q = AC \cap DM$, $I = AC \cap BD$, $S = PQ \cap IM$. Să se găsească locul geometric al punctului S cînd M descrie dreapta BC.

4.36. Pe latura $|AB|$ a triunghiului ABC se iau punctele G și E, iar pe latura $|BC|$ se iau punctele H și F, astfel ca rapoartele anarmonice (A, G, E, B) și (C, H, F, B) să fie egale. Dreptele CG și FE se intersectează în P, dreptele AH și EF se intersectează în L, dreptele AH și CG se taie în O, iar dreptele AP și LC în M. Arătați că punctele B, O și M sînt coliniare.

(W. Maurer)

4.37. Pe fiecare latură a triunghiului ABC se dau două puncte: pe $|AB|$ — punctele D și E, pe $|BC|$ — punctele F și G, iar pe $|CA|$ — punctele H și K astfel încît $\|AD\| = \|BE\|$, $\|BF\| = \|CG\|$, $\|CH\| = \|AK\|$. Arătați că medianele din vîrfurile A, B, C ale triunghiurilor ADK, BEF și respectiv CGH sînt concurente.

(Concurs, U.R.S.S., 1971)

4.38. Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sînt înscrise în același cerc astfel ca $m(\widehat{AA'}) = m(\widehat{BB'}) = m(\widehat{CC'}) = 60°$. Ducem prin vîrful A segmentul $|AA_1|$ congruent, paralel și la fel orientat cu segmentul $|A'C'|$ și, analog, prin vîrfurile B, C ducem segmentele $|BB_1|$, $|CC_1|$ congruente și paralele, la fel orientate, cu $|B'A'|$, respectiv $|C'B'|$. Să se arate că dreptele BA_1, CB_1, AC_1 sînt concurente și segmentele $|BA_1|$, $|CB_1|$, $|AC_1|$ sînt congruente.

(N. Mihăileanu)

4.39. În triunghiul ABC se consideră punctele B' și C' pe laturile $|AC|$ și, respectiv $|AB|$ de lungimi b, c. O dreaptă care trece prin A și mijlocul segmentului $|B'C'|$ intersectează latura $|BC|$ în M. Să se arate că M împarte latura $|BC|$ în raportul $\frac{\|MC\|}{\|MB\|} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\|AC'\|}{\|AB'\|}$. Să se demonstreze că

Scanned with OKEN Scanner

dacă AA', BB', CC' sînt trei drepte concurente, atunci dreptele care unesc vîrfurile A, B, C ale triunghiului cu mijloacele laturilor $|B'C'|$, $|C'A'|$, $|A'B'|$ ale triunghiului înscris $A'B'C'$ sînt și ele concurente.

(I. Teodorescu)

4.40. Fie $OACB$ un paralelogram, M un punct pe $|BC|$. Paralela prin C la AB intersectează pe OA în D, pe OM în N. Arătați că dreptele OC, AN și DM sînt concurente.

4.41. Să se arate că dreptele care trec prin mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului ABC și sînt perpendiculare pe tangentele la cercul circumscris acestui triunghi, respectiv în vîrfurile A, B, C, sînt concurente.

(A.V. Mihai)

4.42. Dacă într-un triunghi are loc relația $\sin A \cos B = \sin C \cos C$, atunci mediana din B, bisectoarea interioară a unghiului C și dreapta care trece prin A și centrul cercului circumscris triunghiului sînt concurente.

(Mihai M. Lascu)

4.43. În triunghiul ABC considerăm punctele M, N, P pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ în așa fel încît $\frac{\|MB\|}{\|MC\|} = \frac{\|NC\|}{\|NA\|} = \frac{\|PA\|}{\|PB\|}$. Notăm cu D mijlocul laturii $|BC|$, iar prin Q simetricul lui A față de mijlocul segmentului $|MN|$. Să se demonstreze că punctele P, D și Q sînt coliniare.

(Liliana Niculescu)

4.44. Într-un patrulater inscriptibil, perpendicularele din mijloacele laturilor pe laturile opuse sînt șase drepte concurente.

4.45. În triunghiul ABC fie A', B', C' mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$ $|AB|$. Dacă E, F, G sînt puncte situate respectiv pe dreptele $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ astfel încît $A'E$, $B'F$, $C'G$ să fie concurente, atunci dreptele AE, BF, CG sînt concurente.

(Sava Stan)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

ARII

5.1. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele M și N pe semidreptele $[AB$ și $[AC$ astfel încît $\| AM \| = m \| AB \|$, $\| AN \| = n \cdot \| AC \|$. Calculați raportul ariilor triunghiurilor AMN și ABC.

5.2. Fie ABC un triunghi oarecare, D mijlocul laturii $| BC |$, M un punct oarecare pe $| BD |$. Paralela prin D la AM intersectează $| AC |$ în N. Arătați că aria patrulaterului $ABMN$ nu depinde de poziția punctului M. Deduceți o metodă de construcție a unui triunghi echivalent cu un patrulater convex dat.

5.3. Fie paralelogramul $ABCD$ și M un punct pe latura $| BC |$, iar E un punct pe $| AM |$; fie $H = | MD | \cap | EC |$.
a) Arătați că

$$\text{Aria } ([BEM]) + \text{Aria } ([MHC]) = \text{Aria } ([HED]).$$

b) Găsiți locul geometric al punctului E astfel ca aria $([DEM])$ să fie constantă cînd M parcurge segmentul $| BC |$.
c) Notînd prin Q intersecția dintre MD și paralela prin E la BC, arătați că $\| EQ \|$ este constant dacă aria triunghiului $[DEM]$ este constantă.

(Admitere, Facultatea de matematică, Craiova, 1976)

5.4. În trapezul $ABCD$ $(AB \| CD)$, fie O intersecția diagonalelor $| AC |$ și $| BD |$, S — aria triunghiului AOB, s — aria triunghiului COD și σ aria triunghiului AOD. Are loc $\sigma^2 = S \cdot s$.

5.5. Cu centrele în vîrfurile unui pătrat se descriu cercurile avînd razele egale cu lungimea laturii pătratului. Calculați aria porțiunii comune celor patru cercuri.

Scanned with OKEN Scanner

5.6. Se consideră un punct A' pe latura $|BC|$ a unui triunghi ABC. Paralela prin A' la latura $|AC|$ intersectează latura $|AB|$ în punctul C' și paralela prin A' la latura $|AB|$ întîlnește latura $|AC|$ în B'. a) Exprimați aria paralelogramului $A'B'AC'$ în funcție de aria triunghiului $BA'C'$ și de aria triunghiului $CA'B'$. b) Pentru ce poziție a punctului A' aria acestui paralelogram este maximă?

(Admitere, Facultatea de matematică-mecanică, București, 1973)

5.7. Prin punctul M situat în interiorul triunghiului ABC se duc paralele la laturile triunghiului. Se formează, astfel, trei triunghiuri avînd cîte un vîrf în M, iar celelalte două pe cîte o latură a triunghiului dat. Să se arate că dacă S_1, S_2, S_3 sînt ariile acestor triunghiuri, iar S este aria triunghiului dat, atunci este valabilă inegalitatea

$$3(S_1 + S_2 + S_3) \geqslant S.$$

(Admitere, Facultatea de matematică-mecanică, București, 1972)

5.8. Într-un patrulater convex avînd lungimile laturilor a, b, c, d și aria S are loc inegalitatea $4S \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Cînd are loc egalitatea?

5.9. Fie ABC un triunghi oarecare, M un punct în interiorul triunghiului, $A_1 = AM \cap BC$, $B_1 = BM \cap AC$, $C_1 = CM \cap AB$. Atunci au loc relațiile

$$\frac{\|MA_1\|}{\|AA_1\|} + \frac{\|MB_1\|}{\|BB_1\|} + \frac{\|MC_1\|}{\|CC_1\|} = 1$$

$$\frac{\|AM\|}{\|AA_1\|} + \frac{\|BM\|}{\|BB_1\|} + \frac{\|CM\|}{\|CC_1\|} = 2$$

5.10. Fie ABC un triunghi și AA_1, BB_1, CC_1 trei ceviene concurente în M, $A_1 \in |BC|$, $B_1 \in |CA|$, $C_1 \in |AB|$. Să se demonstreze că M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă are loc

$$\frac{\|AM\|}{\|MA_1\|} + \frac{\|BM\|}{\|MB_1\|} + \frac{\|CM\|}{\|MC_1\|} = 6.$$

(Vasile Zidaru)

Scanned with OKEN Scanner

5.11. Fie $[Ox$, $[Oy$ două semidrepte pe care se iau punctele A și B, respectiv A_1 și B_1 astfel încît $\| AB \| = \| A_1B_1 \|$. Pe segmentul $| AA_1 |$ se consideră punctele C și C_1 astfel încît $\| AC \| = \| A_1C_1 \|$. Arătați că medianele din A, respectiv din A_1, ale triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ se intersectează pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle([Ox, [Oy)$.

5.12. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile $| BC |$, $| CA |$, $| AB |$ astfel încît $\| BA_1 \| = \rho_a \| A_1C \|$, $\| CB_1 \| = \rho_b \| B_1A \|$, $\| AC_1 \| = \rho_c \| C_1B \|$. Evaluați aria triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcție de aria triunghiului ABC și de ρ_a, ρ_b, ρ_c.

5.13. Folosind rezultatul problemei precedente arătați că: a) aria triunghiului format de picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC este dată de formula

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \text{aria } [ABC].$$

b) aria triunghiului ortic al triunghiului ABC este

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \text{aria } [ABC].$$

5.14. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Perpendicularele în B pe AB și în C pe AC se intersectează în punctul A'. Analog se construiesc punctele B' și C'. Să se arate că aria hexagonului $AC'BA'CB'$ este dublul ariei triunghiului ABC.

5.15. Fie D un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, situat între C și B, iar A', B', C' puncte arbitrare pe semidreptele $[DA$, $[DB$, $[DC$. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca punctele A', B', C' să fie coliniare este ca

$$\frac{\| BC \|}{\| DA' \|} = \frac{\| CA \|}{\| DB' \|} = \frac{\| AB \|}{\| DC' \|}.$$

Generalizare în cazul în care D nu se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

(Ion I. Cristea)

5.16. Să se determine toate punctele P din interiorul unui triunghi dat ABC pentru care

$$\frac{\|BC\|}{\|PA_1\|}+\frac{\|CA\|}{\|PB_1\|}+\frac{\|AB\|}{\|PC_1\|}$$

este minimă, unde A_1, B_1, C_1 sînt proiecțiile punctului P pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$.

(Propusă de Marea Britanie la a XXII-a O.I.M., 1981)

5.17. Bisectoarele interioare ale triunghiului ABC taie cercul circumscris triunghiului în punctele A', B', C'. Notînd cu d_a, d_b, d_c distanțele punctelor A', B', C' la laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ și cu r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, să se stabilească relația:

$$\frac{d_a}{r_a}+\frac{d_b}{r_b}+\frac{d_c}{r_c}=1.$$

5.18. Fie ABC un triunghi oarecare, $A'\in|BC|$, $B'\in|CA|$, $C'\in|AB|$, $A_1=|BB'|\cap|CC'|$, $B_1=|CC'|\cap|AA'|$, $C_1=|AA'|\cap|BB'|$ astfel încît triunghiurile $AB'C_1$, $BC'A_1$, $CA'B_1$, $A_1B_1C_1$ au aceeași arie a. Să se arate că patrulaterele AC_1A_1C', BA_1B_1A', CB_1C_1B' au aceeași arie și să se evalueze aria triunghiului ABC în funcție de a.

(Revista „Kvant")

5.19. Aria unui triunghi este strict mai mică decît semisuma pătratelor distanțelor unui punct din interiorul triunghiului la vîrfuri.

Generalizare.

(Mircea Lascu)

5.20. Să se determine toate dreptele care trec prin centrul de greutate al unui triunghi și descompun suprafața triunghiului în două suprafețe poligonale de arii egale.

(Iulian Beju)

5.21. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, M și N două puncte diferite situate în interiorul triunghiului, $N_a=[AN\cap|BC|$, N_b și N_c analoagele lui N_a. Paralela prin M la BC taie segmentul $|AN_a|$ în punctul M_a. Fie M_b și M_c analoagele punctului M_a. Să se demonstreze că

$$\frac{\|AM_a\|}{\|AN_a\|}+\frac{\|BM_b\|}{\|BN_b\|}+\frac{\|CM_c\|}{\|CN_c\|}=2.$$

(D. M. Bătinețu)

5.23. Fie $[A_1A_2 \ldots A_n]$ un poligon convex, M_i mijlocul segmentului $|A_iA_{i+1}|$ $(A_{n+1} \equiv A_1)$. Să se demonstreze că: a) Dacă există M în interiorul poligonului astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} \|MM_i\| \cdot \|A_iA_{i+1}\| = 2 \text{ aria } (A_1A_2 \ldots A_n)$$

atunci poligonul dat este inscriptibil. b) Dacă poligonul dat este circumscriptibil și I — centrul cercului înscris — satisface relația

$$\sum_{i=1}^{n} \|IM_i\| \cdot \|A_iA_{i+1}\| = 2 \text{ aria } (A_1A_2 \ldots A_n)$$

atunci poligonul este regulat.

(D. M. Bătineţu)

5.23. Fie PQR un triunghi echilateral, M un punct în interiorul triunghiului, A, B, C simetricele punctului M față de dreptele QR, RP și PQ, respectiv. Determinați poziția punctului M pentru care aria triunghiului ABC este maximă.

5.24. Fie ABC un triunghi pentru care măsurile unghiurilor sînt mai mici decît 120° și M un punct în interiorul triunghiului astfel încît unghiurile $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$, $\widehat{AMB}$ să fie congruente două cîte două. Se notează P, Q, R simetricele centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor BMC, AMC și AMB, cu S aria triunghiului ABC și cu x, y, z respectiv distanțele punctului M la vîrfurile triunghiului ABC. Să se arate că: a) $xy + yz + zx = \frac{4S}{\sqrt{3}}$; b) $x + y + z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{2}}$; c) Folosind rezultatele de la a) și b) să se arate că $4S\sqrt{3} \leqslant a^2 + b^2 + c^2$; d) Aria $[PQR] \geqslant S$. Să se precizeze cînd avem egalitate.

(I. Tomescu)

5.25. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct în interiorul triunghiului, A', B', C' proiecțiile punctului M pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Determinați poziția punctului M astfel încît triunghiul $A'B'C'$ (numit triunghiul podar al punctului M) să aibă arie maximă.

Scanned with OKEN Scanner

5.26. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele mobile $D \in |BC|$, $E \in |AC|$ astfel încît aria $[ABD]$ = aria $[BCE]$.
a) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $|DE|$.
b) Să se determine minimul lungimii segmentului $|DE|$.

(Dumitru Petre)

5.27. Fie $|AB|$ și $|CD|$ două segmente în plan care nu au puncte interioare comune. Determinați locul geometric al punctelor din plan, M, pentru care triunghiurile MAB și MCD au aceeași arie.

5.28. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Dacă există un punct M în planul patrulaterului astfel încît triunghiurile MAB, MBC, MCD, MDA să fie echivalente, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Precizați în acest caz punctele M cu proprietatea de mai sus.

5.29. Dacă există în interiorul triunghiului ABC un punct M astfel încît triunghiurile MAB, MBC, MCA să aibă arii egale și perimetre egale, atunci triunghiul ABC este echilateral.

(Marcel Chiriță)

5.30. Fie ABC un triunghi oarecare și cevienele AA', BB', CC' concurente în $M(A' \in |BC|$, etc.) și s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 ariile triunghiurilor MBA', $MA'C$, MCB', $MB'A$, MAC', $MC'B$. Demonstrați că M este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\frac{s_1}{s_2} + \frac{s_3}{s_4} + \frac{s_5}{s_6} = 3$.

(Titu Andreescu)

5.31. Fie ABC un triunghi oarecare, M un punct în interiorul triunghiului, D, E, F proiecțiile punctului M pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Notînd $\|MD\| = d_a$, $\|ME\| = d_b$, $\|MF\| = d_c$, $\|BD\| = x$, $\|CE\| = y$, $\|AF\| = z$, are loc $(x^2 + y^2 + z^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \geq [\text{aria}\,(ABC)]^2$. Precizați poziția punctului M pentru care are loc egalitatea.

(N.N. Burcea)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 6

TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

6.1. Într-un plan (α) fie (d) o dreaptă fixată. Pentru un punct A din planul (α) construim punctul A_1 astfel: perpendiculara din A pe (d) o intersectează pe aceasta în A', punctul A_1 este situat pe dreapta AA' așa încît A' este mijlocul segmentului AA_1. Punctul A_1 se numește simetricul punctului A față de dreapta (d). Aplicația $A \to A_1$ astfel definită se numește simetria în raport cu dreapta (d). O vom nota (S, d). Fiind dată o simetrie în raport cu o dreaptă și $\mathcal{M}$ o mulțime de puncte din planul (α), mulțimea tuturor simetricelor punctelor $M \in \mathcal{M}$ se numește simetrica mulțimii $\mathcal{M}$ în simetria dată. Fie (S, d) simetria în raport cu dreapta (d). a) Arătați că simetrica unei drepte Δ este o dreaptă Δ'. Ce puteți spune despre Δ, Δ', (d)? b) Arătați că simetricul unui segment este un segment congruent cu cel dat; simetricul mijlocului unui segment este mijlocul simetricului segmentului. Deduceți că simetricul unui triunghi este un triunghi congruent triunghiului dat. Arătați că simetricul unui cerc este un cerc congruent cu cercul dat — centrele fiind simetrice.

6.2. a) Demonstrați că dacă două cercuri trec prin trei puncte și respectiv prin simetricele acestora în raport cu o dreaptă, atunci ele sînt simetrice și deci congruente. b) Fie ABC un triunghi oarecare și H ortocentrul triunghiului. Deduceți că cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, CHA, AHB sînt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC.

6.3. Fie ABC un triunghi oarecare și $B' \in [AC$, $C' \in [AB$. Spunem că dreptele BC și $B'C'$ sînt antiparalele (în raport cu unghiul $\widehat{BAC}$) dacă $\text{m}(\widehat{ABC}) = \text{m}(\widehat{AB'C'})$. Arătați că mijloacele antiparalelelor $|B'C'|$ se găsesc pe simetrica medianei din A față de bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ (adică simediana din A a triunghiului).

Scanned with OKEN Scanner

6.4. Dreptele (d_1) și (d_2) concurente în O fac un unghi de măsură mai mică decît 45°. Fie A un punct fix pe (d_1). Să se găsească pe (d_2) un punct M și pe (d_1) un punct B astfel încît suma $\| AM \| + \| MB \|$ să fie minimă.

(Bergthaler Cristian)

6.5. Fiind dat un punct fix O în plan (sau în spațiu), simetria de centru O este aplicația care asociază fiecărui punct M din plan (din spațiu) punctul M' situat pe dreapta OM astfel încît O se află între M și M' și $\| OM \| = \| OM' \|$. Fiind dată simetria de centru O și o mulțime de puncte $\mathcal{M}$, mulțimea tuturor simetricelor punctelor $M \in \mathcal{M}$ se numește simetrica mulțimii $\mathcal{M}$ în simetria dată. Fie (S, O) simetria de centru O. a) Arătați că simetrica unei drepte este o dreaptă paralelă cu dreapta dată; corespunzător, simetricul unui plan este un plan paralel celui dat. b) Arătați că simetricul unui segment este un segment congruent cu cel dat; deduceți că simetricul unui triunghi este un triunghi congruent triunghiului dat, simetricul unui cerc este un cerc de aceeași rază și avînd centrul în simetricul centrului cercului dat.

6.6. Prin punctul de tangență a două cercuri tangente se duce o secantă variabilă care intersectează, pentru a doua oară, cele două cercuri în punctele M_1 și M_2. Să se găsească locul geometric al simetricului punctului M_i față de M_j, $i, j \in \{1, 2\}$. Discuție după poziția cercurilor.

(Gh. Murărescu)

6.7. Fie ABC un triunghi oarecare, M un punct în planul triunghiului, A', B', C' simetricele punctului M față de mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. a) Arătați că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. b) Fie M' punctul de intersecție al dreptelor AA', BB', CC'. Arătați că dreapta MM' trece printr-un punct fix. Precizați-l!

6.8. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale unui triunghi oarecare și M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze că paralelele duse prin punctele A', B', C' respectiv la MA, MB, MC sînt concurente și să se precizeze poziția punctului de concurență.

(Gh. D. Simionescu)

Scanned with OKEN Scanner

6.9. În cercul de centru O, arcul mic $\widehat{BC}$ are măsura $120°$ și punctul A parcurge arcul mare $\widehat{BC}$ al cercului. Fie H ortocentrul triunghiului. Demonstrați că mediatoarele segmentelor $|CH|$ și $|BH|$ sînt concurente într-un punct situat pe cerc.

(C. Ottescu)

6.10. Să se arate că dacă o figură F are două plane de simetrie perpendiculare, intersecția acestora este axa de simetrie a figurii.

6.11. Să se demonstreze că două simetrii succesive în raport cu două drepte paralele se pot înlocui cu o translație, iar dacă dreptele sînt concurente ele se pot înlocui cu o rotație.

6.12. Să se demonstreze că produsul a două simetrii în raport cu două centre date este echivalent cu o translație.

6.13. Să se demonstreze că dat triunghiul ABC, dacă se consideră pe laturile sale punctele A_1, B_1 și C_1 care împart laturile triunghiului în același raport, atunci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate (teorema lui Pappus).

6.14. Să se demonstreze că două figuri semetrice în raport cu un punct se pot suprapune printr-o rotație.

6.15. Să se determine o rotație care transformă o dreaptă (d) într-o dreaptă (d') și un punct A de pe (d) în punctul A' situat pe (d').

6.16. Să se arate că două triunghiuri invers congruente situate în același plan se pot transforma unul în altul printr-o simetrie urmată de o rotație.

6.17. Fie O un punct fixat în plan (în spațiu) și k un număr real nenul. Numim omotetie de centru O și raport k aplicația $A \to A'$ definită astfel: punctele O, A, A' sînt coliniare și $\overline{OA'} = k\,\overline{OA}$ (reamintim, $\overline{OA} = x_A - x_O$ într-un reper pe dreapta OA). Punctul A' se numește omoteticul punctului A în omotetia de centru O și raport k. Pentru o mulțime $\mathcal{M}$ de puncte, mulțimea $\mathcal{M}'$ a tuturor omoteticilor M' a punctelor $M \in \mathcal{M}$ se numește omotetica mulțimii $\mathcal{M}$. Omotetia de centru O și raport k o vom nota (O, k). a) Ară-

Scanned with OKEN Scanner

taţi că omotetica unei drepte (unui plan) care trece prin centrul de omotetie O este acea dreaptă (acel plan); omotetica unei drepte care nu trece prin O (unui plan care nu trece prin O) este o dreaptă paralelă (un plan paralel) cu dreapta dată (cu planul dat). b) Fie omotetia (O, k) într-un plan dat (α) şi punctele A, B, C necoliniare, diferite de O. Arătaţi că omoteticul triunghiului ABC este un triunghi asemenea triunghiului ABC, fie el $A'B'C'$ (Aici triunghi semnifică mulţimea punctelor interioare poligonului convex ABC şi a punctelor segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$. Omotetica înălţimii din A (bisectoarei, medianei din A, mediatoarei segmentului $|BC|$ este înălţimea din A' (bisectoarea, mediana din A', mediatoarea segmentului $|B'C'|$). Deduceţi că omoteticul ortocentrului (centrului cercului înscris, centrului de greutate, centrului cercului circumscris) triunghiului ABC este ortocentrul (centrul cercului înscris, centrul de greutate, centrul cercului circumscris) triunghiului $A'B'C'$. c) Arătaţi că omoteticele a trei drepte concurente sînt trei drepte concurente. d) Arătaţi că omoteticul unui cerc este un cerc, al cărui centru este omoteticul centrului cercului dat.

6.18. Arătaţi că, fiind date două cercuri în acelaşi plan, există exact două omotetii în care aceste cercuri sînt omotetice.

6.19. În dreptunghiul $ABCD$ se iau pe dreapta BC punctele M şi N simetrice în raport cu B. Fie $\|NB\| = \|BM\| = x$, $\|AB\| = y$ şi P intersecţia dreptelor AN şi DM. Să se găsească locul geometric al punctului P cînd: a) x este variabil, y fiind constant A, B, C, D fixe; b) y este variabil, x fiind constant, A şi D fixe.

6.20. Fie A un punct fix pe o circumferinţă fixă. Laturile unui unghi constant ca mărime, cu vîrful în A, retaie circumferinţa în punctele B, C. Determinaţi locul geometric al ortocentrului triunghiului BAC, cînd unghiul BAC este variabil.

6.21. Fie triunghiul ABC şi M un punct arbitrar în planul său. Notăm cu G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor MBA, MBC respectiv MCA. Să se arate că triunghiul $G_1G_2G_3$ are arie constantă (M nu se află pe conturul triunghiului).

(Sorin Săleanu)

Scanned with OKEN Scanner

6.22. Fie $|AB|$ un segment fix. Prin punctele A și B se duc două drepte perpendiculare care se taie în M. Se consideră simetricele P și Q ale punctelor B, respectiv A față de M. Fie P' simetricul punctului P față de A. a) Să se găsească locul geometric al punctului P și locul geometric al punctului Q. b) Să se arate că dreapta $P'Q$ trece printr-un punct fix. c) Să se găsească locul geometric al intersecției dreptelor $P'Q$ și MB. d) Să se arate că dreapta $P'M$ trece printr-un punct fix.

6.23. Fie $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ două triunghiuri astfel încît A_1A_2 este paralelă cu B_1B_2, A_2A_3 este paralelă cu B_2B_3 și A_3A_1 este paralelă cu B_3B_1. Arătați că triunghiurile sînt omotetice.

6.24. Trei cercuri de aceeași rază sînt situate în interiorul unui triunghi și fiecare din ele este tangent la cîte două din laturile triunghiului. Cele trei cercuri trec toate prin același punct P. Să se demonstreze că P și centrele cercurilor înscris și circumscris triunghiului sînt coliniare.

6.25. (Transformarea prin inversiune.) Fie O un punct fixat în planul (α) și k un număr real nenul. Fiecărui punct $M \neq 0$ îi asociem punctul M' situat pe dreapta OM astfel încît $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. Aplicația astfel definită se numește inversiunea de pol O și putere k; o notăm prin $\mathcal{I}(O, k)$ sau $\mathcal{I}$ pur și simplu. Inversiunea $\mathcal{I}(O, k)$ este o bijecție a mulțimii $(\alpha)\setminus\{0\}$ pe ea însăși; pentru o submulțime $\mathcal{M} \subset (\alpha)\setminus\{0\}$ notăm $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ mulțimea inverselor $\mathcal{M}' = \mathcal{I}(M)$ a tuturor punctelor M ale mulțimii $\mathcal{M}$ și o numim transformata prin inversiunea $\mathcal{I}$ a mulțimii $\mathcal{M}$. a) Fie (d) o dreaptă care trece prin O și $\mathcal{I} = \mathcal{I}(O, k)$ o inversiune; atunci $\mathcal{I}((d)\setminus\{0\}) = (d)\setminus\{0\}$. b) Fie punctele A, B, C în $(\alpha)\setminus\{0\}$ situate pe o dreaptă care nu trece prin O. Atunci punctele $A' = \mathcal{I}(A)$, $B' = \mathcal{I}(B)$, $C' = \mathcal{I}(C)$ sînt situate pe un cerc care trece prin O. Deduceți că transformata prin $\mathcal{I}$ a unei drepte care nu trece prin O este un cerc „punctat în O" adică un cerc care trece prin O fără acest punct, al cărui diametru ce trece prin O este perpendicular pe dreapta (d). b) Arătați că inversiunea $\mathcal{I}(O, k)$ este idempotentă, adică $\mathcal{I}(\mathcal{I}(M)) = M$ pentru orice $M \neq 0$. c) Deduceți că transformata prin inversiune a unui cerc punctat în O este o dreaptă perpendiculară pe diametrul prin O al cercului.

Scanned with OKEN Scanner

6.26. Transformata prin inversiune a unui cerc care nu trece prin polul de inversiune este un cerc (care nu trece prin polul de inversiune).

6.27. Fie inversiunea $\mathcal{J} = \mathcal{J}(O, k)$, $k > 0$. Cercul de centru O și rază $\sqrt{k}$ se numește cercul de inversiune asociat inversiunii $\mathcal{J}$. a) Arătați că cercul de inversiune este invariant, punct cu punct, în inversiunea $\mathcal{J}$. (O mulțime este invariantă punct cu punct la inversiunea $\mathcal{J}$ dacă inversul oricărui punct al ei este el însuși, mulțimea $\mathcal{M}$ este invariantă dacă $\mathcal{J}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$). b) Dacă $\mathcal{M}$ este invariantă la inversiune, atunci $\mathcal{J}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. c) Un cerc care nu trece prin O este invariant la inversiunea $\mathcal{J}$ dacă și numai dacă este ortogonal cercului de inversiune.

6.28. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc de centru O. Să se demonstreze că cercurile care trec prin O și prin mijloacele a două laturi opuse au un al doilea punct comun.

6.29. Fie ABC un triunghi și punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pe latura BC astfel încît unghiurile $BAA_1, A_1AA_2, \ldots, A_{n-1}AC$ să fie congruente. Atunci au loc relațiile

$$\frac{\|BA_1\|}{\|AB\|\,\|AA_1\|} = \frac{\|A_1A_2\|}{\|AA_1\| \cdot \|AA_2\|} =$$

$$= \frac{\|A_2A_3\|}{\|AA_2\| \cdot \|AA_3\|} = \ldots = \frac{\|A_{n-1}C\|}{\|AA_{n-1}\| \cdot \|AC\|}$$

(Dacă $n = 2$ se regăsește teorema bisectoarei.)

(Constantin Bulucea)

6.30. Fie H ortocentrul triunghiului ABC înscris în cercul de rază R și A', B', C' inversele punctelor A, B, C în inversiunea de pol H și putere R^2. Să se demonstreze că H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$ și că raza acestui cerc este $\frac{R}{2}$.

(Gh. Bucliu)

6.31. În triunghiul ABC notăm A', B', C' mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ și prin O centrul cercului circumscris. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor AOA', BOB', COC' mai au un punct comun înafara lui O.

(Examen pentru gradul II, septembrie, 1984)

Scanned with OKEN Scanner

6.32. Fie ABC un triunghi echilateral. O dreaptă variabilă trecînd prin centrul triunghiului, O, taie a doua oară cercurile circumscrise triunghiurilor OAB, OBC și OCA respectiv în C', A', B'. Să se demonstreze că $\| OA' \|^2 + \| OB \|^2 + \| OC' \|^2 = 2 \| AB \|^2$.

(Marcel Țena)

6.33. Prin punctul P din plan se consideră trei cercuri care se retaie două cîte două în punctele A, B, C. Paralela prin P la AB intersectează cercul circumscris triunghiului PAB în C'; paralela prin P la AC intersectează cercul PAC în B'; paralela prin P la BC intersectează cercul PBC în A'. Arătați că patrulaterul $PA'B'C'$ este inscriptibil.

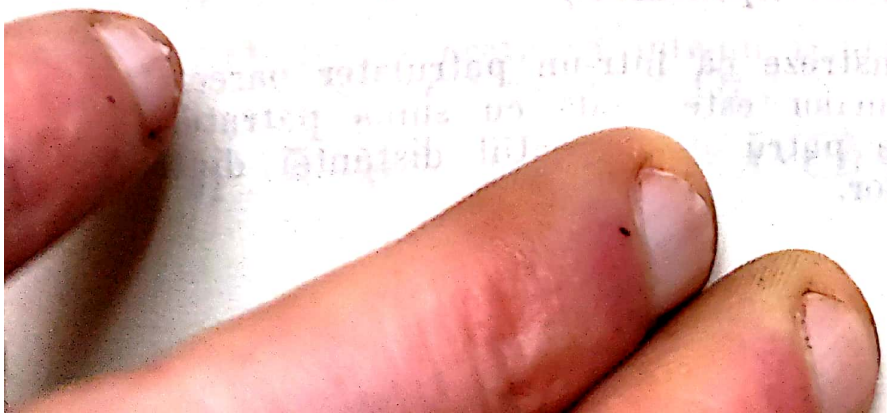
6.34. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $\| AB \| = \| AC \|$. Un cerc care este tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC și laturilor $| AB |$ în P și $| AC |$ în Q. Să se demonstreze că mijlocul segmentului $| PQ |$ este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

(A XX-a O.I.M., București, 1978)

6.35. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri înscrise în același cerc și astfel încît dreptele AA', BB', CC' sînt concurente într-un punct, altul decît centrul cercului, O. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor AOA', BOB', COC' formează un fascicul.

6.36. Mijloacele laturilor triunghiului ABC sînt A_1, B_1, C_1. Arătați că dreptele care trec prin unul din vîrfurile triunghiului $A_1B_1C_1$ și înjumătățesc perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$ slnt concurente în centrul cercului înscris triunghiului ABC.

(Matematikai Lapok, 1971)



Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 7

CALCUL VECTORIAL

7.1. Se dau vectorii $\vec{a} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - \vec{k}$ și $b = \vec{i} - \vec{j} + 3\,\vec{k}$. Să se calculeze:

a) Unghiul dintre diagonalele paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

b) Proiecția vectorului $\vec{a}$ pe direcția vectorului $\vec{b} \times \vec{c}$ unde $\vec{c} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$.

7.2. Fiind dați vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$, să se arate că:

$$[\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})] \cdot [\vec{d}(\vec{e} \times \vec{f})] = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{d} \\ \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{e}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{f} & \vec{b}\cdot\vec{f} & \vec{c}\cdot\vec{f} \end{vmatrix}$$

7.3. Fie triunghiul OBC, unde O este originea sistemului de coordonate din plan. Prin mijlocul lui $|BC|$ se duce o perpendiculară pe bisectoarea unghiului O. Să se arate că aceasta determină pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ vectorii $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ și respectiv $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$.

7.4. Să se arate că locul geometric al unui punct P ale cărui distanțe la două puncte fixe sînt într-un raport constant este un cerc. *(Cercul lui Apollonius.)*

7.5. Să se demonstreze că într-un patrulater oarecare suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor plus de patru ori pătratul distanței dintre mijloacele diagonalelor.

Scanned with OKEN Scanner

7.6. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc. Perpendiculara în B pe $|AB|$ taie cercul în P, iar pe $|AC|$ în M. Dreapta CP taie pe $|AB|$ în N. Să se arate că $|AP| \perp \perp |MN|$.

7.7. Fie triunghiul ABC între laturile căruia există relația $5\ a^2 = 2b^2 + 2c^2$. Notăm prin D piciorul medianei din A și cu M mijlocul ei. Să se arate că mediatoarea segmentului $|MD|$ trece prin ortocentrul H al triunghiului.

(V.V. Băghină)

7.8. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct în planul său. Notînd prin G centrul de greutate și O centrul cercului circumscris de rază R, să se demonstreze că:

a) $\|MA\|^2 + \|MB\|^2 + \|MC\|^2 = 3\|MG\|^2 + \|GA\|^2 + \|GB\|^2 + \|GC\|^2$.

b) $\|GO\|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$, a, b, c fiind lungimile laturilor triunghiului.

7.9. Fie triunghiul ABC și O un punct oarecare din planul său. Dacă A', B', C' sînt mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$ și $|AB|$ iar G centrul său de greutate să se demonstreze că avem relațiile:

a) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA}$

c) $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

d) $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

7.10. Se dau patru puncte fixe A, B, C și D în plan și M un punct mobil. Să se determine locul geometric al punctului M pentru care avem satisfăcute relațiile:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \text{const.}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$.

7.11. Să se arate că într-un triunghi ABC de laturi $\|BC\| = a$, $\|CA\| = b$, $\|AB\| = c$ avem relațiile:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se exprime în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ vectorii care coincid cu medianele triunghiului și să se arate că aceștia pot forma un triunghi.

c) Să se demonstreze concurența medianelor triunghiului.

7.12. Fie triunghiul ABC. Să se arate că

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC},$$

și să se calculeze aria sa în funcție de vectorii de poziție ai vîrfurilor.

7.13. Fie paralelogramul $ABCD$ și un punct oarecare M din spațiu. Să se arate că suma pătratelor distanțelor de la M la vîrfurile paralelogramului este egală cu de patru ori pătratul distanței de la M la punctul de intersecție al diagonalelor la care se adaugă jumătate din suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

7.14. Fie ABC un triunghi, H ortocentrul său, G centrul de greutate, O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris și O' centrul cercului lui Euler. Să se demonstreze relația $\| IH \|^2 + 9 \| IG \|^2 = 2 \| OI \|^2 + 8 \| IO' \|^2$.

(Concurs, Gazeta Matematică, 1906)

7.15. Fie o dreaptă fixă (d), M un punct variabil pe (d) și A un punct fix exterior dreptei. Să se determine locul geometric al punctului P care împarte segmentul $|AM|$ în raportul $\dfrac{\| MP \|}{\| AP \|} = K$.

7.16. Se consideră două cercuri (O) și (O'). Un punct M situat pe axa lor radicală se unește cu centrele cercurilor O și O'. Se ridică în O perpendiculara pe $|OM|$ și în O' perpendiculara pe $|O'M|$. Să se determine locul geometric al punctului de intersecție a acestor perpendiculare cînd M descrie axa radicală.

7.17. Centrul de greutate G al unui triunghi ABC este caracterizat orin $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, oricare ar fi punctul O din planul triunghiului. În particular G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

7.18. Fie punctele A_1, A_2, A_3 și B_1, B_2, B_3, B_4. Notăm cu M centrul de greutate al triunghiului $A_1A_2A_3$, cu N mijlocul segmentului $|B_1B_2|$, cu P mijlocul segmentului $|B_3B_4|$ cu R mijlocul segmentului $|NP|$, cu S punctul de pe segmentul $|MR|$ astfel ca $3\|MS\| = 4\|SR\|$ și O un punct oarecare. Să se arate că:

a) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = 3 \cdot \overrightarrow{OM}$.

b) $\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4} = 4\ \overrightarrow{OR}$.

c) $3 \cdot \overrightarrow{OM} + 4 \cdot \overrightarrow{OR} = 7 \cdot \overrightarrow{OS}$.

(Concurs de matematică, Buzău, 1976)

7.19. Fie $ABCD$ un patrulater convex, O_1 și O_2 mijloacele diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$. O condiție necesară și suficientă ca $ABCD$ să fie paralelogram este ca $4\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

(Marcel Chiriță)

7.20. Fie ABC un triunghi oarecare și D un punct pe latura $|BC|$. Dacă o dreaptă (Δ) intersectează laturile $|AB|$ și $|AC|$ ale triunghiului în punctele M și N și segmentul $|AD|$ în punctul O, atunci

$$\frac{\|DB\|}{\|DC\|} \cdot \frac{\|AM\|}{\|AN\|} = \frac{\|OM\|}{\|ON\|} \cdot \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$$

$$\frac{\|DC\|}{\|DB\|} \cdot \left(\frac{\|AD\|}{\|AO\|} - \frac{\|AB\|}{\|AM\|} \right) = \frac{\|AD\|}{\|AO\|} - \frac{\|AC\|}{\|AN\|}.$$

7.21. Fie un triunghi ABC și punctele $A' \in |BC|$, $B' \in |CA|$, $C' \in |AB|$ astfel încît $\frac{\|BA'\|}{\|A'C\|} = \frac{\|CB'\|}{\|B'A\|} = \frac{\|AC'\|}{\|C'B\|}$. Arătați că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate.

7.22. Fie a, b, c lungimile laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale unui triunghi ABC și O un punct din planul triunghiului. Se consideră semidreptele $[Ox$, $[Oy$, $[Oz$ perpendiculare pe BC, CA, respectiv AB, nesituate toate în același semiplan pe care se iau punctele A', B', respectiv C' așa încît $\|OA'\| = a$, $\|OB'\| = b$, $\|OC'\| = c$. Arătați că punctul O este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

7.23. Fie H ortocentrul triunghiului oarecare ABC. Pe semidreapta $[AH$ se consideră punctul A_1 astfel încît $\| AA_1 \| = \| BC \|$. Analog se construiesc punctele B_1 și C_1. Arătați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

7.24. Fie un hexagon $ABCDEF$ și M, N, P, Q, R, S, mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$, $|EF|$, $|FA|$. Să se arate că o condiție necesară și suficientă pentru ca $\| RN \|^2 = \| MQ \|^2 + \| PS \|^2$ este ca MQ și PS să fie perpendiculare.

(Laurențiu Panaitopol)

7.25. a) Să se arate că punctele coplanare A, B, C, D sînt (în această ordine) vîrfurile unui paralelogram dacă și numai dacă

$$\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CD \|^2 + \| DA \|^2 = \| AC \|^2 + \| BD \|^2.$$

b) Să se arate că segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse într-un patrulater convex pot fi laturile unui paralelogram avînd ca diagonale diagonalele patrulaterului.

(Aristide Leonte)

7.26. Un patrulater convex $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă suma pătratelor lungimilor diagonalelor este media aritmetică a pătratelor sumelor lungimilor laturilor opuse.

(A.V. Mihai)

7.27. În planul unui triunghi ABC se consideră un punct mobil M care se deplasează pe dreapta MA spre vîrful A. La mijlocul distanței se oprește și se deplasează rectiliniu către B, la mijlocul distanței se oprește din nou și se deplasează rectiliniu către C, apoi urmează același drum către A și așa mai departe. Să se arate că punctul se apropie oricît de mult de vîrfurile unui triunghi bine determinat a cărui arie este 1/7 din aria triunghiului ABC.

(Baraj, 1981)

7.28. Se consideră două cercuri (C_1) și (C_2) situate în două plane paralele. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $|M_1M_2|$ atunci cînd M_1 parcurge cercul (C_1) și M_2 parcurge cercul (C_2).

(I. Tomescu)

Scanned with OKEN Scanner

7.29. Date punctele fixe A și B, să se determine locul geometric al punctului variabil M pentru care avem $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MB} = \vec{a}$ (constant).

7.30. Dacă într-un tetraedru $ABCD$ două perechi de muchii opuse sînt ortogonale, să se arate că și cea de a treia pereche de muchii opuse este formată din drepte ortogonale.

7.31. Două pătrate $ABCD$ și $ABEF$ au latura comună $|AB|$, iar planurile lor sînt perpendiculare. Se iau pe diagonalele $|AC|$ și $|BF|$ respectiv segmentele $|AM| \equiv |BN|$. a) Să se arate că dreapta MN rămîne paralelă cu planul $CDFE$. b) Care este locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$? c) Să se arate că în poziția în care lungimea segmentului $|MN|$ este cea mai mică, $|MN|$ este perpendicular pe $|BF|$ și $|AC|$ și este paralel cu $|DE|$.

(Gh. D. Simionescu, G.M.F.-B, nr. 3, 1963)

7.32. Fie $ABCD$ un pătrat și M, N, P, Q puncte arbitrare pe dreptele AB, BC, CD, respectiv DA. Dacă O este centrul pătratului atunci

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OM}$$ este constant.

(Ionel Della)

7.33. Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cu $\|\overrightarrow{AB}\| = b$, $\|\overrightarrow{AC}\| = c$, $m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \alpha$ și fie $\overrightarrow{AD}$ rezultanta lor. Demonstrați că pentru orice punct M din planul $(ABCD)$, diferit de A, B, C, D are loc

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD}}{bc}$$

(Ștefan Tache)

7.34. Se dau două triunghiuri echilaterale ABC și $A'B'C'$ situate în același plan. Din centrul O al triunghiului ABC construim vectorii $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ echipolenți cu $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$,

Scanned with OKEN Scanner

respectiv $\overrightarrow{CC'}$. Să se arate că triunghiul MNP este echilateral.

(Dorinel Anca)

7.35. Pe diagonalele unui paralelogram se construiesc triunghiurile echilaterale ACM și BDN. Arătați că MN este perpendiculară pe două laturi opuse ale paralelogramului $ABCD$.

(Laura Constantinescu)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 8

GEOMETRIE ANALITICĂ

8.1. Un paralelogram are centrul în punctul (1, 2) și două laturi de ecuații $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. Să se scrie ecuațiile celorlalte laturi.

8.2. Să se scrie ecuația unei drepte care trece prin punctul $M(-3, 2)$ și a cărei distanță la origine este egală cu 4.

8.3. Se dau laturile unui triunghi

$$(AB) \equiv x - y + 1 = 0, \quad (BC) \equiv 2x + y - 4 = 0,$$
$$(CA) \equiv 4x - y - 8 = 0$$

Se cere: a) să se afle coordonatele unui punct situat în interiorul acestui triunghi astfel încît să determine împreună cu vîrfurile triunghiului dat trei triunghiuri de arie egală; b) să se scrie ecuațiile medianelor și înălțimilor triunghiului dat.

8.4. Să se verifice că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ de vîrfuri $A(7, 1)$, $B(7, 4)$, $C(3, 1)$, $A'\left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$, $B'(2, 5)$, $C'(2, 0)$ sînt congruente. Să se determine izometria J cu proprietatea $J(ABC) = A'B'C'$.

(Examen de admitere, 1983)

8.5. Se dau dreptele

$$(d_1) \equiv 3x + 4y - 11 = 0, \quad (d_2) \equiv 7x - 24y - 33 = 0;$$
$$(d_3) \equiv 12x - 5y + 25 = 0$$

Să se determine: a) coordonatele vîrfurilor triunghiului format de aceste drepte; b) ecuațiile bisectoarelor interioare și exterioare; c) ecuațiile dreptelor care trec prin vîrfurile acestui triunghi și sînt paralele cu laturile opuse.

Scanned with OKEN Scanner

8.6. Să se afle locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi dat și care au una din laturi situată pe baza triunghiului.

8.7. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC și un punct P variabil pe ipotenuza BC. Prin P se duce o paralelă la latura AB care intersectează latura AC în N, iar paralela la AC intersectează pe AB în M. Perpendiculara în P pe BC intersectează dreptele AB și AC în D respectiv E. Dreptele BE și CD se intersectează în F. Paralelele din B și C la AC respectiv AB intersectează dreptele CM și BN respectiv în G și H. Să se demonstreze că punctele G, H, A, F sînt coliniare.

8.8. Se consideră în plan dreptunghiul variabil de vîrfuri

$$O(0, 0),\ A(\alpha, 0),\ B(\alpha, \beta),\ C(0, \beta) \text{ unde } \frac{\beta}{\alpha} = k \text{ (const.)}$$

Se cere: a) Să se determine locurile geometrice al mijloacelor M și N ale laturilor $|AB|$ și $|BC|$. b) Să se arate că $\|OM\|^2 + \|ON\|^2 = 5\,\|MN\|^2$; c) Să se calculeze aria triunghiului OMN. d) Pentru $\alpha = 4$ și $\beta = 5$ să se scrie ecuația unei drepte paralelă cu dreapta AC și care se află la distanța 4 de punctul $P(6, -3)$.

8.9. Într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale se consideră dreapta (d) de ecuație $3x + 4y - 6 = 0$ și punctul $A(3, -1)$.

Se cere: a) Să se determine două drepte care trec prin A și fac cu dreapta dată un unghi de 45°; b) Să se scrie ecuațiile a două drepte care împreună cu dreptele de la punctul a) formează un pătrat în care dreapta (d) este una din diagonale.

8.10. În planul xOy se consideră un punct P fix. Prin P se duc două drepte variabile care intersectează axele de coordonate în A_1, B_1 respectiv A_2, B_2. Să se determine locul geometric al punctului de intersecție al dreptelor A_1B_2 și A_2B_1.

8.11. În plan se consideră trei drepte a căror ecuație comună este $x^3 + 2\lambda x^2 y + y^3 = 0$

Să se determine λ astfel încît una din cele trei drepte să fie bisectoarea unghiului format din celelalte două.

Scanned with OKEN Scanner

8.12. Fie un dreptunghi $AOBC$. O dreaptă (d) variabilă care trece prin O taie dreptele AB și BC în N și M. Simetrica dreptei (d) față de OA intersectează pe AB și BC în Q și, respectiv, P. Să se afle locul geometric al intersecției dreptelor PN și QM.

8.13. Fie reperul ortonormat xOy și dreptunghiul OA_1AA_2 avînd vîrfurile A_1 pe Ox și A_2 pe Oy, cu perimetrul $2a$, $a > 0$ fiind constant. a) Să se arate că perpendicularele din vîrful A pe diagonala A_1A_2 trec printr-un punct fix, ale cărui coordonate se cer. b) Fie B un punct oarecare din plan, diferit de A. Să se arate că dreptele AB, A_1B_2, A_2B_1 sînt concurente, B_1 și B_2 fiind proiecțiile punctului B pe Ox și Oy. c) Dacă triunghiurile OA_1B_2 și OA_2B_1 sînt echivalente, atunci dreapta AB trece prin punctul O.

8.14. Față de un sistem ortonormat se consideră punctele fixe $A(a, 0)$ și $B(b, 0)$. Prin aceste puncte se duc două drepte care se intersectează într-un punct mobil pe axa Oy, M. a) Prin A se duce paralela la BM, iar prin B paralela la AM care se intersectează în punctul N. Să se demonstreze că dreapta MN trece printr-un punct fix. b) Perpendiculara în A pe AM și perpendiculara în B pe BM se taie în L. Găsiți locul geometric al punctului L. c) Determinați locul geometric al centrului de greutate al triunghiului ABM.

8.15. Se dau două axe rectangulare Ox și Oy și un punct $P(a, b)$. Prin acest punct se duc două drepte perpendiculare, una întîlnind pe Ox în A și cealaltă pe Oy în B. Să se găsească locul geometric al proiecției punctului P pe dreapta AB.

8.16. Se consideră punctele $A(a, 0)$, $B\left(-\frac{a}{3}, 0\right)$, $C\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $I(a/3, 2a/3)$ într-un sistem ortonormat. Se prelungește segmentul $|BC|$ cu segmentul $|CD|$ astfel încît $\|CD\| = \|CA\|$, punctul C fiind între B și D. Notăm prin L mijlocul segmentului $|BC|$ și prin I_1, I_2, I_3 proiecțiile punctului I pe AB, BC, CA. Să se arate că: a) Punctele I_1, I_2, I_3 sînt coliniare. b) Paralela prin B la AD, bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{CI_1L}$ și AC sînt concurente într-un

Scanned with OKEN Scanner

punct E. c) Oricare ar fi punctul P pe segmentul $|CI|$, are loc aria $[PCD] = 3$ aria $[PCE]$.

8.17. Să se scrie ecuația cercului înscris în triunghiul de laturi $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$ și $y + 1 = 0$.

8.18. Să se scrie formulele de transformare ale axelor de coordonate astfel încît dreptele $2x - 3y + 1 = 0$ și $3x + 2y - 2 = 0$ să fie noile axe O_1x_1, O_1y_1, iar coordonatele noii origini O_1 să fie pozitive.

8.19. Se dau două cercuri fixe. Să se determine locul geometric al centrului cercului ale cărui axe radicale cu cele două cercuri date trec prin două puncte fixe.

8.20. Se dă un cerc tangent axei Ox în origine și un punct P mobil pe axa Ox. Din punctul P se duce cea de a doua tangentă la cerc. Această tangentă atinge cercul în punctul Q. Se cere locul geometric al ortocentrului H al triunghiului OPQ.

(Admitere, Fac. de matem.-mec. Buc., 1974)

8.21. Se consideră un cerc (O) în plan și un punct A exterior lui. Fie AT_1 și AT_2 tangentele duse din A la cerc și (d) o dreaptă oarecare ce trece prin A și care intersectează diametrul cercului perpendicular pe OA în C și tangentele la cerc paralele cu acest diametru în B și D. Dacă (Γ) este hiperbola cu centrul în C care trece prin B și ale cărei asimptote sînt paralele cu AT_1 și AT_2, să se arate că cercul (O) este bitangent hiperbolei (Γ).

8.22. Într-un sistem de axe ortogonale se consideră punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și $P(0, p)$. a) Fie B' simetricul lui B față de O și A' și Q mijloacele segmentelor $|OA|$ respectiv $|AP|$ și R intersecția dreptei BQ cu axa Ox. Să se arate că paralela prin R la Oy, OQ și $A'B'$ sînt trei drepte concurente într-un punct S, ale cărui coordonate se cer. b) Să se determine poziția punctului P astfel ca tangenta în P la cercul circumscris triunghiului ABP să fie perpendiculară pe dreapta AB. c) Să se scrie ecuația cercului (C) care trece prin origine și este tangent dreptei AP în A. d) Cercul (C) intersectează a doua oară axa Oy în T. Să se găsească locul geometric al intersecției tangentei în O la cercul (C) cu paralela la Ox prin T, cînd P descrie axa Oy.

(G.M.B., 2 172)

Scanned with OKEN Scanner

8.23. Se consideră în planul xOy un cerc (C) fix și un punct fix M. Să se demonstreze că cercurile care trec prin M și sînt ortogonale cercului dat formează un fascicul. Dacă M' este cel de al doilea punct de bază al fasciculului, să se determine relația de legătură dintre M și M'.

8.24. Pe axele perpendiculare Ox, Oy se iau punctele A și respectiv B și fie (d) o dreaptă oarecare în planul axelor. Vîrfurile triunghiului AOB se proiectează pe dreapta (d) în punctele A', O', B'. a) Să se arate că perpendicularele din A', O', B' pe dreptele OB, AB, OA sînt concurente într-un punct K. b) Dacă dreapta (d) se deplasează paralel cu o direcție dată, să se găsească locul geometric al punctului K. c) Dacă punctele A, B sînt variabile astfel încît segmentul $|AB|$ rămîne constant ca lungime, să se arate că locul lui K este un cerc, dreapta (d) rămînînd fixă.

(Concurs matematică, 1966)

8.25. Se consideră un sistem de axe rectangulare Ox și Oy și punctele $A(-a, -a)$, $B(a, -a)$, $C(a, a)$, $D(-a, a)$, a fiind o constantă. Prin punctul C se duce o dreaptă care taie dreapta AB în punctul E și dreapta AD în punctul F. a) Să se arate că dreapta care unește punctul E cu mijlocul I al segmentului $|DF|$ este tangentă cercului înscris în pătratul $ABCD$. b) Să se arate că dreapta IE intersectează dreapta BF într-un punct H situat pe cercul circumscris pătratului $ABCD$. c) În cazul în care triunghiul AEF este isoscel, să se calculeze ariile triunghiurilor FIH și HBE.

8.26. Pe o dreaptă (d) se iau punctele A și B fixe. De aceeași parte a dreptei (d) se consideră cercuri tangente în A și B dreptei (d) și tangente între ele, avînd centrele în O_a și O_b. a) Să se arate că dreapta O_aO_b rămîne tangentă unui cerc fix. b) Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor AO_b și O_aB. c) Să se afle locul geometric al punctului de tangență al celor două cercuri.

8.27. Fie xOy un sistem rectangular de axe, A un punct fix pe axa Ox, M un punct mobil pe axa Oy. a) Să se găsească locul geometric pentru vîrfurile N și P ale pătratului $AMNP$, precum și locul centrului acestui pătrat. b) Să se arate că cercurile circumscrise pătratelor $AMNP$, cînd M este variabil, formează un fascicul de cercuri. Să se găsească cercul de rază minimă din fascicul. c) Cercul $AMNP$ intersectează axa Ox în punctul M' diferit de A și axa Oy în punctul A'

Scanned with OKEN Scanner

diferit de M. Să se găsească locul geometric al punctului $Q = AM \cap A'M'$. d) Dreapta OQ taie cercul $AMNP$ în U și V. Să se arate că punctele O, U, P, V formează o diviziune armonică. e) Tangentele în punctele A și M la cercul $AMNP$ se taie în T. Determinați locul geometric al punctului T.

8.28. Într-un cerc cu centrul O, tangenta în punctul variabil M taie diametrii fiși $|AB|$ și $|A'B'|$, perpendiculari, în punctele P și Q. OM intersectează a doua oară cercul în punctul N. Paralela prin M la $A'B'$ taie cercul în E, iar perpendiculara din O pe QN intersectează tangenta în M la cerc în punctul F. a) Să se arate că punctele E, F, N sînt coliniare. b) Secanta comună cercurilor circumscris triunghiului POQ și celui dat intersectează diametrii $|AB|$ și $|A'B'|$ în punctele R și S. Să se arate că segmentul $|RS|$ are lungime constantă.

8.29. Fie $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ fixat și $\lambda \in \mathbf{R}$. variabil. Fie punctele fixe $A(0, \alpha)$ $B(0, -\alpha)$ și mulțimea $\mathscr{C}$ a cercurilor $C(\lambda)$ de ecuație

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - \alpha^2 = 0$$

a) Să se arate că mulțimea $\mathscr{C}$ este un fascicul de cercuri, care să fie precizat. Fiind dat un cerc $C(\lambda)$, $\lambda \neq 0$, să se arate că există un cerc $C(\lambda')$ și numai unul, ortogonal cercului $C(\lambda)$. Să se exprime λ' în funcție de λ și α. Să se studieze cazul $\lambda = 0$. b) Fie $\mathscr{J}$ inversiunea de pol B și putere $4\alpha^2$. Să se arate că această inversiune transformă cele două cercuri ortogonale $C(\lambda)$ și $C(\lambda')$ în două drepte perpendiculare trecînd prin A, (Δ) și (Δ'). c) (D) fiind o tangentă comună exterioară celor două cercuri ortogonale $C(\lambda)$ și $C(\lambda')$, fie Ω cercul invers lui (D) în inversiunea $\mathscr{J}$ și ω centrul acestuia. Să se arate că raportul distanțelor de la punctul ω la punctele A și B este constant cînd λ este variabil. Să se deducă locul geometric Γ al punctului ω, precizînd elementele acestui loc geometric. d) Să se calculeze puterea punctului B față de cercul Γ și să se determine centrul și raza cercului Γ', inversul cercului Γ în inversiunea $\mathscr{J}$. Însemnînd prin ω' inversul lui ω, să se arate că dreapta (D) este mediatoarea segmentului $B\omega'$. Să se deducă că dreapta (D) rămîne tangentă la o conică, a cărei ecuație se cere.

(Bacalaureat, Paris, 1965)

Scanned with OKEN Scanner

8.30. Se consideră elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ și o tangentă (d) oarecare într-un punct al ei. Să se arate că: a) Există două cercuri care trec prin focarele elipsei și sînt tangente dreptei (d). b) Punctele de contact ale acestor cercuri cu dreapta (d) sînt situate pe tangentele în vîrfurile axei mici ale elipsei. c) Cercurile de la punctul (a) se intersectează sub un unghi constant.

8.31. Fie elipsa (E) raportată la axele ei, cu semiaxele $\|OA\|=2a$, și $\|OB\|=a$. Fie de asemenea cercul (C) de rază a tangent axei $x'x$ în origine. Se notează cu P unul din punctele în care o dreaptă (d) ce trece prin origine și cu coeficientul unghiular λ intersectează (E) și cu Q punctul diferit de origine în care (d) intersectează cercul (C). a) Să se determine poziția dreptei (d) așa încît $\|OP\|\cdot\|OQ\|=k$. Discuție după $k\in\mathbf{R}$. b) Să se determine poziția punctului Q de pe cercul (C) astfel încît să existe relația $\|OA\|=h\|AQ\|$ cu h număr real. *Discuție.* c) Dacă $|OP_1|$ este perpendicular pe $|OP)|$, $P_1\in(E)$ să se arate că expresia $S=\frac{1}{\|OP\|^2}+\frac{1}{\|OP_1\|^2}$ nu depinde de poziția dreptei (d).

(Concurs mat., 1970)

8.32. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangentele perpendiculare la o parabolă dată.

(Examen de admitere, 1982)

8.33. Într-un sistem de axe rectangulare se consideră parabolele (P_1) și (P_2) de ecuații $x^2-2py=0$, $x^2+2py=0$. Dreapta (d) este tangentă parabolei (P_2). Să se găsească locul polului M al dreptei (d) în raport cu (P_1).

(O.I.M., București, 1969)

8.34. Să se scrie ecuația unei parabole, știind că tangenta paralelă cu dreapta $3x-2y+1=0$ trece prin punctul $P(2, 5)$. Dacă $M(\alpha, \beta)$ este un punct variabil pe parabola determinată, să se determine locul geometric al proiecțiilor focarului parabolei pe normala în M.

Scanned with OKEN Scanner

8.35. Se consideră parabola $y^2 = 2px$ raportată la un sistem de axe ortogonale Ox, Oy. Prin focarul F se duce o secantă care intersectează parabola dată în punctele $M_1(x_1\ y_1)$ și $M_2(x_2,\ y_2)$. a) Să se arate că $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$ și $y_1y_2 = -p^2$. b) Să se arate că tangentele în M_1 și M_2 la parabolă se intersectează într-un punct P situat pe directoarea parabolei, iar paralela dusă prin P la axa Ox trece prin mijlocul lui $|M_1\ M_2|$. c) Tangentele PM_1 și PM_2 sînt perpendiculare.

(Examen de admitere, Cluj-Napoca, 1971)

8.36. În planul raportat la reperul ortogonal xOy se consideră parabolele $(P) : y^2 = 2px$ și $(Q) : x^2 = 2qy$. Să se arate că: a) Locul geometric al ortocentrelor triunghiurilor circumscrise parabolei (P) este o dreaptă. b) Dacă parametrii p și q ai parabolelor variază astfel încît tangenta comună acestor parabole este tangentă hiperbolei $8xy = 1$, atunci cel de-al doilea punct de intersecție al parabolelor (P) și (Q) descrie o hiperbolă.

(Examen admitere, Fac. mat.-mec., Buc., 1972)

8.37. Să se scrie ecuația hiperbolei echilatere $x^2 - y^2 = a^2$ după rotirea axei ei cu un unghi de 45°.

8.38. Excentricitatea unei hiperbole este egală cu 3. Să se determine unghiul dintre asimptotele ei.

8.39. Se dă hiperbola de ecuație $x^2 - y^2 = 4$ și un punct P (1, 3). Se cere: a) Să se determine locul geometric al punctelor de intersecție a unui diametru cu perpendiculara coborîtă din punctul P pe diametrul conjugat acestuia. b) Să se determine diametrii conjugați ai hiperbolei care fac între ei un unghi de 45°.

8.40. Fie în planul xOy parabola (C) de ecuație $y^2 - 2px = 0$. a) Să se arate că pentru ca normalele în 3 puncte M_1, M_2, M_3 de pe parabolă să fie concurente este necesar și suficient ca centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ să fie pe axa Ox. b) Fie $M \in (C)$, (n) normala în M la (C), N a doua intersecție a normalei (n) cu (C). Fie $P \in (n)$ definit prin $\overline{PM} = k \cdot \overline{PN}$, k — număr real. Din P se duc normalele PM_1 și PM_2 la (C) diferite de (n), M_1 și M_2 fiind intersecțiile acestor normale cu (C). Să se deducă ecuația dreptei M_1M_2 în funcție de p, k și ordonata m a punctului M și

Scanned with OKEN Scanner

să se arate că această dreaptă are o direcție fixă atunci cînd P descrie dreapta (n). c) Fie (D_1), (D_2), (D_3) tangentele în M_1, M_2, $M_3 \in (C)$ și $A_1 = (D_2) \cap (D_3)$, iar A_2, A_3 analoagele punctului A_1. Se notează (D_1'), (D_2'), (D_3') paralelele duse prin A_1, A_2, A_3 la (D_1), (D_2), (D_3), respectiv și $N_1 = (D_2') \cap (D_3')$, și N_2, N_3 analoagele. Să se arate că dreptele M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 sînt paralele, iar $N_1 \in M_2M_3$, $N_2 \in M_3M_1$, $N_3 \in M_1M_2$.

(Admitere, Facultatea de matematică, 1969)

8.41. În planul raportat la un sistem ortonormat xOy se consideră parabola $2y = x^2$. Fie un punct P pe parabolă. a) Să se determine în funcție de abscisa k a lui P coordonatele punctului T unde tangenta în P taie axa Ox, aria triunghiului OTP și coordonatele centrului de greutate G al aceluiași triunghi. b) Să se afle locul geometric al punctului G cînd P descrie parabola dată. c) Să se arate că înălțimea triunghiului OTP corespunzătoare lui T trece printr-un punct fix.

(Admitere, Facultatea de matematică, 1976)

8.42. Fie M un punct mobil pe o parabolă de vîrf O și parametru p, tangenta în M taie axa parabolei în T, normala în M taie axa în N, iar perpendiculara în M pe MO taie axa în U. a) Să se arate că are loc $2 \cdot \|OU\| - \|TN\| = 3p$. b) Să se arate că centrul de greutate al triunghiului TMN descrie o parabolă.

(N. Mihăileanu)

8.43. În triunghiul isoscel CAB, $\|CA\| = \|CB\|$ se consideră punctul mobil C_1 între A și B. Pe laturile $|CA|$ și $|CB|$ se consideră punctele B_1 și A_1 astfel încît $\|AB_1\| = \|AC_1\|$ și $\|BA_1\| = \|BC_1\|$. Să se arate că dreapta A_1B_1 rămîne tangentă unui arc de parabolă.

8.44. Se consideră o hiperbolă (I) și un punct P în planul acesteia. Se duce prin P cîte o paralelă la asimptotele hiperbolei și fie M și N punctele de intersecție ale acestora cu hiperbola. a) Care este locul geometric al punctelor P care au proprietatea că dreapta MN trece prin centrul O al hiperbolei. b) Care este locul geometric al punctelor P pentru care dreapta MN este paralelă cu una din axele hiperbolei.

(Admitere, Facultatea de matematică-mecanică, București, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

8.45. Fie C un punct mobil pe axa Ox, iar OBC un triunghi isoscel cu $\| OB \| = \| BC \| = a$ — constant. a) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $| BC |$. b) Care este poziția punctului C pentru care dreapta BC este tangentă locului determinat la a).

(Admitere, Facultatea de matematică, Craiova, 1973)

8.46. Se consideră parabola (P) de ecuație $y^2 = 2px$. Fie A un punct al acestei parabole. a) Să se demonstreze că tangenta în A la parabola (P) este bisectoarea unghiului format de dreapta care trece prin A și prin focarul parabolei și de paralela prin A la axa parabolei. b) Fie B un alt punct al parabolei (P). Să se arate că locul mijlocului unei coarde variabile paralele cu AB este o paralelă la axa parabolei. c) Fie C un al treilea punct al parabolei (P). Să notăm cu A', B', C' intersecțiile tangentelor la parabola (P) în A, B, C. Să se arate că aria $[ABC] = 2$ aria $[A'B'C']$. d) Să se arate că patru puncte de pe parabola (C) sînt situate pe un cerc dacă și numai dacă suma ordonatelor lor este nulă.

(Admitere, Facultatea de matematică-mecanică, București, 1972)

8.47. Se consideră pe axa Ox a unui reper rectangular un punct fix $A(a, 0)$ și pe axa Oy un punct mobil $P(0, \lambda)$. a) Să se scrie ecuația cercului care trece prin A și este tangent în P la axa Oy. b) Să se găsească locul geometric al centrului cercului de la a). c) Acest cerc intersectează axa Ox pentru a doua oară în punctul Q. Să se afle locul geometric al centrului de greutate al triunghiului APQ.

8.48. În planul xOy se consideră un cerc de centru O și rază r. Fie G un punct arbitrar al cercului nesituat pe axa Ox. Se cere: a) Coordonatele punctului P în care tangenta în G la cerc intersectează axa Oy, în funcție de coordonatele lui G. b) Ecuația simetricei axei Oy față de tangenta GP. c) Dacă Q este intersecția tangentei GP cu axa Ox, să se găsească ecuația cercului înscris în triunghiul POQ. d) Fie A și B punctele în care cercul dat taie axa Ox și G centrul de greutate al unui triunghi ABC. Să se determine locul geometric al punctului C, dacă G descrie cercul dat.

(Admitere, Facultatea de matematică, Timișoara, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

8.49. Arătați că normalele la o parabolă în punctele Q, R se intersectează pe parabolă dacă și numai dacă QR trece printr-un anumit punct fix. Presupunînd că această condiție este îndeplinită, fie P punctul de intersecție al normalelor în Q și R. Dacă P' este intersecția parabolei cu paralela la axa parabolei care trece prin punctul de intersecție al dreptei QR cu directoarea, să se arate că PP' trece printr-un punct fix.

(Admitere la colegiile din Cambridge, Marea Britanie)

8.50. Fie dreapta (d) de ecuație $y = mx + n$ și Ω simetricul originii axelor de coordonate O în raport cu dreapta (d), iar A, B, M proiecțiile punctului Ω respectiv pe Ox, Oy, AB. Presupunînd m constant și n variabil, se cere: a) Locul geometric al punctului M. b) Știind că locul geometric este o dreaptă (d'), să se determine m astfel ca unghiul dreptelor (d) și (d') să fie $\frac{\pi}{3}$.

8.51. Față de un sistem de axe ortogonale xOy se consideră cercul C de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$. Se consideră cercul C' cu centrul într-un punct variabil M al cercului C și tangent axei Ox. Fie N punctul de tangență, iar P și Q punctele de intersecție ale cercurilor C și C'. Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor MN și PQ.

8.52. Fie elipsa de ecuație $b_1^2x^2 + a_1^2y^2 - a_1^2b_1^2 = 0$. În această elipsă se înscrie dreptunghiul de arie maximă, ale cărui laturi au lungimile $2x_0$ (cea paralelă cu axa Ox) și $2y_0$ (cea paralelă cu Oy). a) Să se arate că $b_1x_0 = a_1y_0$ și $2S_e = \pi S_{\max}$ unde S_e este aria elipsei, iar $S_{\max}$ este aria dreptunghiului. b) În dreptunghiul de arie maximă se înscrie o nouă elipsă avînd aceleași axe de simetrie cu dreptunghiul, iar în aceasta se consideră dreptunghiul de arie maximă și procedeul de repetă de n ori. Notăm prin S_n aria elipsei obținute la pasul n și prin S_n' aria dreptunghiului înscris în elipsa respectivă. Să se arate că

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} S_k = 2S_1 \text{ și } \lim_n \sum_{k=1}^{n} S_k' = 2S_1'$$

(Th. Ghindă)

Scanned with OKEN Scanner

8.53. Fie xOy un sistem rectangular de axe și fie dată o matrice $M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$. Pentru un punct $P(x, y)$ considerăm punctul $P'(x', y')$ unde $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$. Definim aplicația T a planului în el însuși prin $T(P) = P'$. a) Arătați că aplicația T este injectivă dacă și numai dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. b) Aplicația T este injectivă dacă și numai dacă este surjectivă. c) Presupunem condiția de mai sus îndeplinită. Arătați că dacă punctul P descrie o dreaptă atunci punctul P', transformatul lui P, descrie o dreaptă. Se zice că transformarea T aplică drepte în drepte. De aceea o transformare T definită ca mai sus se numește transformare afină. d) Demonstrați că mulțimea tuturor transformărilor afine formează un grup. e) Demonstrați că o transformare afină invariază raportul ariilor: pentru orice triunghi ABC, $A'B'C'$ fiind triunghiul având vîrfurile transformatele punctelor A, B, C, raportul ariilor $A'B'C'$ și ABC este constant, anume $a_1b_2 - a_2b_1$. f) Demonstrați că transformările afine pentru care acest raport este ± 1 formează un subgrup al grupului afin. g) Arătați că pentru ca o transformare afină să păstreze distanțele este necesar și suficient ca matricea care o determină să fie de una din formele

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & c_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & c_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & c_1 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & c_2 \end{bmatrix}.$$

Arătați că aceste transformări formează un subgrup al grupului afin — subgrupul congruențelor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 9
GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

9.1. Fiind date două drepte necoplanare, există exact două plane paralele care conțin cîte una din cele două drepte.

9.2. Arătați că fiind date două drepte oarecare în spațiu, există o dreaptă și numai una care le intersectează și este perpendiculară pe fiecare (perpendiculara comună celor două drepte).

9.3. a) Fie α, β două plane diferite care au un punct comun. Arătați că există un plan γ astfel încît intersecțiile lui cu α și β să fie două drepte perpendiculare. b) Fie $[Ox$, $[Oy$ două semidrepte cu aceeași origine, O. Arătați că există un plan astfel încît unghiul $\widehat{Ox, Oy}$ se proiectează pe acest plan după un unghi drept.

9.4. a) Fie d_1 și d_2 două drepte necoplanare. Să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $|A_1A_2|$ cînd A_1 parcurge dreapta d_1 iar A_2 parcurge dreapta d_2. b) În ipoteza suplimentară că d_1 și d_2 sînt perpendiculare, să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $|A_1A_2|$ dacă $\| A_1A_2 \| = l$ (constant).

9.5. Să se arate că proiecțiile ortogonale a două drepte din spațiu pe un plan paralel cu perpendiculara lor comună sînt două drepte paralele.

9.6. Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte în spațiu încît oricare două nu sînt în același plan (se spune că dreptele d_1, d_2, d_3 sînt oarecare în spațiu). a) Să se arate că există cel mult o dreaptă (Δ) care se sprijină pe dreptele d_1 și d_2 și este paralelă cu d_3. b) Dacă A și B sînt două puncte fixe pe d_1 și α este un plan mobil care conține d_1, notînd M și N punctele în care α intersectează dreptele d_2 și d_3, să se afle locul geometric

Scanned with OKEN Scanner

al intersecției dreptelor AM și BN. c) Care este locul geometric al intersecției dintre AN și BM.

(Enunț modificat al unei probleme a lui Ilie Stănescu)

9.7. Fie un diedru format de semiplanele (π_1) și (π_2), avînd muchia d, O un punct pe d și $[OP$ semidreapta situată în planul bisector al diedrului, perpendiculară pe d. Un plan α care conține pe $[OP$ intersectează semiplanele (π_1) și (π_2) după semidreptele d_1 și respectiv d_2. Arătați că $|OP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{d_1, d_2}$.

9.8. Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare și punctele $A_1 \in |OA|$, $B_1 \in |OB|$ $C_1 \in |OC|$ Notăm $A_2 = |BC_1| \cap |CB_1|$ și B_2, C_2 analoagele lui A_2, $A_3 = |OA_2| \cap |BC|$ și B_3, C_3 analoagele lui A_3. Demonstrați că: a) Dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sînt concurente într-un punct P; b) Dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sînt concurente într-un punct Q; c) Dreptele AA_3, BB_3, CC_3 sînt concurente într-un punct R; d) Punctele O, P, Q, R sînt coliniare.

9.9. Fie $[ABCD]$ un tetraedru oarecare. Muchiile $|AB|$ și $|CD|$ se numesc muchii opuse. Există trei perechi de muchii opuse. a) Arătați că segmentele cu extremitățile în mijloacele a două muchii opuse sînt concurente într-un punct G, mijlocul fiecăruia; b) Planele determinate de o muchie și mijlocul muchiei opuse concură în punctul G. c) Fie G_a centrul de greutate al feței $[BCD]$, G_b, G_c, G_d analoagele lui G_a. Atunci segmentele $|AG_a|$, $|BG_b|$, $|CG_c|$, $|DG_a|$ sînt concurente în G; d) Au loc relațiile

$$\frac{\|GG_a\|}{\|AG_a\|} = \frac{\|GG_b\|}{\|BG_b\|} = \ldots = \frac{1}{4};$$

e) Piramidele $[GABC,]$ $[GBCD,]$ $[GACD,]$ $[GABD]$ au volume egale.

9.10. Se dau două drepte concurente d_1 și d_2 și două puncte A, B în afara planului celor două drepte. a) Să se construiască un tetraedru $[ABCD]$ în care $C \in d_1$ și $D \in d_2$ astfel ca muchiile opuse $|AB|$, $|CD|$ să fie perpendiculare. Există o infinitate de astfel de tetraedre. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului care unește mijlocul lui $|AB|$ cu mijlocul lui $|CD|$; b) Să se construiască tetra-

Scanned with OKEN Scanner

edrul în care muchiile opuse $|AB|$ și $|CD|$ sînt perpendiculare și congruente.

(Gh. D. Simionescu)

9.11. Se dă un tetraedru $[ABCD]$. a) Să se demonstreze că paralelele duse prin B, C, D respectiv la medianele care pleacă din A ale fețelor opuse se intersectează într-un punct A_1. Analog se obțin punctele B_1, C_1, D_1. b) Să se exprime volumul tetraedrului $[A_1B_1C_1D_1]$ în funcție de volumul tetraedrului dat.

(Gh. D. Simionescu)

9.12. Fie A și B două puncte în spațiu, fixate. Să se găsească locul geometric al punctelor M cu proprietatea $\|MA\|^2 = \|AB\| \cdot \|MP\|$ unde P este proiecția lui M pe dreapta AB.

(Adrian Ghioca)

9.13. Fie ABC un triunghi dreptunghic care are ipotenuza $|BC|$ conținută într-un plan (π), iar vîrful A este exterior acestui plan. Fie M proiecția lui A pe planul (π) și N piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC. Notăm cu β, γ unghiurile făcute de catetele $|AC|$ și $|AB|$ cu planul (π) și cu x unghiul diedru dintre planul triunghiului și planul (π). Să se arate că: a) Planele AMN și ABC sînt perpendiculare; b) $\cos^2 x = \cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma)$.

(Marcel Țena)

9.14. Fie cubul $[ABCD\ A'B'C'D']$ cu bazele $ABCD$, $A'B'C'D'$ și muchiile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ iar M, N, P mijloacele muchiilor $|AA'|$, $|BC|$, $|C'D'|$. Să se determine forma secțiunii realizate în cub de planul MNP și să se evalueze aria acestei secțiuni în funcție de latura a a cubului.

9.15. În tetraedrul $[ABCD]$ muchiile $|AB|$ și $|CD|$ sînt perpendiculare. a) Arătați ca înălțimile din A și B sînt concurente, înălțimile din C și D sînt concurente. b) Dacă două perechi de muchii opuse sînt formate din perpendiculare, atunci și a treia pereche este formată din perpendiculare; în acest caz toate înălțimile tetraedrului sînt concurente.

9.16. Fie $[SABC]$ o piramidă triunghiulară oarecare. O sferă care trece prin punctele A, B, C intersectează a doua

Scanned with OKEN Scanner

oară dreptele SA, SB, SC în punctele M, N, P. Notăm cu O centrul sferei circumscrise tetraedrului $|SMNP|$. Să se arate că SO este perpendiculară pe planul ABC.

(Mihai Miculița)

9.17. Fie $[OABC]$ un tetraedru în care muchia $|AO|$ este perpendiculară pe planul ABC. Dacă O_b și O_c sînt proiecțiile punctului O pe dreptele AB și respectiv AC, atunci patrulaterul BO_bO_cC este inscriptibil.

9.18. Pe muchiile Ox, Oy, Oz ale triedrului tridreptunghic $Oxyz$ se iau respectiv punctele A, B, C și se notează $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$. Conurile cu vîrfurile B și C circumscrise sferei (S) cu diametrul $|OA|$ au drept cercuri de contact (Γ_b) și (Γ_c) cu centrele O_b și O_c. Se cere: a) Să se determine razele r_b și r_c ale cercurilor de contact în funcție de a, b, c; b) Să se demonstreze că punctele O_b O_c, B, C se găsesc pe un cerc; c) Să se determine centrul sferei (Σ) care trece prin punctele O, B, C, O_b, O_c; d) Să se calculeze raza R a cercului de intersecție a sferelor (S) și (Σ); e) Presupunînd $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ (constant) să se determine valoarea cea mai mare pe care o poate lua R și în ce condiții are loc acest maxim.

(Gh. D. Simionescu)

9.19. Se consideră patru sfere de aceeași rază r așezate în piramidă astfel că fiecare dintre ele este tangentă celorlalte trei. a) Să se determine raza sferei circumscrise celor patru sfere; b) Să se determine latura tetraedrului regulat definit de punctele de contact ale sferei circumscrise cu cele patru sfere.

(Admitere, Facultatea de matematică, Iași, 1971)

9.20. Fie triedrul tridreptunghic $Oxyz$ pe ale cărui muchii se iau punctele fixe $A \in |Ox$, $B \in |Oy$, $C \in |Oz$ astfel încît $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$. Pe segmentul $|OA|$ se consideră punctul mobil M care se proiectează pe AB și AC respectiv în N și P. a) Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $|NP|$; b) Să se determine unghiul $\widehat{NMP}$.

(Concurs de matematică, 1975)

9.21. Două piramide $[SABC]$ și $[VABC]$ au muchiile astfel ca $\|SA\| = \|SB\| = \|SC\|$ și $\|VA\| = \|VB\| = \|VC\|$. a) Să se arate că dreapta SV este perpendiculară

Scanned with OKEN Scanner

pe planul ABC. b) Să se găsească locul geometric al punctului S astfel ca în piramida $[SBAC]$ să aibă loc $\| SA \| = \| SB \| = \| SC \|$, triunghiul ABC fiind dat.

9.22. Fie $[ABCD\ A'B'C'D']$ un cub (notații obișnuite). Să se arate că diagonala $| BD' |$ a cubului este perpendiculară pe planul $AB'C$ și că planele $[A'DC']$ și $[AB'C]$ sînt paralele. Arătați că aceste plane determină pe diagonala $| BD' |$ a cubului segmente congruente.

9.23. Fie tetraedrul $[SABC]$ tridreptunghic în S. a) Arătați că perpendiculara din S pe planul $[ABC]$ îl intersectează în ortocentrul triunghiului ABC. b) Să se arate că $\frac{1}{\| SH \|^2} = \frac{1}{\| SA \|^2} + \frac{1}{\| SB \|^2} + \frac{1}{\| SC \|^2}$ H fiind ortocentrul triunghiului ABC.

9.24. Fiind date două segmente $| AB |$ și $| CD |$ ce nu fac parte din același plan, să se găsească locul geometric al punctelor M care satisfac relația $\| MA \|^2 + \| MB \|^2 = \| MC \|^2 + \| MD \|^2$.

(Propusă de R.P. Polonă la a XI-a O.I.M.)

9.25. Se dă un diedru și o dreaptă care intersectează muchia sa. Să se ducă prin această dreaptă un plan în așa fel încît dreapta dată să fie bisectoarea unghiului care se obține în secțiune.

(Olimpiada de matematică, Kiev, 1956)

9.26. Fie $[SABC]$ un tetraedru și punctele M, N, P situate pe semidreptele $| SA |$, $| SB |$, $| SC |$ astfel încît $\| SM \| = m \cdot \| SA \|$, $\| SN \| = n \cdot \| SB \|$, $\| SP \| = p \cdot \| SC \|$. Evaluați raportul volumelor tetraedrelor $[SMNP]$ și $[SABC]$.

9.27. O prismă oarecare are ca bază un trapez cu bazele $| AB |$ și $| CD |$. Muchiile laterale ale prismei se notează cu $| AA' |$, $| BB' |$, $| CC' |$ $| DD' |$. Să se demonstreze că volumul prismei este dat de $\text{vol}\,(ABCD\ A'B'C'D') = \frac{h}{2}$ [aria $(ABB'A')$ + aria $(CDD'C')$] unde h este distanța dintre planele $[ABB'A']$ și $[CDD'C'.]$

Scanned with OKEN Scanner

9.28. Se dă tetraedrul $[A_1A_2A_3A_4]$ și $M \in |A_1A_2|$. Dacă M_i este proiecția lui M pe înălțimea din A_i a tetraedrului, $i = 1, 2$, atunci suma aria $(A_2A_3A_4) \cdot \|A_1M_1\| +$ aria $(A_1A_3A_4) \cdot \|A_2M_2\|$ este constantă.

(Florin Pîrvănescu)

9.29. Pe muchia $|DA|$ a tetraedrului $[DABC]$ se iau punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ astfel ca $|DA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv \ldots \equiv |A_{n-1}A|$. Prin aceste puncte se duc planele $[A_1B_1C_1]$, $[A_2B_2C_2]$, ..., $[A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}]$ paralele la planul ABC (unde $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1} \in |DB|$; $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1} \in |DC|$). Notînd cu $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, V$ volumele tetraedrelor $[DA_1B_1C_1]$, $[DA_2B_2C_2]$, ..., $[DA_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}]$, $[DABC]$ să se arate că $4n(V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1}) = (n-1)^2V$.

(Ion Ghioca)

9.30. Fie $[SABC]$ un tetraedru oarecare și A', B', C' puncte situate pe muchiile $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$. Arătați că:

a) $$\frac{\text{vol}\ (SA'B'C')}{\text{vol}\ (SABC)} = \frac{\|SA'\| \cdot \|SB'\| \cdot \|SC'\|}{\|SA\| \cdot \|SB\| \cdot \|SC\|};$$

b) Fie $[SABCD]$ o piramidă cu baza un paralelogram $ABCD$ și $A'B'$, C', D' intersecțiile unui plan cu semidreptele $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$, $|SD$. Notînd $\frac{\|SA'\|}{\|SA\|} = \mu_a$, $\frac{\|SB'\|}{\|SB\|} = \mu_b$, $\frac{\|SC'\|}{\|SC\|} = \mu_c$, $\frac{\|SD'\|}{\|SD\|} = \mu_d$ să se calculeze volumul piramidei $[SA'B'C'D']$ în funcție de volumul piramidei $SABCD$ și μ_a, μ_b, μ_c, μ_d; c) Să se deducă relația

$$\frac{1}{\mu_a} + \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{\mu_b} + \frac{1}{\mu_d};$$

(Laurențiu Panaitopol)

9.31. Pe bazele unui trunchi de piramidă oarecare de arii a și b se iau punctele A și B, respectiv. Pe segmentul $|AB|$ se consideră punctul M prin care se duce un plan paralel cu bazele. a) Dacă $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = \frac{\lambda_a}{\lambda_b}$ atunci aria S_M a poligonului de secțiune este dată de $\left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b}\right)\sqrt{S_M} = \frac{\sqrt{a}}{\lambda_a} + \frac{\sqrt{b}}{\lambda_b}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă punctele M și N sînt situate pe $|AB|$ astfel ca $\|AM\| \cdot \|AN\| = \|BM\| \cdot \|BN\|$ atunci $\sqrt{S_M} + \sqrt{S_N} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(O. Sacter)

9.32. Într-un tetraedru oarecare un plan care trece prin mijloacele a două muchii opuse împarte tetraedrul în două corpuri echivalente.

9.33. Se dă un plan (π) și un triunghi ABC care nu are nici un punct comun cu planul (π). Să se determine mulțimea punctelor M din spațiu astfel ca dreptele MA, MB, MC să intersecteze planul (π) după un triunghi dat.

(Prezentată de R.S. România la a 12-a O.I.M.)

9.34. Se dă un patrulater inscriptibil $ABCD$ situat într-un plan (π). Să se găsească toate planele (p) pe care proiecția ortogonală a patrulaterului să fie un patrulater inscriptibil.

(Gh. Țițeica)

9.35. Fie $Oxyz$ un triedru astfel încît $\text{m}(\widehat{xOy}) = \text{m}(\widehat{yOz}) = \text{m}(\widehat{zOx}) - \alpha$, $0 < \alpha < 60°$. Fie punctul $A \in [Ox$ și $\|OA\| = a$. a) Să se determine punctele B, C pe $|Oy$ și respectiv $|Oz$ astfel încît triunghiul ABC să aibă perimetrul minim. a) Să se găsească volumul piramidei $[OABC]$ în condiția de la a).

9.36. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $[ABC\ A'B'C']$ este secționată după planul ABC'. Să se afle raportul volumelor corpurilor ce se obțin.

9.37. Într-o piramidă triunghiulară regulată de înălțime h, unghiul unei fețe cu planul bazei este α. Să se afle aria secțiunii realizate în piramidă de un plan care trece printr-o latură a bazei și mijlocul înălțimii. Să se determine distanța de la vîrful piramidei la planul de secțiune.

9.38. Dacă G_1 este centrul de greutate al feței $[A_2A_3A_4]$ a tetraedrului $[A_1A_2A_3A_4]$, iar B_2, B_3, B_4 și G sînt intersecțiile unui plan oarecare cu A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 și A_1G_1 atunci are loc

$$\frac{\|A_1A_2\|}{\|A_1B_2\|} + \frac{\|A_1A_3\|}{\|A_1B_3\|} + \frac{\|A_1A_4\|}{\|A_1B_4\|} = 3\,\frac{\|A_1G_1\|}{\|A_1G\|}$$

(Marcel Bărbulescu)

9.39. Un tetraedru se numește echifacial dacă are toate fețele congruente. Arătați că un tetraedru este echifacial dacă și numai dacă are muchiile opuse congruente.

9.40. Demonstrați următoarele proprietăți ale tetraedrului echifacial $[ABCD]$: a) înălțimile tetraedrului sînt concurente; b) Notînd G_a centrul de greutate al feței opuse vîrfului A și corespunzătoarele, atunci $\| AG_a \| = \| BG_b \| = \| CG_c \| = \| DG_d \|$; c) Centrul de greutate al tetraedrului este centrul sferei înscrise și centrul sferei circumscrise tetraedrului; d) Segmentele avînd extremitățile în mijloacele a două muchii opuse sînt perpendiculare pe aceste muchii; e) Segmentele de la punctul d) sînt perpendiculare oricare două.

9.41. Dacă într-un tetraedru centrul de greutate este și centrul sferei circumscrise tetraedrului atunci tetraedrul este echifacial.

9.42. Fie $[OABC]$ un tetraedru echifacial în care $\| AB \| = c$, $\| BC \| = a$, $\| CA \| = b$. Fie α, β, γ măsurile unghiurilor diedre pe care fețele $[OBC]$, $[OAC]$, $[OAB]$ le fac cu planul $[ABC]$. a) Calculați razele sferelor înscrise și circumscrise tetraedrului. b) Calculați înălțimea tetraedrului și deduceți volumul acestuia. c) Arătați că au loc relațiile:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

9.43. Fie un tetraedru $[ABCD]$ și G_A, G_B, G_C, G_D centrele de greutate ale fețelor $[BCD]$, $[ACD]$, $[ABD]$, $[ABC]$. Să se arate că sferele $S\left(G_A, \frac{\| AM \|}{3}\right)$ și analoagele au un punct comun, oricare ar fi punctul M din spațiu. Prin $S(O, r)$ s-a notat sfera de centru O și rază r.

(Dorinel Anca)

9.44. Se dau cinci puncte în spațiu A, B, C, D, E astfel ca oricare trei să nu fie coliniare și nici patru în același plan. Se notează cu G_a, G_b, G_c, G_d centrele de greutate ale tetraedrelor care se obțin lăsînd la o parte respectiv punctul A, B, C, D, E. Fie O un punct arbitrar al spațiului care nu coincide cu nici unul din punctele A, B, C, D, E. Să

Scanned with OKEN Scanner

se demonstreze că: a) Paralelele prin A, B, C, D, E respectiv la OG_a, OG_b, OG_c, OG_d, OG_e sînt cinci drepte concurente într-un punct Q. b) Dreptele AG_a, BG_b, CG_c, DG_d, EG_e sînt concurente într-un punct P astfel ca $5 \cdot \| AP \| = 4 \cdot \| AG_a \|$ etc. c) Punctele O, P, Q sînt coliniare.

(Gh. D. Simionescu)

9.45. Fie M un punct oarecare interior tetraedrului $[A_1A_2A_3A_4]$. Dacă α_i este măsura unghiului dintre MA_i și înălțimea din A_i a tetraedrului, iar a_i aria feței opuse vîrfului A_1, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ atunci suma $\sum_{i=1}^{4} \| MA_i \| \cdot a_i \cos \alpha_i$ este independentă de poziția punctului M.

(Florin Pîrvănescu)

9.46. Într-un paralelipiped oarecare $[ABCD\ A'B'C'D']$ are loc relația $\| AC' \|^2 + \| A'C \|^2 + \| BD' \|^2 + \| B'D \|^2 = 4(\| AB \|^2 + \| AD \|^2 + \| AA' \|^2 \|)$.

9.47. O piramidă patrulateră regulată are secțiunea diagonală un triunghi echilateral de arie $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. a) Să se afle aria totală și volumul piramidei; b) Să se găsească unghiul unei fețe laterale cu planul bazei; c) Să se găsească raza sferei înscrise și raza sferei circumscrise piramidei.

9.48. Să se demonstreze că volumul unui trunchi de piramidă este $V = \frac{h}{3}(4S_m - \sqrt{Ss})$ unde h este înălțimea, S și s sînt ariile celor două baze, iar S_m este aria secțiunii medii.

9.49. Într-o piramidă regulată avînd baza un poligon cu n laturi se dau înălțimea h și unghiul unei muchii cu o latură a bazei cu care are un punct comun α. Să se calculeze aria totală și volumul piramidei.

9.50. Fie $[SABCD]$ o piramidă patrulateră regulată avînd lungimea laturii bazei a și lungimea unei muchii laterale m. a) Să se determine forma secțiunii determinate în piramidă de planul care trece prin mijlocul lui $|AB|$ și este paralel cu planul $[SAD]$; b) Să se calculeze aria secțiunii; c) Să se determine raportul volumelor celor două corpuri în care este descompusă piramida de planul de secțiune.

Scanned with OKEN Scanner

9.51. În piramida patrulateră regulată $[SABCD]$ avînd baza pătratul $ABCD$ cu lungimea laturii a, lungimea înălțimii din S, h, se face o secțiune paralelă cu planul bazei la distanța x de vîrf. Să se determine x astfel încît trunchiul de piramidă rezultat să admită o sferă înscrisă. *Discuție.*

9.52. O piramidă $[ABCD]$ are ca bază triunghiul echilateral BCD de latură m, iar muchiile $|AB|$ și $|AD|$ congruente. Înălțimea $|AO|$, de lungime h, împarte segmentul $|GC'|$ în două segmente congruente, $|CC'|$ fiind mediană, iar G centru de greutate în triunghiul BCD. Prin punctul O se duce un plan paralel cu planul $[ABD,]$ care secționează piramida. a) Să se determine forma și aria secțiunii. b) Să se determine distanța dintre planul $[ABD]$ și planul de secțiune.

9.53. Într-o piramidă patrulateră regulată cu muchia laterală de lungime m și unghiul unei fețe laterale cu planul bazei α, se face secțiunea printr-un plan care conține o latură a bazei și mijlocul unei muchii laterale. Să se găsească aria acestei secțiuni.

9.54. Un trunchi de piramidă regulată are laturile bazelor de mărimi a și $2a$, iar muchia laterală de lungime $3a$. Să se afle volumul părții comune piramidei cu vîrful în centrul bazei mici și avînd drept bază, baza mare a trunchiului și piramidei cu vîrful în centrul bazei mari și avînd bază baza mică a trunchiului.

9.55. Un trunchi de piramidă regulată admite o sferă înscrisă, are muchia laterală de lungime m, făcînd cu planul bazei mari unghiul α. Determinați raportul volumelor trunchiului și sferei înscrise.

9.56. Să se găsească raportul volumelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată care admite o sferă înscrisă și al sferei înscrise, în funcție de unghiul format de muchia laterală cu planul bazei mari.

9.57. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată $[ABC\,A'B'C']$ are bazele de laturi a și $2a$, iar muchia laterală a. Să se găsească volumul părții comune poliedrelor $[ABC'A'B']$ si $[A'B'CC']$.

9.58. Într-o piramidă patrulateră regulată $[SABCD]$, cu vîrful S, se face secțiunea prin planul care conține mijloa-

Scanned with OKEN Scanner

cele muchiilor $|AB|$, $|BC|$ și $|SC|$. Să se determine aria poligonului de secțiune în funcție de lungimea laturii bazei și a înălțimii piramidei.

9.59. Se consideră în spațiu două cercuri neconcurente și cîte un punct pe fiecare din ele. Să se afle un al treilea cerc care să aibă cu fiecare din cele două cercuri date cîte o pereche de puncte comune, fiecare pereche conținînd cîte unul din cele două puncte date.

(Tudor Zamfirescu)

9.60. a) Să se arate că dacă într-un tetraedru de vîrf S și bază ABC unul din vîrfurile bazei se proiectează pe fața opusă pe înălțimea acestei fețe duse din S, atunci se pot face în tetraedru o infinitate de secțiuni plane care să fie dreptunghiuri. b) Dacă două vîrfuri ale bazei au proprietatea de mai sus, atunci și al treilea are această proprietate, iar S se proiectează pe planul bazei în ortocentrul acesteia.

9.61. Fie d_1, d_2, d_3, d_4 patru semidrepte în spațiu cu originea O astfel ca unghiurile făcute de d_1 și d_3, respectiv de d_2 și d_4 sînt congruente și au aceeași bisectoare interioară. Să se arate că punctele $P \in d_1$, $Q \in d_2$, $R \in d_3$, $S \in d_4$ sînt coplanare dacă și numai dacă

$$\frac{1}{\|OP\|} + \frac{1}{\|OR\|} = \frac{1}{\|OQ\|} + \frac{1}{\|OS\|}$$

(Mariana Popescu)

9.62. Prin punctul mobil M pe muchia $|A_3A_4|$ a tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ se duc planele (π_1) paralel cu $(A_1A_2A_4)$ și (π_2) paralel cu $(A_1A_2A_3)$. Fie O_1 și O_2 centrele sferelor circumscrise tetraedrelor determinate de secțiunile planelor (π_1) și (π_2) și vîrfurile A_3, respectiv A_4. Se cere: a) Locul geometric al mijlocului segmentului $|A_3'A_4'|$ (A_3', A_4' fiind simetricele față de O_1, respectiv O_2 ale lui A_3 și A_4). b) Suma razelor celor două sfere.

(Florin Pîrvănescu)

9.63. Pe muchiile Sa, Sb, Sc ale unei piramide triunghiulare regulate $Sabc$ în care $\|Sa\| = \|Sb\| = \|Sc\| = m$ și $\|ab\| = \|bc\| = \|ca\| = l$ se iau punctele A, B, C. Fie b_1, c_1 intersecțiile dreptelor AB, AC cu planul abc al bazei piramidei și b_2, c_2 intersecțiile dreptelor aB, aC cu planul dus prin vîrful S al piramidei paralel cu planul bazei. Știind

că $\frac{\| SA \|}{\| Sa \|} = \alpha$, $\frac{\| SB \|}{\| Sb \|} = \frac{\| SC \|}{\| Sc \|} = \beta$ să se exprime în funcție de m, l, α și β volumele poliedrelor a) $SBCb_2c_2$, b) Aab_1c_1, c) $BCbcb_1c_1$.

(Admitere, Institutul de Arhitectură, București, 1971)

9.64. Fie $AA_1A_2A_3$ un tetraedru oarecare și B_1, B_2, B_3 mijloacele muchiilor $|A_2A_3|$, $|A_1A_3|$, $|A_1A_2|$. Se notează cu M_i punctele de intersecție ale unui plan paralel cu planul $(A_1A_2A_3)$ cu AB_i, $i = 1, 2, 3$. Să se arate că dreptele A_iM_i, $i = 1, 2, 3$, sînt concurente.

(Gh. Neagu)

9.65. Fie $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$ muchii ale unui paralelipiped. Arătați că diagonala $|AA'|$ a paralelipipedului intersectează planul (BCD) în centrul de greutate al triunghiului BCD și că $3 \cdot \| AG \| = \| AA' \|$.

(Cezar Coșniță)

9.66. Se consideră tetraedrul $[SABC]$. Un plan paralel cu planul (ABC) intersectează muchiile $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$ în punctele A', B', C' astfel că $\frac{\| A'S \|}{\| A'A \|} = k$. Fie M un punct în interiorul triunghiului $A'B'C'$ și P, Q, R intersecțiile dreptelor AM, BM, CM cu planele (SBC), (SCA) și respectiv (SAB). Arătați că vol $[SPQR] = 2\ (k+1)$ vol $MPQR$.

(Enunț ușor modificat al unei probleme a lui Mihai Stan)

9.67. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru oarecare și B_{ij} un punct oarecare pe latura $|A_iA_j|$. Fie Σ_1 sfera care trece prin punctele A_1, B_{12}, B_{13}, B_{14}, iar Σ_2, Σ_3, Σ_4 analoagele. Arătați că aceste patru sfere au un punct comun. (Sferă, aici, cu sensul de suprafață sferică),

(G.M., 7, 1977)

9.68. Fie o piramidă avînd aria bazei A_b, aria laterală A_l și α_i unghiurile fețelor laterale cu planul bazei. Presupunînd că proiecția vîrfului pe planul bazei este interioară

poligonului de bază, arătați că $A_b \min\left(\frac{1}{\cos \alpha_i}\right) \leqslant A_l \leqslant$ $\leqslant A_b \max\left(\frac{1}{\cos \alpha_i}\right)$.

(R.O. Haba)

9.69. Fie o curbă închisă (ce nu se întretaie) care împarte aria unei sfere de rază r în suprafețe de arii egale. Arătați că lungimea curbei este cel puțin $2\pi r$.

(Mircea Lascu)

9.70 a) Se dă tetraedrul $[ABCD]$ și M mijlocul muchiei $|DC|$. Să se arate că aria $[AMB] \leqslant \frac{1}{2}$(aria $[ACB]$ + + aria $[ADB]$). b) Folosind acest rezultat deduceți că dacă A, B, C, D sînt puncte în spațiu oricare trei necoliniare astfel încît aria $[ABM]$ + aria $[BCM]$ + aria $[CDM]$ este constantă cînd M parcurge segmentul $|AD|$, atunci A, B, C, D sînt coplanare.

(Mihai Pimsner, Sorin Popa)

9.71. Fie $[ABCD]$ un tetraedru în care muchia $|AD|$ este perpendiculară pe fața (ABC) și E un punct al muchiei $|AD|$. Notăm cu M, N, P, Q proiecțiile punctului A pe dreptele BD, CD, CE și BE. Să se arate că punctele M, N, P, Q sînt coplanare și să se precizeze tipul patrulaterului $MNPQ$.

(Mihai Miculița)

9.72. Un tetraedru are fețele congruente și volumul $\frac{abc\sqrt{2}}{12}$ unde a, b, c sînt lungimile a trei muchii necoplanare. Arătați că tetraedrul este regulat.

(T. Ștefan)

9.73. O cutie are forma de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c. Cutia fiind așezată cu baza $ABCD$ pe un plan orizontal, se rotește în jurul laturii $|AD|$ de lungime a, astfel încît latura $|BC|$ are distanța x la planul orizontal. Determinați volumul maxim de lichid ce poate fi conținut de cutie.

(I. Teodorescu)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 10

CONSTRUCȚII GEOMETRICE

10.1. Se dau o dreaptă (d) și două puncte A și B nesituate pe dreaptă. Să se determine pe (d) un punct C astfel încît bisectoarea unghiului făcut de $|AC|$ cu (d) să treacă prin B.

10.2. Se dă un arc de centru (O). Să se determine un punct exterior M astfel încît tangentele $|MT_1|$ și $|MT_2|$ la cercul (O) să satisfacă relația $\|MT_1\| = 2\|T_1T_2\|$.

10.3. Să se construiască un paralelogram $ABCD$ cunoscînd două vîrfuri opuse A, C și avînd celelalte două vîrfuri pe un cerc dat (O).

10.4. Să se construiască un dreptunghi cunoscînd perimetrul și lungimea diagonalei $|AC|$.

10.5. Să se construiască un triunghi echilateral avînd un vîrf A în centrul unui cerc de rază R.

10.6. Să se construiască un triunghi echilateral cu vîrful A dat și care are vîrfurile B și C așezate: a) pe două drepte paralele date; b) pe o dreaptă (d) și un cerc (O) date.

10.7. Să se construiască un triunghi ABC cu vîrful A dat, care are vîrfurile B și C pe două cercuri date (O) și (O_1) și cunoscînd punctul G de intersecție al medianelor.

(Gh. Țițeica)

10.8. Să se construiască un triunghi ABC dacă se cunoaște unghiul A, raza cercului circumscris R și distanța de la ortocentru la centrul cercului circumscris.

10.9. În plan se dau două drepte (d_1) și (d_2). Pe dreapta (d_1) se fixează un punct A. Să se găsească pe (d_1) un punct P așa încît distanța lui la dreapta (d_2) să fie egală cu $\|PA\|$. Cum se rezolvă problema dacă se înlocuiește dreapta (d_2) cu un cerc dat de centru (O) și rază R^2?

Scanned with OKEN Scanner

10.10. Să se construiască un pătrat $ABCD$ avînd vîrful A fix și știind că extremitățile diagonalei $|BD|$ se găsesc pe două drepte paralele date.

10.11. Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i lungimile medianelor.

(Gh. Țițeica)

10.12. Să se construiască un triunghi isoscel ABC cunoscînd mediana și înălțimea coborîte dintr-un vîrf al bazei pe una din laturile congruente.

10.13. Se dau două cercuri concentrice de raze R și r. Să se ducă o dreaptă care să determine în cercul mic o coardă de lungime egală cu 1/2 din lungimea corzii determinată de aceeași dreaptă în cercul mare.

10.14. Se dau un cerc (O) și un punct P. Să se ducă prin P o secantă care să determine în cerc o coardă de lungime dată.

10.15. Să se construiască un cerc: a) egal depărtat de trei puncte date; b) egal depărtat de patru puncte date.

10.16. Se dă un segment de dreaptă $|AB|$ și pe acest segment un punct P oarecare. De aceeași parte a segmentului $|AB|$ construim semicercuri de diametre $|AP|$ și $|PB|$. Construim tangenta comună a lor $|MN|$, cu M pe semicercul AP. a) Să se demonstreze că tangenta în P la cele două cercuri intersectează pe MN în Q la mijlocul segmentului $|MN|$. b) Dreptele AM și BN se intersectează în I. Să se afle locul geometric al lui I cînd P se mișcă pe $|AB|$. c) Segmentul $|AB|$ fiind dat și de lungime a, să se determine prin construcție grafică punctul P, astfel că tangenta comună $|MN|$ să aibă o lungime dată l. Care este valoarea maximă pe care o poate avea l?

(Concurs, Fac. mat.-mecanică, Buc., 1968)

10.17. Să se ducă perpendiculara comună a două drepte nesituate în același plan.

(M. Șt. Botez)

10.18. Se dă planul (π) și segmentele de dreaptă $|AB|$ și $|CD|$ perpendiculare pe plan cu B și D în plan. Să se determine un punct al planului (π) din care cele două segmente să se vadă sub unghiuri de măsuri egale.

(M. Șt. Botez)

Scanned with OKEN Scanner

10.19. Să se construiască o dreaptă care să întîlnească două drepte date și să fie perpendiculară pe un plan dat.

10.20. Se dau două drepte exterioare unui plan. Să se ducă prin fiecare din ele cîte un plan așa încît dreapta de intersecție a acestor două plane să fie conținută în planul dat.

10.21. Să se construiască o dreaptă care se sprijină pe două drepte date și este paralelă cu o altă dreaptă dată.

10.22. Să se construiască o dreaptă paralelă cu un plan și care intersectează două drepte date neparalele cu planul. *Discuție.*

10.23. Printr-un punct al unui plan să se ducă în plan o dreaptă perpendiculară pe o dreaptă exterioară planului.

10.24. Se consideră în spațiu un plan (π) și o dreaptă (d) exterioară planului. Să se construiască o dreaptă care să intersecteze pe (d) să fie perpendiculară pe (d) și paralelă cu planul (π). Această dreaptă generează un plan?

10.25. Printr-un punct al spațiului să se ducă o dreaptă perpendiculară pe două drepte oarecare.

10.26. În spațiu se dau un plan (π), o dreaptă (d) și un punct M. Să se ducă prin punct un plan paralel cu dreapta dată și perpendicular pe planul dat.

10.27. Să se construiască un plan de proiecție pe care două drepte oarecare din spațiu să se proiecteze după două drepte paralele.

10.28. Să se taie fețele laterale ale unei piramide patrulatere cu un plan astfel ca secțiunea obținută să fie un paralelogram.

10.29. Să se ducă un plan paralel cu baza unei piramide așa încît aria laterală a piramidei formate să fie în raportul $\frac{m}{n}$ cu aria laterală a piramidei date.

10.30. Să se arate că printr-o dreaptă exterioară unei sfere se pot duce două plane tangente acesteia. Să se indice modul de construcție a acestor plane.

Scanned with OKEN Scanner

10.31. Să se ducă un plan (π) printr-o dreaptă dată (d) pe care proiecțiile a două drepte date (d_1) și (d_2) să fie paralele.

10.32. Să se construiască un cub cunoscîndu-i lungimea diagonalei.

10.33. Se dau în spațiu două drepte (d_1) și (d_2). Pe (d_1) se fixează un punct O. Să se ducă prin O o dreaptă care să întîlnească pe (d_2) și care să facă un unghi α cu (d_1).

10.34. Să se construiască un segment de dreaptă de lungime și direcție dată, care să se spriiine pe două cercuri date.

10.35. Fiind date semidreptele $[Ox$ și $[Oy$ și punctul P interior unghiului celor două semidrepte, să se construiască segmentul $|AB|$, $A \in [Ox$ și $B \in [Oy$ astfel încît P să fie mijlocul segmentului $|AB|$.

10.36. Să se construiască triunghiul ABC în care se cunoaște vîrful A, piciorul A' al înălțimii din A, ortocentrul triunghiului, H și un punct P de pe cercul circumscris triunghiului.

(Paul Popescu)

10.37. Să se construiască triunghiul oarecare ABC cunoscînd $\| BC \| = a$, $\| BC_1 \| = l$ și $\| MN \| = d$ unde $A_1B_1C_1$ este triunghiul ortic al triunghiului ABC, iar $|MN|$ este proiecția segmentului B_1C_1 pe latura $|BC|$.

(D.M. Bătinețu)

10.38. Se dau două cercuri $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ și o dreaptă (d). Să se găsească pe cercul $\mathcal{C}_1$ un punct M și pe cercul $\mathcal{C}_2$ un punct N astfel încît dreapta (d) să fie mediatoarea segmentului $|MN|$. *Discuție.*

(N. Radu)

10.39. Construiți un cerc care să treacă prin două puncte date și care este tangent unei drepte date.

10.40. Construiți un cerc tangent la două drepte date și care să treacă printr-un punct dat.

10.41. Să se construiască un triunghi cunoscînd: a) picioarele medianelor; b) picioarele înălțimilor.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 11

MAXIME ŞI MINIME GEOMETRICE

11.1. Se dă un unghi xOy şi în interiorul lui două puncte oarecare A, B să se găsească un punct M pe Ox şi un punct N pe Oy aşa încît drumul $AMNB$ să fie minim.

(Admitere, Inst. de Arhitectură, Buc., 1975)

11.2. Fie triunghiul ABC şi o dreaptă (d) care trece prin vîrful C. Dacă A_1 şi B_1 sînt proiecţiile lui A şi B pe (d) să se determine maximul expresiei $\| AA_1 \| + \| BB_1 \|$.

11.3. Se dă un segment de dreaptă $| AB |$ şi un punct mobil M pe o dreaptă (d) care nu intersectează segmentul. Să se determine locul geometric al punctului M astfel încît unghiul AMB să fie maxim.

11.4. Două laturi ale unui paralelogram coincid cu laturile unui triunghi, iar un vîrf se găseşte pe cea de a treia latură. Să se determine aria maximă a paralelogramului.

11.5. Să se determine suprafaţa maximă a unui dreptunghi înscris într-un sector de cerc de rază r, cu unghi la centru egal cu 2α.

11.6. Consideră un punct A' pe latura $| BC |$ a unui triunghi ABC. Paralela prin A' la latura $| AC |$ întîlneşte latura $| AB |$ în punctul C' şi paralela prin A' la $| AB |$ întîlneşte latura $| AC |$ în B'. a) Să se exprime aria paralelogramului $A'B'AC'$ în funcţie de aria triunghiului $BA'C'$ şi de aria triunghiului $CA'B'$. b) Pentru ce poziţie a punctului A' aria acestui paralelogram este maximă?

(Admitere, Facultatea matematică-mecanică, Buc., 1973)

11.7. Se dă un segment de dreaptă $| AB |$ şi un punct oarecare $P \in | AB |$. De aceeaşi parte a segmentului $| AB |$ se construiesc semicercurile de diametru $| AP |$ şi $| PB |$. Construim tangenta lor comună $| MN |$. a) Să se

Scanned with OKEN Scanner

demonstreze că tangenta în P la cele două semicercuri intersectează pe $|MN|$ într-un punct Q la mijlocul acestuia. b) Dreptele AM și BN se intersectează în I. Să se afle locul geometric al punctului I cînd P descrie $|AB|$. c) Lungimea segmentului $|AB|$ fiind dată, a, să determine printr-o construcție grafică punctul P astfel ca $\|MN\| = l$ (dat). Care este valoarea maximă pe care o poate avea l?

(Admitere, Fac. matem.-mec. Buc., 1959)

11.8. Fie ABC un triunghi echilateral și (d) o dreaptă variabilă din planul triunghiului. Fie A_1, B_1 C_1 proiecțiile vîrfurilor A, B, C pe dreapta (d). Să se determine minimul sumei $\|AA_1\|^2 + \|BB_1\|^2 + \|CC_1\|^2$ în funcție de lungimea laturii triunghiului și să se precizeze mulțimea dreptelor din planul triunghiului care realizează acest minim.

(Marcel Chiriță)

11.9. Fie în triunghiul oarecare ABC punctele $A' \in |BC|$, $B' \in |CA|$, $C' \in |AB|$ astfel încît AA', BB', CC' sînt concurente în P. Determinați poziția punctului P astfel ca aria triunghiului $A'B'C'$ să fie maximă.

11.10. a) Fie ABC un triunghi, M un punct pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris triunghiului care nu conține pe A. Fie y, z distanțele punctului M la dreptele AC și AB. Arătați că:

$$\frac{by+cz}{a} \leqslant \|AM\|; \quad \frac{cy+bz}{a} \leqslant \|AM\|$$

precizînd cînd au loc egalitățile pentru fiecare caz. b) Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC, x, y, z distanțele punctului P la BC, CA, AB, $\alpha = \|PA\|$, $\beta = \|PB\|$, $\gamma = \|PC\|$. Folosind rezultatul de la a) arătați că: $b_1)$ $\frac{by+cz}{a} \leqslant \alpha$, $\frac{cy+bz}{a} \leqslant \alpha$ și cele similare; $b_2)$ $\alpha+\beta+\gamma \geqslant 2(x+y+z)$; $b_3)$ $a\alpha + b\beta + c\gamma \geqslant 4$ aria $[ABC]$.

11.11. Fie ABC un triunghi oarecare și M un punct mobil în interiorul acestui triunghi. Dacă se notează cu d_a, d_b, d_c distanțele punctului M la laturile $|BC|$, $|CA|$,

Scanned with OKEN Scanner

$|AB|$ de lungimi a, b, c și dacă S este aria triunghiului ABC, să se demonstreze inegalitatea

$$abd_ad_b + bcd_bd_c + cad_cd_a \leqslant \frac{4}{3} S^2$$

maximul fiind atins cînd M coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC.

(Problemă trimisă de R.S. România la a X-a O.I.M.)

11.12. a) Fie a, b, S numere pozitive. Să se găsească valorile extreme ale sumei $x + y$ în condițiile $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $ax + by = S$. b) Fiind dat triunghiul ABC, să se găsească punctele pe $|AB|$ astfel ca suma distanțelor sale la laturile CA și CB să fie maximă, respectiv minimă. c) Fie a, b, c, S numere pozitive. Să se găsească numerele pozitive x, y, z pentru care $ax + by + cz = S$ și care maximizează, respectiv minimizează suma $x + y + z$. d) Să se găsească punctele M din interiorul triunghiului ABC care au suma distanțelor la laturile triunghiului maximă, respectiv minimă.

11.13. Fie ABC un triunghi și în interiorul triunghiului punctul mobil M, avînd distanțele d_a, d_b, d_c la laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Să se calculeze minimul expresiei

$$\frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c}$$

și să se precizeze poziția corespunzătoare a punctului M.

11.14. Dacă M este un punct mobil din planul triunghiului ABC și O centrul cercului circumscris triunghiului, să se demonstreze că

$$\|OM\|^2 = R^2 - \frac{\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

și să se deducă maximul expresiei $E = ad_bd_c + bd_cd_a + cd_ad_b$, unde d_a, d_b, d_c sînt distanțele punctului M din interiorul triunghiului ABC la laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, iar α, β, γ sînt proporționale cu ariile triunghiurilor MBC, MAC, MAB.

(Ion Tomescu)

11.15. Fie P un punct fixat în interiorul unui cerc de centru O. Să se ducă prin punctul P două coarde perpendiculare între ele așa fel încît suma lungimilor lor să fie maximă, respectiv minimă.

(Olimpiadă, Moscova, 1959)

Scanned with OKEN Scanner

11.16. Fie ABC un triunghi și $M \in |BC|$. Dacă P și Q sînt proiecțiile punctului M pe AB, respectiv AC, să se determine poziția punctului M care realizează minimul expresiei $\|AB\| \|MP\|^2 + \|AC\| \cdot \|MQ\|^2$ și să se determine acest minim.

(Florin Pîrvănescu)

11.17. Date două puncte A și B de aceeași parte a unui plan (π), să se determine un punct M în planul dat așa încît suma $\|AM\| + \|BM\|$ să fie minimă.

11.18. Să se demonstreze că suma ariilor pe care le determină un plan (π) paralel cu planul (π') pe care sînt așezate trei sfere de raze diferite, este maximă atunci cînd planul trece prin centrul de greutate al triunghiului ale cărui vîrfuri sînt centrele celor trei sfere.

11.19. Să se determine volumul maxim al zonei sferice știind că h este înălțimea ei.

11.20. Să se determine conul de volum maxim știind că generatoarea lui are lungimea l.

11.21. Să se determine volumul maxim al unui cilindru a cărui axă este perpendiculară pe axa unui cilindru dat de rază R și care are bazele tangente la suprafața laterală a acestui cilindru.

11.22. Două plane secante (π) și (π') sînt intersectate de o dreaptă (d) în punctele A și B. Să se determine un punct $M \in |AB|$ astfel ca suma distanțelor lui la cele două plane să fie minimă.

(C. Ionescu-Țiu, G.M.B., 12 796)

11.23. Lungimea unei muchii laterale a unei piramide regulate hexagonale este l, iar raportul dintre aria bazei și aria laterală este egal cu $\cos\theta$. Să se determine unghiul θ pentru care volumul piramidei este maxim.

11.24. Se dă o sferă de rază R cu centrul O. Fie un con circular drept cu vîrful S, circumscris sferei. Generatoarele acestui con sînt tangente sferei în punctele situate pe un cerc de diametru $|AB|$. Se consideră de asemenea conul cu vîrful în O și avînd ca bază același cerc mic al sferei de diametrul $|AB|$. a) Să se afle unghiul u, jumătatea unghiului de la vîrful S din secțiunea axială a conului circumscris,

Scanned with OKEN Scanner

știind că suma volumelor conurilor SAB și OAB este egală cu 3/8 din volumul sferei. b) Fiind dată raza R a sferei, să se arate că volumul conului circumscris sferei este egal cu $\frac{R^3(1+\sin u)^2}{3\sin u(1-\sin u)}$. c) Să se arate că minimul volumului conului circumscris sferei de rază R este constant și egal cu de două ori volumul sferei. d) Să se calculeze unghiul u cel mai mare dintre unghiurile u cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care volumul conului circumscris sferei date este egal cu $3R^3$.

(Examen de bacalaureat, 1973)

11.25. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru oarecare și M un punct variabil pe muchia $|A_3A_4|$. Planele paralele prin M cu fețele $A_1A_2A_4$ și $A_1A_2A_3$ determină secțiunile MNP ($N \in |A_1A_3|$, $P \in |A_2A_3|$) respectiv MQR ($Q \in |A_2A_4|$, $R \in |A_1A_4|$). Fie V_1 și V_2 volumele tetraedrelor având vîrful A_3 și baza MNP respectiv vîrful A_4 și baza MQR. a) Arătați că suma $V_1 + V_2$ este minimă dacă și numai dacă suma $V_1^2 + V_2^2$ este minimă. Precizați poziția punctului M care realizează minimul acestor sume. b) Arătați că $V_1 + V_2$ este minimă dacă și numai dacă $V_1^n + V_2^n$ este minimă pentru orice n natural.

11.26. Să se determine lungimile muchiilor unui tetraedru tridreptunghic de volum dat a^3 astfel încît suma lor să fie minimă.

(Baraj, 1981)

11.27. Fie P un punct situat în interiorul tetraedrului $ABCD$ și A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv proiecțiile ortogonale ale lui P pe planele (BCD), (CDA), (DAB) și (ABC). Să se demonstreze că

$$\frac{\text{aria}\,[BCD]}{\|PA_1\|} + \frac{\text{aria}\,[CDA]}{\|PB_1\|} + \frac{\text{aria}\,[DAB]}{\|PC_1\|} + \frac{\text{aria}\,[ABC]}{\|PD_1\|} \geqslant \frac{S}{r}$$

unde S este aria totală a tetraedrului, iar r este lungimea razei sferei înscrise în tetraedru. În ce caz are loc egalitatea?

(T. Andreescu și I.V. Maftei)

Capitolul 12

TRIGONOMETRIE

12.1. Se dă expresia $E(x) = \sin^3 x(1 + \operatorname{tg} x) - \cos^3 x(1 + \operatorname{ctg} x)$ unde $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbf{Z}$. a) Să se arate că $E(x) = \frac{(\sin x + \cos x)^2(\sin x - \cos x)}{\sin x \cos x}$. b) Dacă $\sin x - \cos x = p$, să se calculeze în funcție de p expresia $E(x)$.

12.2. Fiind dată expresia

$$E(x) = \frac{\cos 4x + 2\cos 6x + \cos 8x}{\sin 4x + 2\sin 6x + \sin 8x}.$$

Se cere: a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă; b) Să se calculeze $E\left(\frac{\pi}{36}\right)$; c) Să se rezolve ecuația

$$E(x) + \operatorname{tg}^2 x = 3\operatorname{tg} 6x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

12.3. Se dă expresia

$$E(a, x) = \frac{\sin 4ax + 2\cos 2ax}{2(\cos ax - \sin ax)},$$ a fiind un parametru real.

a) Să se rezolve ecuația $E(a, x) = 2\sqrt{2}$, x fiind necunoscuta;
b) Să se verifice identitatea

$$E(1/2, x) \cdot E(1, x) = \left(\sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^3.$$

12.4. Să se arate că expresia

$$E(x, m) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - m\cos^2 x}{\cos 4x \cdot [(2 - m)\cos 2x - (m + 1)]}$$

nu depinde de m.

Scanned with OKEN Scanner

12.5. Se consideră fracția

$$F(x)=\frac{\sin 3x+\cos 3x+\sin 5x+\cos 5x+\sin 7x+\cos 7x}{\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x}.$$

a) Arătați că $F(x)$ poate fi pusă sub forma $F(x)=1+\operatorname{tg} 5x$;

b) Rezolvați ecuația $F(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)$; c) Calculați perioada funcției $G(x)=F(x)+F\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

12.6. Se dă expresia

$$E=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)-\sin\alpha+\sin\beta}.$$

a) Să se calculeze valoarea expresiei pentru $\alpha=\frac{\pi}{3}$ și $\beta=\frac{\pi}{6}$.

b) Să se rezolve ecuația $(1+\sqrt{3})\sin x+E\cdot\cos x=0$, unde pentru E se ia valoarea calculată la punctul a).

12.7. Să se arate că

$\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$ nu depinde de x.

12.8. Să se arate că pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea

$$\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\sec x+\operatorname{cosec} x>6.$$

12.9. Să se arate că

$$\left(\frac{x^2\sin y-2x+\sin y}{x-2x\sin y+1}\right)^2\leqslant 1,$$

unde y și x sînt numere reale astfel ca $x^2-2x\sin y+1\neq 0$.

12.10. Să se determine mulțimea valorilor funcției f definită pe $[-\pi,\pi]$, dată prin $f(x)=\cos 2x+(5-a^2)\sin x+a^2$ unde a este un număr real.

12.11. Să se găsească cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției

$$f(x)=\cos 2x-4\sin x.$$

Scanned with OKEN Scanner

12.12. Să se arate că dacă $a+b+c=\frac{\pi}{3}$, atunci $\cos a+\cos b+\cos c-\sum \cos a \sin b \sin c$ este constantă. (Termenii obținuți se însumează prin permutări circulare.)

12.13. Să se demonstreze că dacă

$$2\sin(b+c-a)=\sin(a+b-c)+\sin(a+c-b)$$

atunci $2\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c$.

12.14. Dacă $0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ și $0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ atunci

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

12.15. Dacă $\sin 2(a+c)=n\sin 2b$ atunci

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c).$$

12.16. Trei unghiuri de măsuri pozitive α, β, γ, au suma măsurilor 135°. Știind că $\beta-\alpha=\gamma-\beta$ și că $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=5$ se cer valorile $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ și $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$. Să se tragă o concluzie cu privire la unghiurile α, β, γ.

12.17. Să se arate că expresia

$$E=\frac{1-2\sin^2(a-3\pi/2)+3\cos(2a+3\pi/2)}{\sin(\pi/6-2a)}$$

este independentă de a, $a\neq k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$, k număr întreg.

12.18. Se consideră funcția reală de variabilă reală

$$f(x)=a_1\sin(x+b_1)+a_2\sin(x+b_2)+\ldots+a_n\sin(x+b_n).$$

Să se arate că dacă $f(0)=0$ și dacă există $x_0\neq k\pi$, k întreg astfel că $f(x_0)=0$, atunci $f(x)=0$ pentru orice x real.

12.19. Fie expresiile

$$E_1=\frac{5}{3}-\frac{1-\sin^4 x-\cos^4 x}{1-\sin^6 x-\cos^6 x},\quad E_2=\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se cere: a) Să se arate că $E_1E_2 = \operatorname{tg} x$. b) Să se calculeze

$$\left(\frac{E_1 + iE_2}{E_1 - iE_2}\right)^n.$$

c) Să se discute ecuația $\cos x \cdot E_2 = m^2 - \sin^2 x$ după parametrul real m.

12.20. Să se arate că expresia

$$E = \frac{\sin y \cos x(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)}{1 - \cos(x + y)} + \frac{\sin \dfrac{x - y}{2}}{\cos y \sin \dfrac{x + y}{2}}$$

nu depinde de x și y din domeniul de existență.

12.21. Se dă expresia $E(x) = \sin x + \cos x + \sin^3 x + \cos^3 x$. a) Să se arate că

$$E(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)(4 - \sin 2x);$$

b) Să se afle rădăcinile ecuației $E(x) = 0$ situate în intervalul $(-\pi, \pi)$; c) Să se arate că dacă între elementele unui triunghi există relația $b \cos B + c \cos C = a$ atunci triunghiul este isoscel.

12.22. Dîndu-se expresia

$$f(x; k) = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x),$$

a) Să se determine k astfel încît $f(x; k)$ să fie independentă de x; b) Să se determine condiția ca ecuația $f(x; k) = 0$ să admită rădăcini reale; c) Să se rezolve ecuația $f(x; -0,7) = 0$.

12.23. Să se arate că pentru orice x real are loc inegalitatea

$$\sin(\sin^2 x) + \cos(\cos^2 x) > \frac{1}{2}.$$

(Maria Elena Panaitopol)

12.24. Fiind date funcțiile

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}, \cos 2y = \sqrt{\frac{a + b}{2a}}$$

să se arate că se poate stabili o relație între x și y.

(G.M., 1900)

Scanned with OKEN Scanner

12.25. Demonstrați că pentru $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ are loc inegalitatea

$$\frac{\sin \beta}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

12.26. Demonstrați că pentru orice $n \geqslant 1$ și orice $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0, \pi)$ are loc inegalitatea:

a) $$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{n} \leqslant \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

b) $$\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin \alpha_n \leqslant \left[\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right]^n.$$

12.27. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x \sin 4x} + \frac{\cos 5x}{\sin 4x \sin 6x} + \frac{\cos 7x}{\sin 6x \sin 8x} = \frac{\sin 3 \cos 5x}{\sin x \sin 2x \sin 8x}.$$

Generalizare.

12.28. Să se evalueze suma

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 4x \cos 6x} + \ldots + \frac{\sin(2n+1)x}{\cos 2nx \cos(2n+2)x}.$$

12.29. Restabiliți formulele

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \cos \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}.$$

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2},$$

și apoi calculați sumele $\sum_{k=1}^{n} \cos^3 kx$ și $\sum_{k=1}^{n} \sin^3 kx$.

12.30. Să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k \operatorname{tg} 2^k x.$$

Scanned with OKEN Scanner

12.31. Arătați că $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin 2^k x} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^n x$.

12.32. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\cos kx = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{n}{2}.$$

(Liviu Pîrșan)

12.33. Să se calculeze suma

$$\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} \sin^3 \frac{x}{3^k}.$$

12.34. Se dă $\sin x + \cos x = t$. a) Evaluați $\sin^3 x + \cos^3 x$ și $\sin^4 x + \cos^4 x$ în funcție de t. b) Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\sin^n x + \cos^n x$ se poate exprima în funcție de t. Mai mult, dacă $\sin^n x + \cos^n x = f_n(t)$ atunci are loc relația $2f_n(t) = 2tf_{n-1}(t) - (t^2 - 1)f_{n-2}(t)$, $n \geqslant 3$.

12.35. a) Dacă $\sin x + \cos x = t$, evaluați $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$. b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x$ se poate exprima în funcție de t. Deduceți, notînd $\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x = f_n(t)$, că are loc relația $(t^2 - 1) \cdot f_n(t) + f_{n-2}(t) = 2f_{n-1}(t)$.

12.36. Fie $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = t$. a) Arătați că $|t| \geqslant 2$. b) Arătați că, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x$ se poate exprima în funcție de t. Mai mult, punînd $\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x = f_n(t)$ are loc relația $f_n(t) = tf_{n-1}(t) - f_{n-2}(t)$.

12.37. Pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ punem $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = t$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\sin^n x + \cos^n x$ se poate exprima în funcție de t; dacă $\sin^n x + \cos^n x = f_n(t)$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci are loc $f_n(t) = \sqrt{1 + \frac{2}{t}} \cdot f_{n-1}(t) - \frac{1}{t} f_{n-2}(t)$.

12.38. Fie $\sin x = t$. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\sin(2n+1)x$ și $\cos 2nx$ se pot exprima în funcție de t. Notînd $\sin(2n+1)x = f_n(t)$ și $\cos 2nx = g_n(t)$ au loc relațiile $f_n(t) = (1 - 2t^2)f_{n-1}(t) + 2tg_n(t) + g_{n-1}(t)$ și $g_n(t) = 2(1 - 2t^2)g_{n-1}(t) - g_{n-2}(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

12.39. Arătați că dacă πx nu este rațional, atunci au loc relațiile:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos x - \cos(2k+1)x} = \frac{\sin nx}{2\sin^2 x \sin(n+1)x}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos x + \cos(2k+1)x} = \frac{\sin nx}{\sin 2x \cos(n+1)x}$.

12.40. Să se demonstreze identitățile:

a) $1 - C_{2k}^2 \operatorname{tg}^2 x + C_{2k}^4 \operatorname{tg}^4 x - \ldots + (-1)^k C_{2k}^{2k} \operatorname{tg}^{2k} x = \frac{\cos 2kx}{\cos^{2k} x}$.

b) $C_{2k}^1 \operatorname{tg} x - C_{2k}^3 \operatorname{tg}^3 x + \ldots (-1)^k C_{2k}^{2k-1} \operatorname{tg}^{2k-1} x = \frac{\sin 2kx}{\cos^{2k} x}$.

c) $1 - C_{2k-1}^2 \operatorname{tg}^2 x + C_{2k-1}^4 \operatorname{tg}^4 x - \ldots + (-1)^k C_{2k-1}^{2k-2} \operatorname{tg}^{2k-2} x = \frac{\cos(2k-1)x}{\cos^{2k-1} x}$.

12.41. Să se demonstreze că $\prod_{k=1}^{n} \sin\left[x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right] = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$.

12.42. Să se calculeze produsul $\prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x$.

12.43. Să se calculeze sumele:

a) $\cos x \cos x + \cos 2x \cdot \cos^2 x + \ldots + \cos nx \cdot \cos^n x$.

b) $\cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \ldots + \cos^n x \cos nx$.

12.44. Calculați sumele: a) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n+1)x$, b) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n+1)x$.

12.45. Arătați că au loc formulele lui Euler:

a) $\cos x + \cos(x+y) + \cos(x+2y) + \ldots + \cos(x+ny) = \frac{\sin\frac{(n+1)y}{2} \cos\left(x + \frac{ny}{2}\right)}{\sin\frac{y}{2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $\sin x + \sin(x+y) + \sin(x+2y) + \ldots + \sin(x+ny) =$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)y}{2}\sin\left(x+\frac{ny}{2}\right)}{\sin\frac{y}{2}}.$$

12.46. Demonstrați formula lui Snellius:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

12.47. Demonstrați identitățile:

a) $\cos x + a\cos(x+y) + \ldots + a^n\cos(x+ny) =$

$$= \frac{a^{n+2}\cos(x+ny) - a^{n+1}\cos[x+(n+1)y] + \cos x - a\cos(x-y)}{1 - 2a\cos y + a^2}.$$

b) $\sin x + a\sin(x+y) + \ldots + a^n\sin(x+ny) =$

$$= \frac{a^{n+2}\sin(x+ny) - a^{n+1}\sin[x+(n+1)y] + \sin x - a\sin(x+y)}{1 - 2a\cos y + a^2}.$$

12.48. Evaluați produsul

$P_n(x) = (2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1) \ldots (2\cos 2^{n-1}x - 1).$

12.49. Arătați că $\left(\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2^2} + \cos\frac{y}{2^2}\right) \ldots$

$$\ldots\left(\cos\frac{x}{2^n} + \cos\frac{y}{2^n}\right) = \frac{\cos x - \cos y}{2^n\left(\cos\frac{x}{2^n} - \cos\frac{y}{2^n}\right)}.$$

12.50. Evaluați produsul $P_n(x) = (1+\sin x)(1+\sin^2 x)(1+\sin^{2^2} x) \ldots (1+\sin^{2^k} x) \ldots (1+\sin^{2^n} x).$

12.51. Să se calculeze sumele:

a) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx;$

b) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx.$

Scanned with OKEN Scanner

12.52. Stabiliți formule pentru sumele:

a) $1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx$;

b) $C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin nx$.

12.53. Să se arate că:

a) $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \ldots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

b) $\cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \ldots \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \text{ este par} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}, \text{ dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$

12.54. Calculați produsele:

a) $\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n+1}$;

b) $\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \ldots \cos \frac{n\pi}{2n+1}$.

12.55. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ constante reale, x o variabilă reală și funcția f definită prin $f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}$. Demonstrați că dacă $f(x_1) = f(x_2) = 0$ atunci există $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $x_1 - x_2 = k\pi$.

12.56. Arătați că funcțiile de mai jos, definite pe întreaga axă reală, sînt periodice și determinați perioadele lor minime:

a) $f(x) = \sin x + \sin 2x$, b) $f(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$,

c) $f(x) = \sin x + \cos x$, d) $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos 2x$,

e) $f(x) = \sin mx + \cos nx$, unde $m \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$.

12.57. Determinați perioadele minime (strict pozitive) ale funcțiilor: a) $f(x) = \sin^2 x + |\cos x|$, b) $f(x) = 3 \sin \pi x + \cos \frac{\pi x}{2}$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

12.58. Cercetați dacă funcțiile de mai jos sînt periodice sau nu și, în caz afirmativ, determinați perioada minimă pozitivă: a) $f(x) = (x - [x]) - \cos 2\pi x$; b) $f(x) = \sin x^2$; c) $f(x) = \cos \pi x + \sin 3x$.

Scanned with OKEN Scanner

12.59. a) Pentru p și q numere întregi au loc afirmațiile:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \, dx = \begin{cases} \pi \text{ dacă } p = q \\ 0 \text{ dacă } p \neq q \end{cases}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \cos qx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \, dx = \begin{cases} \pi \text{ dacă } p = q \\ 0 \text{ dacă } p \neq q \end{cases}$$

b) Numim polinom trigonometric de ordinul n (de perioadă 2π) o funcție T_n dată prin $T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ unde α_k, β_k sînt constante. Dacă f este o funcție $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ integrabilă, atunci funcțiile $t \to f(t) \sin mt$, $t \to f(t) \cos nt$ sînt integrabile pe $[-\pi, \pi]$. Notăm $a_0(f) = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, $a_k(f) = a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$, $b_k(f) = b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$, $k = 1, 2, \ldots$, Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, asociem funcției f polinomul trigonometric $T_n(f, \cdot)$ de ordinul n definit prin $T_n(f, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ — numit polinom Fourier de ordinul n asociat funcției f. Arătați că $\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(f, t)]^2 \, dt \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(t)]^2 \, dt$ pentru orice polinom trigonometric de ordinul n, T_n, egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă T_n coincide cu $T_n(f, \cdot)$. În plus, are loc inegalitatea Bessel $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \pi \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

12.60. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin x + \sin 5x = 2$; b) $\sin x + \sin 5x + \sin 9x = 3$;
c) $\sin x + \sin 3x = 2$; d) $\sin^2 x + \cos^2 3x = 2$.

12.61. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin 4x + 3 \sin 2x = 0$; b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$;
c) $\sin 2x + 4 \sin x = 0$; d) $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$;
e) $2 \sin^2 x + \sin 2x = 0$; f) $\sqrt{3} \sin^2 x - \sin x \cos x = 0$;
g) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$; h) $3 \cos x + \sin 2x = 0$; i) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$;
j) $3 \sin x + \cos 2x = 1$; k) $\sin x + \cos x + 1 - 3 \sin x \cos x = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

12.62. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$;

c) $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$.

12.63. a) Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin 3x + \cos 3x = \frac{3\sqrt{3}}{4}(\cos x - \sin x);$$

b) Fie m real. Observați că $4m^4 - 4m^3 - 3m^2 + 2m + 1$ este de forma $(2m^2 + am - 1)^2$ cu a real convenabil și apoi rezolvați ecuația:

$$m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1) \sin x - 3m + 1 = 0.$$

Discuție.

(Admitere, Inst. politehnic, Galați, 1973)

12.64. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

12.65. Se dă: $\sin a = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Calculînd $\sin 2a$ să se determine unghiul a;

b) Să se rezolve ecuația:

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 2 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cos x \cdot \cos 2x.$$

(Concurs matematică, București, 1976)

12.66. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 0.$$

12.67. Să se rezolve ecuațiile:

a) $5 + 8 \cos x + 4 \cos 2x + \cos 3x = 0$;

b) $3 \sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x + \cos x$.

12.68. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$(m - 1) \cos^2 x + (2m^2 - 5m + 4) \sin x - 3m + 4 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

12.69. Se dă ecuația

$$a \cdot \sin x + b \cdot \sin 3x + c \cdot \sin 5x + d \cdot \sin 7x = 0$$

a) În ce condiții această ecuație admite soluțiile $k\frac{\pi}{4}$ pentru orice număr întreg k; în acest caz să se rezolve. b) În ce cazuri pentru $b = 1$ ecuația admite numai aceste soluții.

(Concurs matematică, etapa județeană, 1975)

12.70. a) Să se determine numerele reale p și q astfel încît $x = 15$ și $x = 75$ să aparțină mulțimii rădăcinilor ecuației:

$$p \sin x + q \cos x + \sin 3x \cos 2x = 0;$$

b) Luînd pentru p și q valorile găsite, să se arate că ecuația considerată mai are în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ o soluție $x = \alpha \neq \frac{\pi}{12}$; determinînd tg α să se precizeze dacă $\alpha < \frac{\pi}{12}$ sau $\alpha > \frac{\pi}{12}$.

(Admitere, Facultatea de automobile și electrotehnică, Brașov, 1972)

12.71. Să se rezolve ecuația:

$$\cos(x + y)\cos(y + z)\cos(z + x) = 1.$$

(Concurs matematică, București, 1975)

12.72. Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\sin 3x + \sin 2x - \lambda \sin x = 0$$

după parametrul real λ.

(Admitere, Facultatea de matematică, Cluj-Napoca, 1970)

12.73. Se consideră ecuația

$$6 \cos 2\varphi - 7x \cos^2 \varphi + x^3 = 0.$$

a) Considerînd ecuația ca avînd necunoscuta φ și parametrul x, să se determine valorile lui x pentru care ecuația admite

soluții; b) Considerînd ecuația ca avînd necunoscuta x și parametrul φ să se determine valorile lui φ astfel încît una din rădăcinile ecuației să fie dublul celeilalte; c) Pentru valorile lui φ determinate la punctul b), să se afle rădăcinile x ale ecuației.

12.74. Se dă ecuația $2(2a+1)\cos^2 x + 3\cos x + 1 - a = 0$ unde a este un parametru real. a) Să se rezolve ecuația; b) Să se determine a astfel încît ecuația să admită soluții în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; c) Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_n \geqslant 1$ un șir de numere reale crescător, divergent. Înlocuind în ecuația dată pe a prin a_n arătați că există o soluție a ecuației situată în intervalul $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, fie ea x_n. Arătați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este convergent și determinați limita șirului.

(Admitere, Inst. Politchnic, București, 1970)

12.75. Să se rezolve ecuația

$$\log_{\sin(\ln a)} \sqrt[n]{\cos x} - \log_{\cos(\ln a)} \sqrt[n]{\sin x} = 0.$$

12.76. Să se arate că ecuația

$$x^3 - 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}x^2 - 3x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 0$$

admite rădăcina $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{36}$, să se afle celelalte rădăcini, apoi să se deducă egalitatea

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{36}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{36} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{36}.$$

(Prezentată de R.S. România la a XII-a O.I.M.)

12.77. Să se arate că polinomul

$$P(x) = x^{n+1}\cos(n-1)\varphi - x^n \cdot \cos n\varphi - x\cos\varphi + 1$$

se divide cu $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

12.78. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{12} \\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=1+\sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sin x=\sqrt{2}\sin y \\ \sqrt{3}\sin 2x=2\sin 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3} \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=1 \\ 4\cos 2x\cos 2y+1=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(y-\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}x}{a}=\dfrac{\operatorname{tg}y}{b}=\dfrac{\operatorname{tg}z}{c} \\ x+y+z=\pi \end{cases}$

12.79. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații trigonometrice:

a) $\begin{cases} \sin x-\sqrt{2}\sin y=0 \\ \sqrt{3}\cos x-\sqrt{2}\cos y=0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin x-2\sin y=0 \\ \cos x+2\cos y=\sqrt{3}. \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sin x+\sqrt{3}\cos x=2 \\ x+y=2\pi. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$ e) $\begin{cases} \operatorname{ctg}x+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}x}=2\sin\left(y+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{tg}y+\dfrac{1}{\operatorname{tg}y}=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

f) $\begin{cases} \sin x\sin y=\alpha \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\beta, \ \alpha, \ \beta\in\mathbf{R}. \end{cases}$

12.80. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrilor m și n următoarele sisteme de ecuații trigonometrice:

a) $\begin{cases} m\sin x-\sin y=0 \\ 2\cos x+\cos y=1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=m \\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=n. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(\cos 2x+\cos 2y)=1+4\cos^2(x-y) \\ x-y=m. \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin x+\sin y=m \\ \cos x-\cos y=n. \end{cases}$ e) $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=m \\ x-y=n. \end{cases}$

f) $\begin{cases} \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x=m \\ x+y=n. \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

12.81. Să se rezolve următoarele inecuații:

a) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x} < 0$;

b) $\frac{\cos x - \cos 2x - 1}{\cos 2x} \geqslant 0$;

c) $\frac{3 - 4\cos^2 x}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$;

d) $\frac{\sin x \operatorname{tg} x - 1}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} \geqslant 0$;

e) $\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\cos x - \sin x} > 0$;

f) $\frac{\cos x}{(1 - \cos 2x)(\cos x - \sin x)} > \frac{1}{2}$;

g) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x + \sqrt{2}} \geqslant 0$;

h) $\cos(2 \sin x) > 0$;

i) $a^{\cos x} - a^{\sin x} \geqslant 0$; $a > 0$, $a \neq 1$.

j) $\cos x - \cos 2x + \cos 3x \leqslant \frac{1}{2}$, $x \in [0, \pi)$.

12.82. Demonstrați că pentru orice x real au loc inegalitățile:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant \frac{1}{2}$, b) $\sin^6 x + \cos^6 x \leqslant \frac{1}{4}$, c) $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$, precizînd cazurile de egalitate.

12.83. Fie p și q numere reale, $p > 2$, $q > 2$. Arătați că $\sin^p x + \cos^q x \leqslant 1$ pentru orice x real. Presupunînd că p și q sînt numere naturale, determinați soluțiile ecuației $\sin^p x + \cos^q x = 1$.

12.84. Dacă p și q sînt numere reale $p < 2$, $q < 2$, atunci pentru orice x real are loc $|\sin x|^p + |\cos x|^q \geqslant 1$; precizați cazurile de egalitate!

12.85. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încît $x_1 \leqslant x_i \leqslant x_n$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Atunci are loc

$$\operatorname{tg} x_1 \leqslant \frac{\sum_1^n \sin x_k}{\sum_1^n \cos x_k} \leqslant \operatorname{tg} x_n.$$

Arătați că egalitățile au loc simultan și precizați în ce condiție se realizează aceasta.

12.86. Dacă $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin(x+y)\sin(y+z)\sin(z+x) \geqslant \sin 2x \sin 2y \sin 2z$. În ce caz are loc egalitatea?

12.87. Dacă $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z) \geqslant 9$.

12.88. Să se arate că pentru orice numere reale a, b, x au loc inegalitățile:

$$\frac{1+ab-\sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2}}{2} \leqslant (\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x) \leqslant \frac{1+ab+\sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2}}{2}.$$

12.89. Rezolvați inecuațiile: a) $\sin x + \cos x \leqslant 1$; b) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; c) $\sin x - \cos 2x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{3}\sin x + \cos x \geqslant \frac{1}{2}$; e) $\sin 2x + \frac{1}{2} > \sin x + \cos x$.

12.90. Să se rezolve inecuațiile: a) $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x \leqslant \sin x \sin 3x$; b) $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{5}{8}$.

12.91. Un canal de navigație de lățime constantă l prezintă o schimbare de direcție în unghi drept. Calculați lungimea maximă a unei nave care ar putea trece prin canal. (Se neglijează lățimea navei.)

Scanned with OKEN Scanner

12.92. Arătați că: $\arcsin x + \arcsin y =$

$$= \begin{cases} \pi - \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right] & \text{dacă } x>0,\ y>0 \\ & \text{și } x^2+y^2>1 \\ -\pi - \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right] & \text{dacă } x<0,\ y<0 \\ & \text{și } x^2+y^2>1 \\ \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right] & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

12.93. Arătați că: $\arcsin x - \arcsin y =$

$$= \begin{cases} -\pi - \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right] & \text{dacă } x<0,\ y>0 \\ & \text{și } x^2+y^2>1 \\ \pi - \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right] & \text{dacă } x>0,\ y<0 \\ & \text{și } x^2+y^2>1 \\ \arcsin\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right] & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

12.94. Arătați că: $\arccos x + \arccos y =$

$$= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) & \text{dacă } x+y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) & \text{dacă } x+y<0 \end{cases}$$

$$\arccos x - \arccos y =$$

$$= \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) & \text{dacă } x \geqslant y \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}) & \text{dacă } x<y \end{cases}$$

12.95. Demonstrați că:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} & \text{dacă } xy<1 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} & \text{dacă } xy>1 \text{ și } x>0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy} & \text{dacă } xy>1 \text{ și } x<0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy} & \text{dacă } xy>-1 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy} & \text{dacă } xy<-1 \text{ și } x>0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy} & \text{dacă } xy<-1 \text{ și } x<0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

12.96. Demonstrați că:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{xy-1}{x+y} & \text{dacă } x+y>0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{xy-1}{x+y} & \text{dacă } x+y<0 \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \begin{cases} -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{xy+1}{y-x} & \text{dacă } x-y>0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{xy+1}{y-x} & \text{dacă } x-y<0. \end{cases}$$

12.97. Calculați: a) $\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) + \operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$, c) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{2}-1) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$, d) $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})$, e) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg}(-2-\sqrt{3})$, f) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$.

12.98. a) Calculați $\arcsin\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4} + \arcsin\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ și verificați prin formulele 13.92. b) Calculați $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\arccos\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \arccos\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ și verificați prin formulele 13.94.

12.99. a) Arătați că $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$. b) Dacă $x>0$, $y>0$, $z>0$, atunci $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z = \pi$ dacă și numai dacă $x+y+z=xyz$.

12.100. Să se arate că $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\dfrac{2k}{k^4+k^2+2} = \operatorname{arctg}(n^2+n+1) - \dfrac{\pi}{4}$.

12.101. Arătați că $\lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2k^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

12.102. Pentru orice x real, $x > 0$ și orice $n \in \mathbf{N}^*$ are loc

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + k(k+1)x^2} = \operatorname{arctg} \frac{nx}{1 + (n+1)x^2}.$$

Deduceți din aceasta suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + n(n+1)x^2}$.

12.103. Fie $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ o progresie aritmetică cu a_1 și rația r numere strict pozitive. Atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ are loc

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{r}{1 + a_k a_{k+1}} = \operatorname{arctg} \frac{a_{n+1} - a_1}{1 + a_1 a_{n+1}}.$$

12.104. Arătați că $2 \operatorname{sign} x \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

12.105. Rezolvați ecuația $\arcsin x + \arcsin(1 - x) = \frac{\pi}{2}$.

12.106. Rezolvați ecuația $\arcsin x + \arccos(1 - x) = \frac{\pi}{2}$.

12.107. Arătați că pentru $x \in [0, 1]$ are loc $2 \arcsin \frac{x}{2} \leqslant \arcsin x$, iar pentru $x \in [-1, 0)$ are loc $2 \arcsin \frac{x}{2} > \arcsin x$.

12.108. Arătați că: a) $\operatorname{sign} x \arcsin x + \arcsin \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}$; b) $\arccos x + \operatorname{sign} x \arccos \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}$.

12.109. Arătați că

$$\arcsin(3x - 4x^3) = \begin{cases} -\pi - 3 \arcsin x & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 3 \arcsin x & \text{dacă } -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2} \\ \pi - 3 \arcsin x & \text{dacă } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

12.110. Arătaţi că

$$\arccos(4x^3-3x)=\begin{cases}-2\pi+3\arccos x & \text{dacă } -1\leqslant x\leqslant -\frac{1}{2}\\ 2\pi-3\arccos x & \text{dacă } -\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}\\ 3\arccos x & \text{dacă } \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

12.111. Rezolvaţi inecuaţiile: a) $\arcsin x\geqslant\arccos x$; b) $\arcsin x<\arcsin(1-x)$; c) $(\arccos x)^2-3\arccos x++2>0$; d) $-\frac{\pi}{12}\leqslant\operatorname{arctg}|x|+\operatorname{arctg}x\sqrt{3}<\frac{\pi}{2}$

12.112. Să se verifice relaţiile:

a) $\arcsin\frac{2}{5}+\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\arcsin\frac{\sqrt{21}}{5}$;

b) $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}=\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}=$
$=\arccos\frac{4}{5}=\arcsin\frac{3}{5}$.

12.113. Să se calculeze valoarea expresiei

$$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{2}{3}\right)+\cos\left[\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right]$$

12.114. Să se demonstreze identitatea

$$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

12.115. Să se calculeze sumele:

a) $S_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$;

b) $S_2=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}$;

c) $S_3=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

12.116. Să se rezolve ecuațiile

a) $2 \arcsin x + \arccos(1-x) = 0$.

b) $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) - \sin(2 \arcsin x) = 0$.

c) $\arcsin(1-x) - 2 \arccos x = 0$.

12.117. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{4}.$$

12.118. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \arcsin x \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12} \\ \arccos x \arccos y = \dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

12.119. Să se rezolve inecuația

$$\arccos x - \arcsin x < 0.$$

12.120. Să se rezolve inecuația

$$2 \operatorname{arctg}^2 x + \operatorname{arctg} x - 1 \geqslant 0.$$

12.121. Să se rezolve inecuația

$$\arccos(x^2-1) \leqslant \cos(x+1).$$

12.122. Să se rezolve inecuația

$$\arcsin x + \arccos(1-x) < \frac{\pi}{2}.$$

12.123. Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

a) $1 + i(2+\sqrt{3})$; b) $(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$;

c) $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12}$; d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{15}$; e) $[(1-\sin\alpha) + i(1+\sin\alpha)]^{10}$; f) $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$; g) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^3} + \dfrac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^3}}$.

12.124. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $1 + \cos a - i \sin a \in (0, \pi)$

(Admitere, profil mecanic, 1980)

Scanned with OKEN Scanner

12.125. Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ astfel încît numărul complex $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\alpha + (\alpha + 1)i}$ să fie real.

(Admitere, profil mecanic, 1981)

12.126. Știind că $z + \dfrac{1}{z} = 2 \cos \theta$, $z \in \mathbf{C} - \{0\}$, $\theta \in \mathbf{R}$, să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbf{N}$.

(Admitere, profil metalurgie, 1981)

12.127. Să se rezolve ecuațiile:

a) $(1 + i\sqrt{3})\, z^4 - 2(\sqrt{3} + i) = 0$.

b) $z^8 + (1 - i)z^4 - i = 0$.

12.128. Să se rezolve ecuația $\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^n = \cos \theta + i \sin \theta$.

12.129. Punctele A_1, A_2 au ca afixe numerele complexe z_1, z_2 care sînt rădăcinile ecuației

$$z^2 - 2(3 + 2i)z + 5(1 + 2i) = 0.$$

Să se găsească ecuația de gradul doi care admite ca soluții afixele w_1, w_2 ale unor puncte B cu proprietatea că triunghiul A_1A_2B este echilateral.

(Admitere, profil tehnic, 1983)

12.130. Să se rezolve ecuația $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0$.

12.131. Să se rezolve ecuația $\sqrt[n]{z} - 1 = i \sin \alpha - \cos \alpha$, $\alpha \neq 2k\pi$.

12.132. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n}$ și $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n}$.

12.133. Să se rezolve ecuația $z^{n-1} = \bar{z}$ ($z \in \mathbf{C}$, $\bar{z}$ conjugatul lui z și $n \in \mathbf{N}$).

(Admitere, profil electric, 1982)

12.134. Fie U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 rădăcinile de ordinul șase ale unității. Să se arate că ele sînt afixele vîrfurilor unui hexagon regulat înscris în cercul de centru O și rază 1.

(Admitere, Fac. de matematică, 1983)

Scanned with OKEN Scanner

12.135. A, B, C fiind unghiurile unui triunghi, să se demonstreze relațiile:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

c) $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$

d) $\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B = 1 + \cos A \cos B \cos C$

e) $\sum \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

f) $\sum \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

g) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

h) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$

i) $\frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} C \operatorname{tg} A} = 1$

j) $\frac{\sin 2A \sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin 2B \sin(C-A)}{\cos C \cos A} + \frac{\sin 2C \sin(A-B)}{\cos A \cos B} = 0$

k) $\sum \frac{\sin 2B + \sin 2C - \sin 2A}{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A} \cdot \operatorname{ctg} A = 2$

l) $\sin^3 A \sin(B-C) + \sin^3 B \sin(C-A) + \sin^3 C \sin(A-B) = 0$

12.136. Fie ABC un triunghi în care $m(A) > \frac{\pi}{6}$, $m(B) > \frac{\pi}{6}$, $m(C) > \frac{\pi}{6}$. Atunci $2 \cdot \left[\sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2C - \frac{\pi}{3}\right)\right] = (\cos 2A + \sqrt{3} \sin 2A) \cdot (\cos 2B + \sqrt{3} \sin 2B)(\cos 2C + \sqrt{3} \sin 2C)$.

12.137. Într-un triunghi ABC are loc

$$2\left[\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=\left(\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)\left(\sqrt{3}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right).$$

12.138. Fie triunghiul ABC cu $m(A)>m(B)>m(C)$. Să se arate că dacă $\sin A+\sin B+\sin C=\sqrt{2}$, atunci $m(B)+m(C)<45°$.

(Admitere facultăți, 1982)

12.139. a) Dacă într-un triunghi au loc relațiile

$$a\sin B+b\sin A=2c\sin C,\ b\sin C+c\sin B=2a\sin A$$

atunci triunghiul este echilateral.
b) Dacă într-un triunghi are loc relația $b\cos C=c\cos B$ atunci triunghiul este isoscel. c) Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă are loc relația

$$b^2+2ac\cos B=a^2+2bc\cos A.$$

12.140. Dacă într-un triunghi are loc relația

$$a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B=(a+b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$$

atunci triunghiul este isoscel.

(Admitere, Institutul Politehnic, Galați, 1973)

12.141. Să se arate că într-un triunghi oarecare are loc relația

$$R^2(b\sin 3C-c\sin 3B)=abc\sin(B-C).$$

(Lucian Tuțescu)

12.142. a) Laturile a, b, c ale triunghiului ABC sînt în progresie aritmetică dacă și numai dacă are loc relația $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$. b) În condiția de la a) să se stabilească între ce valori poate să varieze măsura unghiului B.

(Concurs matematică, 1960)

12.143. În ce fel de triunghi există relația

$$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2+b^2)\sin(A+B)?$$

Scanned with OKEN Scanner

12.144. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare există relația

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{R}{S}\,(1+\cos A\cos B\cos C)$$

(Ștefan Mititelu)

12.145. Să se arate că triunghiurile care au lungimile laturilor în progresie aritmetică și lungimile înălțimilor în progresie aritmetică sînt echilaterale.

(Marcel Chiriță)

12.146. Condiția necesară și suficientă ca triunghiul ABC să fie isosc el cu baza $|BC|$ este ca

$$2b\cos A+2(a+b)\cos B=a+2b.$$

(Aurel Doboșan)

12.147. Într-un triunghi oarecare are loc relația

$$\operatorname{tg}^2 A+(\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C)(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)=\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C\sec^2 A.$$

(Baltag Vasile)

12.148. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd că unghiurile A, B, C sînt în progresie aritmetică și că

$$a+b+c=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{4}(a+b+c)$$

(Admitere, Institutul Politehnic, Brașov 1971)

12.149. Să se arate că, oricare ar fi parametrul real m, diferit de 1, imaginile pe cercul trigonometric ale soluțiilor ecuației

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}+m\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\cos x$$

sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1973)

12.150. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de tangență ale laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului ABC cu cercul înscris. Evaluați lungimile a_1, b_1, c_1 ale laturilor $|B_1C_1|$, $|C_1A_1|$, $|A_1B_1|$ în funcție de elementele triunghiului ABC și apoi demonstrați că $\dfrac{a^2}{a_1^2}+\dfrac{b^2}{b_1^2}+\dfrac{c^2}{c_1^2}\geqslant 12$.

Scanned with OKEN Scanner

12.151. Fie ABC un triunghi oarecare și D un punct al dreptei BC cu proprietatea $\| AB \|^2 - \| AC \|^2 = \| DB \|^2 - \| DC \|^2$. Să se arate că $| AD |$ este înălțimea din A în triunghiul ABC.

12.152. Arătați că dacă într-un triunghi există relația

$$h_a = \frac{p \cos \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}}$$

atunci triunghiul este isoscel.

(Gh. D. Simionescu)

12.153. Triunghiul ABC în care $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1 = 0$ este echilateral.

12.154. Triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă

$$1 - 8 \cos A \cos B \cos C = 0.$$

12.155. Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \\ \sin 3A & \sin 3B & \sin 3C \end{vmatrix} = \frac{p^2(a-b)(b-c)(a-c)}{2R^5}$$

(Gh. Popescu)

12.156. Dacă între elementele unui triunghi are loc egalitatea $8(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C - 3 \cos A \cos B \cos C) + 36(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) - 27 = 0$ triunghiul este echilateral.

(I. Nicolaescu)

12.157. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea (cu R raza cercului circumscris triunghiului).

$$R(b + c) \geqslant a\sqrt{bc}$$

precizînd cînd se realizează egalitatea.

(Admitere, facultăți tehnice, 1982)

Scanned with OKEN Scanner

12.158. În orice triunghi ABC are loc inegalitatea $1+\cos A\cos B\cos C \geq \frac{1}{2}(\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A)$, egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

12.159. Într-un triunghi ABC au loc inegalitățile:

a) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ b) $\sin A+\sin B+\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $|\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ d) $|\cos A+\cos B+\cos C| \leq \frac{3}{2}$

egalitățile realizîndu-se exact pentru triunghiul echilateral.

12.160. Într-un triunghi oarecare au loc inegalitățile

a) $3\sqrt{3}r \leq p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ b) $S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{abc}{2p}$ c) $S \leq \frac{9\,abc}{4(a+b+c)\sqrt{3}}$

egalitățile avînd loc pentru și numai pentru triunghiul echilateral. Deduceți că între toate triunghiurile cu un perimetru dat există unul și numai unul de arie maximă, triunghiul echilateral.

12.161. În orice triunghi ABC au loc inegalitățile

$$\frac{3}{2} \leq \sum \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} < 2$$

sumarea făcîndu-se prin permutări circulare.

(Constantin Popa)

12.162. Pe un cerc de rază egală cu unitatea se iau trei puncte A, B, C. Dacă $\|AB\|\cdot\|BC\|\cdot\|CA\| \geq 3\sqrt{3}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

(Marcel Chiriță)

12.163. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ABC. Notînd $\|PA\| = x$, $\|PB\| = y$, $\|PC\| = z$, să se arate că

$$(xy+yz+zx)(x+y+z) \geq a^2x+b^2y+c^2z$$

(Baraj, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

12.164. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC are loc inegalitatea

$$\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A-C}{2}+\sin\frac{3A}{2}\leqslant\frac{3}{2}$$

(Baraj, 1970)

12.165. Fie $F(n)=x^n\sin(nA)+y^n\sin(nB)+z^n\sin(nC)$ unde x, y, z, A, B, C sînt numere reale și $A+B+C$ este un multiplu întreg al lui π. Să se arate că dacă $F(1)=F(2)=0$, atunci $F(n)=0$ pentru orice număr natural.

(Olimpiada de matematică, S.U.A., 1980)

12.166. Fiind dat un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c, raza cercului circumscris de lungime R, centrul cercului circumscris O și H ortocentrul, să se demonstreze relația $9R^2=\|OH\|^2+a^2+b^2+c^2$

(Propusă de Austria la a XVII-a O.I.M.)

12.167. Vîrfurile poligonului $A_1A_2\ldots A_n$ sînt afixele numerelor $1, z, \ldots, z^n$, iar vîrfurile poligonului $B_1B_2\ldots B_n$ sînt afixele numerelor $1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}$ unde $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Să se afle raportul ariilor celor două poligoane.

(T.O. Mîșacova, U.R.S.S.)

Capitolul 13

PROBLEME DATE LA CONCURSURI

13.1. Se dă un triunghi dreptunghic în A, ABC. Fie $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ medianele triunghiului și G punctul lor de intersecție. Între catetele b și c există relația $c^2 = 2b^2$. Se cere: a) Să se calculeze lungimile medianelor triunghiului în funcție de b și să se arate că triunghiurile ACC' și ABC sînt asemenea. b) Să se arate că medianele $|AA'|$ și $|CC'|$ sînt perpendiculare, iar patrulaterul $GA'CB'$ este inscriptibil. c) Să se arate că, reciproc, dacă în triunghiul dreptunghic ABC medianele $|CC'|$ și $|AA'|$ sînt perpendiculare, atunci între catete există relația $c^2 = 2b^2$. d) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului ABC în jurul axei ce trece prin vîrful A și este paralelă cu ipotenuza $|BC|$.

(Admitere, Inst. Politehnic, București, 1967)

13.2. Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC întîlnește dreapta BC în D. Se consideră o paralelă MN la AD, M pe dreapta AB și N pe dreapta AC. a) Să se calculeze segmentelor $|DA|$, $|DB|$ și $|DC|$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC. b) Să se arate că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil. c) Să se arate că locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$, cînd paralela MN variază, este o dreaptă care trece prin A. d) Să se arate că locul geometric de la punctul precedent conține un punct E situat pe dreapta BC astfel încît $\frac{\|EB\|}{\|EC\|} = \frac{\|DB\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|^2}{\|AC\|^2}$. e) Să se demonstreze congruența unghiurilor $\widehat{BAE}$ și $\widehat{CAA'}$, A' fiind mijlocul segmentului $|BC|$. f) Presupunînd triunghiul ABC dreptunghic în A și $\|AB\| < \|AC\|$, să se exprime aria suprafeței obținută prin rotirea în jurul dreptei DC a segmentului $|DA|$ și a arcului de cerc $\overset{\frown}{AC}$ în funcție de $\|AB\| = c$ și $\|AC\| = b$.

(Admitere, Facultatea de matematică, Iași, 1975)

13.3. Se dau două cercuri secante în A și B, de centre O_1 și O_2. O dreaptă care trece prin A retaie cercurile în P și Q, iar paralela prin B la PQ retaie cercurile în R și S (P și R pe cercul cu centrul O). a) Să se arate că patrulaterul $PQRS$ este paralelogram. b) Să se găsească locurile geometrice ale mijloacelor laturilor paralelogramului $PQRS$ și al centrului său de simetrie cînd punctul P parcurge cercul de centru O_1. c) Să se arate că două dintre laturile paralelogramului au lungime constantă, iar celelalte două nu depășesc dublul distanței centrelor. d) Să se arate că suprafața generată prin rotirea paralelogramului $PQRS$ în jurul liniei centrelor se descompune în arii laterale de conuri și trunchiuri de conuri.

(Admitere, Institutul Politehnic, Iași, 1975)

13.4. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$, avînd unghiuri drepte în A și D, astfel ca $\| AB \| + \| CD \| = \| BC \|$. Se notează cu O mijlocul segmentului $| AD |$ și cu M mijlocul segmentului $| BC |$. a) Să se calculeze lungimile laturilor trapezului în funcție de $\| AD \| = 2b$ și $\alpha =$ măsura $\widehat{BCD}$ aducîndu-se expresiile lor în formă de produs. b) Fie E proiecția punctului B pe dreapta CD, iar P proiecția lui O pe BC. Să se arate că triunghiurile BEC și OPM sînt asemenea. c) Să se arate că, dacă $| AD |$ rămîne fix, iar celelalte laturi sînt variabile satisfăcînd condiția din enunț, atunci latura $| BC |$ rămîne tangentă la cercul de diametru $| AD |$. d) Să se arate că dreptele OB și OC sînt perpendiculare. e) Pe perpendiculara în O pe planul trapezului se ia punctul S astfel încît $\| OS \| = d$. Să se găsească distanța de la punctul O la planul SBC în funcție de b și d.

(Admitere, Facultatea de electrotehnică, Craiova, 1976)

13.5. Pe cercul de diametru fix $| AB |$, se iau punctele M și C situate de o parte și cealaltă a diametrului. Fie N mijlocul segmentului $| MC |$ și P proiecția lui N pe AM. Se notează $\mathrm{m}(\widehat{MAB}) = x$. a) Să se afle locul geometric al punctului P cînd M descrie semicercul pe care se află, C fiind fix. b) Să se afle x astfel ca să avem $\| AM \| + \| BC \| = \| AC \| + \| BM \|$. c) Să se arate că pentru poziția lui M determinată la punctul b), în patrulaterul $AMBC$ se poate înscrie un cerc. Să se afle raza acestui cerc.

(Admitere, Institutul Politehnic, București, 1970)

Scanned with OKEN Scanner

13.6. Să se calculeze aria trapezului isoscel circumscris unui cerc de rază R, știind că unghiurile ascuțite ale trapezului sînt de 60^c.

13.7. Să se calculeze lungimea bisectoarei interioare a unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC în funcție de catetele $\| AB \| = c$ și $\| AC \| = b$ ale acestuia.

13.8. Se consideră o prismă dreaptă care are ca bază pătratul $ABCD$ avînd laturile $| AB |$, $| BC |$, $| CD |$, $| DA |$, și muchiile $| AA' |$, $| BB' |$, $| CC' |$ și $| DD' |$. Pe prelungirea laturii $| DA |$ se consideră un punct I astfel încît $\| AI \| = a$ (A între I și D), iar pe prelungirea lui $| CB |$ se consideră punctul J astfel încît $\| BJ \| = b$ (B între J și C). Un plan trecînd prin dreapta IJ intersectează muchiile $| AA' |$, $| BB' |$, $| CC' |$ și $| DD' |$ respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1. Să se demonstreze că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram și că $\frac{\| AA_1 \|}{a} = \frac{\| BB_1 \|}{b}$.

13.9. Se consideră un triunghi ABC în care $m(\widehat{BAC}) = 60°$ și unghiurile C și B sînt ascuțite. Fie M mijlocul laturii $| BC |$ și $B'C'$, picioarele înălțimilor din vîrfurile B, respectiv C pe laturile opuse. Să se arate că triunghiul $MB'C$ este echilateral.

13.10. Pe un cerc se consideră două puncte A și B care nu sînt diametral opuse. Tangentele în A și B la cerc se intersectează în punctul C. Prin punctul A se duce paralela la dreapta BC care intersectează din nou cercul în D. Dreapta CD intersectează a doua oară cercul în E. Dreptele AE și BC se intersectează în punctul F. Să se arate că $\widehat{BCE} \equiv \widehat{CAE}$ și că $\| FC \|^2 = \| AF \| \cdot \| EF \|$.

13.11. Un tetraedru $SABC$ are baza ABC și lungimea înălțimii din vîrful S egală cu h. La distanțele $h/3$ și $h/2$ de vîrful S se duc două plane paralele cu baza, obținîndu-se secțiunile $A'B'C'$ și respectiv $A''B''C''$ în tetraedru. Să se determine raportul volumelor trunchiurilor de piramidă $ABCA'B'C'$ și $A''B''C''A'B'C'$.

(Problemele 13.6—13.11 au fost date la examenele de admitere în institutele politehnice, secția ingineri, iulie 1980)

Scanned with OKEN Scanner

13.12. Să se demonstreze că în orice triunghi dreptunghic suma lungimilor catetelor este egală cu suma lungimilor diametrelor cercurilor înscris și circumscris triunghiului.

13.13. Să se arate că proiecțiile a două drepte din spațiu pe un plan paralel cu perpendiculara comună sînt două drepte paralele.

13.14. Într-un plan (π) se fixează două puncte distincte A și B și se notează cu $\mathcal{M}$ mulțimea punctelor din planul (π) necoliniare cu punctele A și B. Se consideră funcția $f : \mathcal{M} \to (\pi)$ care asociază fiecărui punct $P \in \mathcal{M}$ ortocentrul $f(P)$ al triunghiului ABP. a) Să se determine submulțimea de puncte P a lui $\mathcal{M}$ pentru care $f(P) = A$ respectiv $f(P) = C$ în care C este un punct arbitrar de pe dreapta AB diferit de A și de B. Să se demonstreze că pentru orice punct $P \in \mathcal{M}$ pentru care $f(P) \notin \{A, B\}$ avem $f(f(P)) = P$, b) Se consideră în planul (π) un cerc O care conține punctele A și B. Să se demonstreze că pentru orice punct $P \in O \cap \mathcal{M}$ imaginea sa $f(P)$ aparține cercului O' simetricul cercului O față de dreapta AB.

(Problemele 13.12—13.14 au fost date la examenul de admitere în facultățile de matematică, iulie 1980)

13.15. Fie ABC un triunghi oarecare, avînd toate unghiurile ascuțite. Dacă A', B', C' sînt picioarele înălțimilor din vîrfurile A, B, C, H ortocentrul, iar R raza cercului circumscris, să se arate că:

$$\|HA'\| \cdot \cos A + \|HB'\| \cdot \cos B + \|HC'\| \cos C = 6R \cos A \cos B \cos C$$

$$\frac{\|HA\|}{\|HA'\|} + \frac{\|HB\|}{\|HB'\|} + \frac{\|HC\|}{\|HC'\|} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - 3$$

13.16. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Paralelele prin A și B la laturile BC și AD taie dreapta CD în punctele E și F, iar cercul circumscris patrulaterului în punctele M și N. a) Să se arate că $\|AB\|^2 = \|CE\| \cdot \|FD\|$. b) Să se arate că patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil.

Scanned with OKEN Scanner

13.17. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Fie a, b, c, d lungimile înălțimilor tetraedrului din vîrfurile A, B, C, D. Dacă O este un punct oarecare interior tetraedrului și α, β, γ, δ sînt distanțele punctului O la fețele $[BCD]$, $[CDA]$, $[DBA]$, $[ABC]$, să se arate că are loc relația $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1$.

13.18. Într-un plan (π) se consideră un segment $|AB|$ și M un punct mobil interior acestui segment. Se construiesc în planul (π), de aceeași parte a dreptei AB triunghiurile echilaterale AME și BMF. a) Să se arate că dreptele EF și AE sînt perpendiculare dacă și numai dacă $\|AM\| = 2 \cdot \|MB\|$. b) Dacă P este mijlocul segmentului $|EF|$, să se arate că dreapta MP trece printr-un punct fix.

(Problemele 13.15—13.18 au fost date la examene de admitere în diferite facultăți, în anul 1981)

13.19. Într-un tetraedru regulat se consideră patru sfere congruente tangente între ele și fiecare tangentă la trei dintre fețele tetraedrului. Să se calculeze raza sferelor în funcție de muchia l a tetraedrului.

(Admitere, facultăți de electrotehnică, 1982)

13.20. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat (convex) și $F = |AC| \cap |BD|$. Să se arate că patrulaterul $AFDE$ este romb și să se calculeze raportul $\frac{\|DF\|}{\|BF\|}$.

(Admitere, facultăți de mecanică, 1982)

13.21. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in |AB|$, $Q \in |BC|$, $R \in |CA|$ astfel încît $|AP| \equiv |BQ| \equiv |CR|$. Să se arate că

$$4 \text{ aria}[PQR] \geqslant \text{aria}[ABC].$$

13.22. Într-un tetraedru muchiile opuse sînt două cîte două perpendiculare. Să se arate că mijloacele celor șase muchii se află pe o sferă.

13.23. Fie propoziția „Există un triunghi ABC care nu este isoscel și nici dreptunghic și în care $b + a \sin C = c + b \sin A$“. Este adevărată aceasta propoziție? Justificați răspunsul.

Scanned with OKEN Scanner

13.24. Se dau relațiile $\sin x + \sin y = a$; $\cos x + \cos y = b$; $a^2 + b^2 = 1$. Să se arate că $\sin(x + y) = 2ab$.

13.25. Să se afle locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la o parabolă.

(Probleme 13.21—13.25 au fost date la admitere în facultățile de matematică, iulie 1982)

13.26. Fie ABC un triunghi care nu este dreptunghic în A sau B și fie $M \in AB$. Perpendiculara în M pe AB intersectează dreptele AC și BC în P, respectiv Q. Să se arate că:

$$\|QB\|^2 \cdot \|IC\|^2 = \|IP\|^2 \cdot \|QB\|^2 + \|MB\|^2 \cdot \|IC\|^2$$

unde I este intersecția dintre perpendiculara în P pe AC și perpendiculara în Q pe BC.

13.27. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se calculeze în funcție de lungimile a, b, c ale laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ ale triunghiului puterea punctului G față de cercul circumscris triunghiului ABC.

13.28. În vîrfurile opuse A și C ale pătratului $ABCD$ avînd latura de lungime a se consideră, de aceeași parte a planului pătratului, segmentele perpendiculare pe planul pătratului $|AA'|$ și $|CC'|$ de lungimi $a/\sqrt{2}$ și $3a/\sqrt{2}$. a) Să se calculeze lungimea segmentului $|A'B|$ și lungimea segmentului $|A'C'|$. b) Să se determine măsura unghiului $\widehat{BA'C'}$. Să se calculeze volumul tetraedrului $C'A'BD$.

13.29. Fie triunghiul isoscel ABC în care $\|AB\| = \|AC\| = 5$, $\|BC\| = 6$ și D este piciorul înălțimii din A. Cercul cu centrul în A și de rază $\|AD\|$ intersectează laturile $|AB|$ și $|AC|$ în E și respectiv F. Rotim figura în jurul dreptei AD. Să se calculeze aria calotei generate de arcul $\overset{\frown}{EDF}$, aria laterală și volumul trunchiului de con generat de trapezul $BCFE$.

13.30. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi ABC știind că sînt în progresie aritmetică și satisfăcînd relația $\cos^2 B = \sin A \sin C$.

(Probleme 13.26 13.30 au fost date la admitere în facultăți de mecanică în iulie 1983)

Scanned with OKEN Scanner

13.31. În triunghiul isoscel ABC ($\| AB \| = \| AC \|$) se cunoaște $\| BC \| = 2a$ și înălțimea din A, $\| AD \| = b$, $b \geqslant a$. Considerînd punctul $M \in | AC |$, să se determine $x = \| AM \|$ astfel încît patrulaterul $AMDB$ să fie inscriptibil.

13.32. Fie ABC un triunghi oarecare. O paralelă la dreapta BC taie laturile AB și AC ale triunghiului în punctele D și respectiv E. Fie M un punct oarecare pe segmentul $| BC |$. Să se evalueze aria patrulaterului $ADME$ în funcție de aria S a triunghiului ABC și aria S_1 a triunghiului ADE.

13.33. Se dă triunghiul ABC în care mediana $| AA' |$ este perpendiculara pe AB. Notînd cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului, să se calculeze unghiul A în funcție de b, c și unghiul C în funcție de a, b.

13.34. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Să se arate că mijloacele celor șase muchii ale cubului ce nu trec prin nici unul din vîrfurile A și C' se află în același plan și sînt vîrfurile unui hexagon regulat.

13.35. Să se rezolve ecuația

$$3 \sin^3 x + \cos^3 x = 2 \sin x + \cos x.$$

(Problemele 13.31.—13.35 au fost date la admitere în facultățile de electrotehnică, în iulie 1983)

13.36. Fie patrulaterul convex $ABCD$. Paralela prin B la latura AD intersectează diagonala $| AC |$ în E, iar paralela prin A la latura BC intersectează diagonala $| BD |$ în F. Să se arate că $EF \| CD$.

13.37. Fie M un punct oarecare pe cercul circumscris triunghiului echilateral ABC. Să se arate că lungimea unuia dintre segmentele $| AM |$, $| BM |$, $| CM |$ este egală cu suma lungimilor celorlalte două.

13.38. Fie două plane perpendiculare p și q, iar A și B două puncte pe intersecția celor două plane. Fie $C \in p$ și $D \in q$ astfel încît $m(\widehat{ABC}) = 90°$ și $m(\widehat{ADB}) = 90°$. Să se arate că triunghiul CBD și triunghiul ADC sînt dreptunghice.

Scanned with OKEN Scanner

13.39. Să se determine raza și volumul sferei înscrise în tetraedrul regulat de latura a.

13.40. Să se arate că oricare ar fi $m \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ imaginile pe cercul trigonometric ale soluțiilor ecuației

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} + m \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = \cos x$$

sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

(Problemele 13.36—13.40 au fost date la admitere în facultăți cu profil chimic și metalurgic, în iulie 1983)

13.41. Fie ABC un triunghi și punctele $M \in |AB|$ $N \in |AC|$ astfel încît $\widehat{ABN} \equiv \widehat{ACM}$. Să se arate că $\|MN\| < \|BC\|$.

(Laurențiu Panaitopol, concurs matematică, 1983)

13.42. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și M un punct în interiorul său astfel încît măsurile unghiurilor $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$ și $\widehat{AMB}$ să fie egale cu 90°, 120°, 150° respectiv. Notîndu-se cu P, Q și R, respectiv, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BMC, AMC și AMB, să se arate că $\sigma[PQR] > \sigma[ABC]$.

(Ion Tomescu, concurs matematică, 1983)

13.43. Fie un hexagon regulat cu latura $2/\sqrt{3}$ așezat pe o masă. Peste el se așază o mulțime de discuri de rază 1, astfel ca centrele lor să fie în interiorul hexagonului. Să se demonstreze că pentru a fixa toate discurile pe masă sînt suficiente trei pioneze plasate în vîrfurile unui triunghi echilateral convenabil ales.

(Concurs „Gh. Țițeica", Slatina, 1982)

13.44. Să se demonstreze că dacă există o sferă tangentă tuturor muchiilor piramidei triunghiulare $SABC$ avînd centrul Ω pe înălțimea $|SO|$ a piramidei, atunci piramida este regulată. Considerînd că raza sferei este r și $\|S\Omega\| = kr$, să se afle volumul piramidei.

(Concurs „Gh. Țițeica", Slatina, 1982)

Scanned with OKEN Scanner

13.45. Pe diametrul $|AB|$ care mărginește un semicerc se iau punctele P și Q și pe semicerc punctele R și S astfel încît patrulaterul $PQRS$ este un pătrat. Fie C un punct pe semicerc astfel încît triunghiul ABC și patrulaterul $PQRS$ sînt echivalente. Să se demonstreze că una din dreptele care trec prin unul din punctele R și S și prin unul din punctele A și B taie o latură a pătratului în centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

(Olimpiada de matematică, Marea Britanie, 1980)

13.46. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu baza mare $ABCD$, baza mică $A'B'C'D'$ și muchiile laterale $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ astfel încît raza cercului circumscris lui $ABCD$ să fie mai mică decît raza cercului circumscris lui $ABB'A'$. Să se demonstreze că drumul cel mai scurt de pe suprafața trunchiului de piramidă dat care unește pe A cu C' nu are puncte comune cu bazele în afară de extremități.

(Baraj, 1981)

13.47. În interiorul unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM, DAN. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor $|KL|$, $|LM|$, $|MN|$, $|NK|$ și mijloacele segmentelor $|AK|$, $|BK|$, $|BL|$, $|CL|$, $|CM|$, $|DM|$, $|DN|$, $|AN|$, sînt vîrfurile unui dodecagon regulat.

(A 19-a O.I.M., 1977)

13.48. Fie un triunghi ABC, B' și C' mijloacele laturilor $|AC|$ și $|AB|$, H piciorul înălțimii duse din A. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor $AB'C'$, $BC'H$, $B'CH$ au un punct comun I avînd proprietatea că HI taie $|B'C'|$ în mijlocul său.

(Prezentată de Franța la a 12-a O.I.M., 1970)

13.49. Fie O_a, O_b, O_c centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC, tangente laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ în punctele T_a, T_b, T_c. Să se arate că dreptele O_aT_a, O_bT_b, O_cT_c trec printr-un punct comun P care are proprietatea $\|PO_a\| = \|PO_b\| = \|PO_c\| = 2R$, R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC, care are centrul în O. Să se arate, apoi, că O este mijlocul segmentului $|PI|$, I fiind centrul cercului înscris triunghiului ABC.

(Prezentată la a 16-a O.I.M., 1974)

Scanned with OKEN Scanner

13.50. Se consideră în spațiu trei sfere exterioare două cîte două. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor care intersectează cele trei sfere după cîte un cerc mare.

(Stere Ianuș, baraj, 1981)

13.51. Se dă un triunghi OAB al cărui unghi AOB are măsura strict mai mică decît $90°$. Dintr-un punct oarecare M, diferit de O, din planul triunghiului OAB se duc perpendicularele MP pe OA și MQ pe OB. Se notează cu H ortocentrul triunghiului OPQ. Care este locul geometric al punctului H dacă M parcurge a) latura AB; b) interiorul triunghiului OAB?

(O.I.M., Berlin, 1965)

13.52. Arătați că există două drepte perpendiculare care împart un triunghi în patru părți echivalente.

13.53. Se dau cinci segmente cu proprietatea că oricare trei pot fi laturile unui triunghi. Arătați că există trei segmente dintre cele cinci cu care se poate forma un triunghi ascuțitunghic.

(Test, 1977)

13.54. Se consideră numerele pozitive $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Să se demonstreze că există un hexagon convex cu toate unghiurile congruente, avînd lungimile laturilor $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (în această ordine) dacă și numai dacă $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$.

(Baraj, 1981)

13.55. Pe un semicerc de rază 1 se consideră coardele $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DE|$ de lungimi a, b, c, d astfel încît arcele corespunzătoare (oricare două) să nu aibe puncte interioare comune. Să se demonstreze că

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4$$

(Propusă de Olanda la O.I.M. din 1981)

13.56. Se consideră un hexagon regulat de latură 1 și trei puncte A, B, C situate în interiorul său sau pe laturile sale. Să se arate că $\min(\|AB\|, \|BC\|, \|CA\|) \leqslant \sqrt{3}$ și să se găsească triunghiurile pentru care această inegalitate devine egalitate.

(Baraj, 1983, propusă de I. Tomescu)

Scanned with OKEN Scanner

13.57. a) Fie ABC un triunghi. Construim unghiurile XAB și YAB de măsură $\frac{\pi}{6}$, semidreptele $|AX$, $|BY$ fiind în semiplanul determinat de AB ce nu conține triunghiul. Fie C' punctul lor de intersecție. Se construiesc analog punctele A' și B'. Să se demonstreze că cercurile de centre A', B', C' și de raze $\|A'B\|$, $\|B'C\|$, $\|C'A\|$ sînt concurente într-un punct Q. b) Trei puncte A, B, C parcurg independent un cerc de centru dat O și rază r. Care este locul geometric al punctului Q definit la a) pentru triunghiul ABC?

(Baraj, 1983)

13.58. Vîrfurile unui poligon cu $n+1$ laturi sînt alese pe perimetrul unui poligon regulat cu n laturi dat în așa fel încît ele împart perimetrul în părți egale. Cum trebuie făcută alegerea pentru ca aria poligonului cu $n+1$ laturi să fie: a) maximă; b) minimă?

(Propusă de Olanda la a XI-a O.I.M.)

13.59. Fie $ABCDEF$ un hexagon înscris într-un cerc de rază r. Arătați că dacă $\|AB\| = \|CD\| = \|EF\| = r$, atunci mijloacele laturilor $|BC|$, $|DE|$, $|FA|$ sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

(Concurs de matematică, S.U.A.)

13.60. Fie cubul $ABCD\ A_1B_1C_1D_1$. a) Să se arate că vîrfurile cubului se pot împărți în două mulțimi conținînd fiecare patru puncte, astfel încît, orice două puncte din aceeași mulțime să nu fie extremitățile unei muchii a cubului. b) Să se arate că punctele din fiecare mulțime sînt vîrfurile unui tetraedru regulat. c) Să se arate că centrele de greutate ale celor două tetraedre coincid cu centrul cubului. d) Să se arate că fiecare din cele două tetraedre are volumul egal cu 1/2 din volumul cubului și aria totală egală cu $1/\sqrt{3}$ din aria totală a cubului.

(Admitere, facultăți de matematică, 1976)

13.61. Fie dat un cub $ABCD\ A'B'C'D'$ de latură de lungime a. Notăm cu M mijlocul lui $|AB|$ și cu N mijlocul lui $|AD|$. a) Să se demonstreze că dreapta MN este perpendi-

Scanned with OKEN Scanner

cular pe dreapta $A'C$. b) Să se determine prin trei puncte planul (π) ce conține dreapta MN și este perpendiculara pe $A'C$. c) Să se determine secțiunea cubului cu planul (π) și să se calculeze aria acestei secțiuni. d) Să se calculeze distanțele de la vîrfurile cubului la planul (π).

(Admitere, Facultatea de Șt. naturii, Timișoara)

13.62. Două pătrate $ABCD$ și $ABEF$ au o latură comună, iar planele lor sînt perpendiculare. Se iau pe diagonalele $|AC|$ și $|BF|$ punctele M și N astfel încît $\|AM\| = \|BN\|$. a) Să se arate că MN este paralelă cu planul $CDEF$. b) Care este locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$? c) Să se arate că în poziția în care lungimea segmentului $|MN|$ este cea mai mică, segmentul $|MN|$ este perpendicular pe BF și AC și este paralel cu DE.

(Etapa finală, Olimpiadă, 1955)

13.63. Înălțimea unui cilindru circular drept este h și raza cercului de bază este r, $h < 2r$. În acest cilindru este înscris un pătrat, oblic față de axă, astfel încît toate vîrfurile lui se află pe cercurile bazelor. Să se afle latura pătratului.

(Admitere Inst. Politehnic, Iași, 1972)

13.64. Într-un tetraedru oarecare $SABC$ se cunosc lungimile a, b, c ale laturilor bazei ABC și unghiurile α, β, γ formate de fețele laterale $[SBC]$, $[SCA]$, $[SAB]$ cu planul bazei. a) Să se determine înălțimea din S a tetraedrului. b) Să se calculeze volumul tetraedrului. c) În ce condiții proiecția ortogonală a punctului S pe planul bazei coincide cu ortocentrul triunghiului ABC.

(Admitere, Facultatea de electrotehnică, Craiova, 1975)

13.65. Într-o piramidă $SABC$ se cunosc $\|SA\| = \|SB\| = \|SC\| = a$, măsurile unghiurilor $\widehat{ASB}$, $\widehat{ASC}$ și $\widehat{CSB}$ de 60°, 90° și, respectiv, 120°. Să se calculeze: a) celelalte muchii ale piramidei; b) aria totală a piramidei; c) lungimea înălțimii din S a piramidei.

(Admitere, Facultatea de matematică, Craiova, 1973)

Scanned with OKEN Scanner

13.66. Un tetraedru regulat $ABCD$ este intersectat de șase plane, fiecare conținînd exact o muchie și mijlocul muchiei opuse. a) Cîte corpuri interior disjuncte se formează? b) Să se calculeze volumele acestor corpuri în funcție de lungimea muchiei tetraedrului.

(Olimpiada de matematică, R.D. Germană, 1974)

13.67. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$. a) Să se determine locul geometric al mijloacelor segmentelor $|XY|$ unde X este un punct arbitrar al segmentului $|AC|$ și Y un punct arbitrar al segmentului $|B'D'|$. b) Să se găsească locul geometric al punctelor Z de pe segmentul XY care satisfac relația $\|ZY\| = 2 \cdot \|XZ\|$.

(A II-a O.I.M.)

13.68. Trei sfere sînt tangente la planul unui triunghi avînd laturile de lungimi a, b, c în vîrfurile triunghiului și sînt tangente exterior două cîte două. Determinați razele sferelor.

(Olimpiada matematică, cls. a X-a, Kiev, 1956)

13.69. Într-un tetraedru regulat cu latura de lungime a se înscriu 4 sfere de aceeași rază, fiecare tangentă celorlalte trei și tangentă la trei din fețele tetraedrului. Să se calculeze raza acestor sfere.

(Concurs de matematică, R.D.G., 1971)

13.70. Într-un tetraedru muchiile opuse sînt perpendiculare două cîte două. Să se arate că mijloacele celor șase muchii se află pe aceeași sferă.

(Admitere, facultățile de matematică, 1982)

13.71. Fie pătratul $ABCD$ cu lungimea laturii a și M un punct în interiorul pătratului. a) Să se exprime suma volumelor corpurilor generate de triunghiurile MBA, MBC, MCD, MDA care se rotesc în jurul dreptelor AB, BC, CD, DA în funcție de a și distanțele lui M la laturile pătratului. b) Să se arate că suma volumelor calculată la a) depinde numai de a și $d = \|OM\|$, O fiind centrul pătratului.

(Admitere, facultățile de matematică, 1982)

Scanned with OKEN Scanner

13.72. Fie $|Ox$, $|Oy$, $|Oz$ trei semidrepte necoplanare și $A \in |Ox$, $B \in |Oy$, $C \in |Oz$. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente: a) Ortocentrul triunghiului ABC este piciorul perpendicularei din O pe planul triunghiului ABC pentru orice poziție a punctelor A, B, C. b) Triunghiul ABC este ascuțitunghic pentru orice poziție a punctelor A, B, C.

(Concurs de matematică, 1983, I.V. Maftei, M. Bălună)

13.73. Un con circular drept, cu generatoarea de lungime a, are trei generatoare perpendiculare două cîte două. a) Să se afle volumul conului. b) Să se afle aria sferei înscrise în con. c) Să se afle raportul ariilor calotelor determinate de cercul de tangență al sferei cu conul.

(Admitere, Inst. Politehnic, Cluj-Napoca, 1973)

13.74. În interiorul unui con circular drept se consideră două sfere determinate prin condițiile: sferele au centrele pe axa conului și sînt tangente exterior între ele, ambele sfere sînt tangente generatoarelor conului, iar cea mai mare dintre ele este tangentă planului bazei conului. Să se determine în funcție de razele R și r ale celor două sfere: a) semisuma razelor cercurilor de tangență ale sferelor cu generatoarele conului, b) volumul conului.

(Admitere, Facultatea de matematică, Iași, 1970)

13.75. Fie $ABCD$ o piramidă triunghiulară și D_1 un punct interior triunghiului ABC. Paralelele prin A, B, C la dreapta DD_1 intersectează fețele opuse în punctele A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că volumul piramidei $A_1B_1C_1D_1$ este triplul volumului piramidei $ABCD$.

(A VI-a O.I.M., 1964)

13.76. În tetraedrul $ABCD$ muchiile $|BD|$ și $|DC|$ sînt perpendiculare, iar piciorul înălțimii din D pe planul ABC coincide cu ortocentrul triunghiului ABC. Arătați că

$$(\|AB\| + \|BC\| + \|CA\|)^2 \leqslant 6(\|DA\|^2 + \|DB\|^2 + \|DC\|^2$$

(A. XII-a O.I.M., 1970)

13.77. Sfera înscrisă într-un tetraedru atinge fiecare din cele patru fețe ale tetraedrului în centrele lor de greutate. Să se demonstreze că tetraedrul este regulat.

(Olimpiada de matematică, S.U.A., 1980)

Scanned with OKEN Scanner

13.78. Să se demonstreze afirmația: cele patru înălțimi ale unui tetraedru $ABCD$ sînt concurente dacă și numai dacă

$$\|AB\|^2+\|DC\|^2=\|BC\|^2+\|AD\|^2=\|CA\|^2+\|BD\|^2.$$

(Propusă de R.D.G. la a XIV-a O.I.M., 1972)

13.79. Fie $ABCD$ un tetraedru. Muchia $|AB|$ are lungimea a, muchia $|CD|$ are lungimea b. Distanța dintre dreptele AB și CD este d, măsura unui unghi dintre aceste drepte este ω. Tetraedrul este împărțit în două părți printr-un plan (π) paralel cu muchiile $|AB|$ și $|CD|$. Să se determine raportul volumelor acestor două părți, fiind cunoscut raportul k al distanțelor dreptelor AB și CD la planul (π).

(A VII-a O.I.M., 1964)

Scanned with OKEN Scanner

Test 1

T1.1. Fie D un punct fix pe latura $|BC|$ a triunghiului ABC și M un punct variabil pe dreapta AD. Dreptele CM și AB se intersectează în B_1, iar BM și AC se intersectează în C_1. Arătați că dreapta B_1C_1 trece printr-un punct fix.

T1.2. Fie $|AB|$ un diametru al unui cerc, P un punct pe $|AB|$, iar M un punct pe cerc. Perpendiculara în M pe PM intersectează tangentele în A și B la cercul dat în punctele C și, respectiv, D. Arătați că triunghiul CPD este dreptunghic și precizați locul geometric al mijlocului segmentului CD cînd M descrie cercul de diametru $|AB|$.

T1.3. a) Fie $[SA_1A_2...A_n]$ o piramidă cu vîrful S și baza poligonul convex $[A_1A_2...A_n]$. Arătați că o condiție necesară și suficientă ca poligonul de bază să fie inscriptibil este ca muchiile $|SA_i|$, $i = 1, 2, ..., n$ să aibe aceeași lungime. În acest caz piramida admite o sferă circumscrisă. b) Pentru $n = 4$, $\|SA_i\| = \|A_iA_{i+1}\| = a$ arătați că suma distanțelor unui punct interior pătratului de bază la fețele piramidei este independentă de punct. Evaluați această sumă.

T1.4. Demonstrați că în orice triunghi are loc egalitatea

$$ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

și apoi deduceți relația: $\sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B = 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$.

T1.5. Determinați toate soluțiile ecuației

$$2\sin^2 x - 2\sin 2x + (2\sqrt{3} - 3)\cos 2x = 3 - 2\sqrt{3}$$

și apoi precizați toate soluțiile din intervalul $[-\pi, \pi]$.

Scanned with OKEN Scanner

Test 2

T2.1. Fie ABC un triunghi oarecare. Paralelele prin vîrfurile A, B, C la o direcţie oarecare, fixată, retaie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A', B', C'. Dreptele AB şi $A'B'$ se intersectează în C_1, dreptele BC şi $B'C'$ se intersectează în A_1, iar dreptele CA şi $C'A'$ se intersectează în B_1. Fie încă C_2 intersecţia dreptelor AB' şi BA', A_2 intersecţia dreptelor BC' şi CB' şi B_2 intersecţia dreptelor AC' şi CA'. Arătaţi că punctele A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sînt coliniare.

T2.2. Triunghiul ABC dreptunghic în A este înscris într-un cerc. Fie D diametralul opus lui A în acest cerc. Dreptele BD şi DC intersectează tangenta în A la cerc în punctele E, respectiv, F. Punctele C şi B fiind fixe, determinaţi poziţia punctului A pe cerc astfel încît segmentul $|FE|$ să aibe lungime minimă şi precizaţi acest minim.

T2.3. Se consideră un ansamblu format dintr-un cilindru circular drept avînd raza cercului de bază r, generatoare h şi o sferă de rază R, tangentă cilindrului în centrul unei baze şi exterioară acestuia. Determinaţi raza minimă a unei sfere ce poate conţine acest ansamblu.

T2.4. Arătaţi că

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \dfrac{-3\pi}{4} & \text{pentru } x < -1 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{pentru } x > -1 \end{cases}$$

T2.5. Determinaţi (fără utilizarea derivatelor) mulţimea valorilor funcţiei $f(x) = \sin 2x + \arcsin\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

Test 3

T3.1. Se consideră trei cercuri de aceeaşi rază tangente două cîte două, exterioare unul altuia. Arătaţi că există două cercuri, fiecare tangent celor trei cercuri şi calculaţi raportul razelor acestor cercuri.

Scanned with OKEN Scanner

T3.2. Fie ABC un triunghi echilateral, P un punct în interiorul triunghiului, A', B', C' proiecțiile ortogonale ale lui P pe laturile $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, iar A_1, B_1, C_1 simetricele lui P față de A', B', respectiv C' a) Arătați că suma $\|BA'\|+\|CB'\|+\|AC'\|$ nu depinde de poziția punctului P. b) Arătați că suma $\|PA_1\|+\|PB_1\|+\|PC_1\|$ nu depinde de poziția punctului P.

T3.3. Se consideră o sferă de centru O și rază r și P un punct exterior sferei astfel că $\|OP\|=d$. Arătați că un plan care trece prin P intersectează sfera dată după un cerc și apoi arătați că locul geometric al centrului acestui cerc, cînd planul prin P este variabil, este o calotă sferică și determinați aria acestei calote.

T3.4. Fie un cub $ABCDA'B'C'D'$ (una din fețe este pătratul $ABCD$ cu vîrfurile în ordinea lexicografică și $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ muchii). Arătați că orice plan care trece prin diagonala $|BD'|$ a cubului desface cubul în două poliedre interior disjuncte de volume egale. Determinați poziția planului astfel încît poligonul de secțiune să aibă perimetrul minim.

T3.5. Se consideră funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f(x)=2\sin x+\frac{1}{3\sin x}$. Determinați cea mai mică valoare a funcției, fără utilizarea derivatelor.

Test 4

T4.1. Pe laturile unui paralelogram se construiesc pătrate, avînd latura respectivă a paralelogramului ca latură, în exteriorul acestuia. Demonstrați că centrele celor patru pătrate sînt vîrfurile unui pătrat.

T4.2. Se consideră un cerc de centru O și P un punct în interiorul cercului, diferit de O. Două drepte perpendiculare între ele și care trece prin P intersectează cercul în punctele A și B, respectiv C și D. Arătați că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|CD|$ rămîne tangentă unui cerc fix; precizați acest cerc.

Scanned with OKEN Scanner

T4.3. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat avînd muchiile de lungime m și fie P un punct arbitrar pe muchia $|AB|$. Determinați drumurile de lungime minimă pe suprafața tetraedrului care pornesc din P și se întorc în P și care au puncte pe fiecare față a tetraedrului, Determinați lungimea acestor drumuri și demonstrați că punctele fiecăruia dintre acestea se află într-un plan.

T4.4. Triunghiul ABC se rotește în iurul laturii $|BC|$ (astfel încît A descrie un cerc complet), generînd astfel un corp de volum V_a. Analog se definesc V_b și V_c. Arătați că are loc relația $V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$ dacă și numai dacă înălțimile trunghiului ABC pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

T4.5. Determinați mulțimea

$$\left\{(x, y),\ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}:\ \sin x+\sin y-\cos(x+y)+\frac{3}{2}=0\right\}.$$

Test 5

T5.1. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, cu $|AB|$ și $|CD|$ paralele. a) Arătați că trapezul este inscriptibil. b) Fie P un punct în planul trapezului și A', B', C', D', punctele în care dreptele AP, BP, CP, DP retaie cercul circumscris trapezului. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor $PA'B'$ și $PC'D'$ sînt tangente.

T5.2. Un poligon cu n laturi de lungimi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ este circumscris unui cerc de rază r. Fie M un punct în interiorul poligonului și d_1, d_2, ..., d_n distanțele acestui punct la laturile de lungime a_1, a_2, ..., respectiv, a_n. Demonstrați că are loc inegalitatea $d_1 + d_2 + \ldots + d_n \leqslant nr$. Precizați cazurile de realizare a egalității.

(Nicolae Gross)

T5.3. Un tetraedru $OABC$ are muchiile din O perpendiculare oricare două. Arătați că perpendiculara din O pe planul (ABC) trece prin ortocentrul triunghiului ABC, fie acesta H. Evaluați $\|OH\|$ în funcție de lungimile a, b, c ale muchiilor $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$.

T5.4. Să se demonstreze că dacă într-un triunghi medianele sînt proporționale cu laturile corespunzătoare, atunci triunghiul este echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

T5.5. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe de modul 1. Arătați că numărul $\dfrac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1 z_2 \ldots z_n}$ este real.

Test 6

T6.1. Fie $ABCD$ un patrulater convex avînd diagonalele $|AC|$ și $|BD|$ perpendiculare și concurente în O. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$. Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor OMN și OPQ se retaie într-un punct situat pe AC, iar cercurile circumscrise triunghiurilor ONP și OMQ se retaie pe BD.

(Cezar Coșniță)

T6.2. Fie $ABC\,A'B'C'$ un trunchi de piramidă triunghiulară avînd bazele ABC și $A'B'C'$ și în care $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ sînt muchii. Diagonalele feței $BCC'B'$ se intersectează în punctul A_1 și fie B_1 și C_1 analoagele lui A_1. Arătați că dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sînt concurente. Dacă P este punctul de intersecție de mai sus, arătați că are loc relația

$$\sqrt[3]{\frac{v\sigma_1[PA_1B_1C_1]}{\mathrm{vol}[PABC]}} = \frac{\sqrt{\sigma'}}{\sqrt{\sigma'}+\sqrt{\sigma}},$$

unde $\sigma' = \text{aria}\,[A'B'C']$, $\sigma = \text{aria}\,[ABC]$

T6.3. Trei sfere de centre O_a, O_b, O_c sînt tangente unui plan în punctele A, B, respectiv C și tangente exterior două cîte două. Fie r_a, r_b, r_c razele acestor sfere. Evaluați aria totală și volumul poliedrului $ABCO_aO_bO_c$. Dreptele BC, O_bO_c se intersectează în punctul A_1 și fie B_1, C_1 analoagele lui A_1 (se presupune că razele sferelor sînt diferite oricare două). Arătați că punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

T6.4. Determinați toate perechile (x, y) de numere reale pentru care are loc egalitatea

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) - \frac{3}{2} = 0.$$

T6.5. Demonstrați că triunghiul ABC în care are loc relația $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ este dreptunghic.

Scanned with OKEN Scanner

Test 7

T7.1. Fie $ABCD$ un trapez (convex) în care $|BC|$ și $|AD|$ sînt laturile paralele. Fie M un punct variabil pe diagonala $|AC|$. Paralela prin M la AB intersectează pe BC în N, iar paralela prin M la CD intersectează pe AD în P. Arătați că dreapta NP trece printr-un punct fix.

(Enunț adaptat după Nicolae Botea)

T7.2. Fie $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ înălțimile triunghiului ABC și H ortocentrul acestuia. Cercurile de diametre $|HA'|$ și $|HB'|$ se intersectează pentru a doua oară în C_1, cercurile de diametre $|HB'|$ și $|HC'|$ se reintersectează în A_1, iar cercurile de diametre $|HC'|$ și $|HA'|$ se retaie în B_1. Arătați că dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sînt concurente.

T7.3. Trei sfere trec prin punctele A și B. Fie A_1, A_2, A_3 punctele diametral opuse lui A în cele trei sfere avînd centrele O_1, O_2, O_3, și B_1, B_2, B_3 diametral opusele lui B în acestea. Arătați că punctele A, B_1, B_2, B_3 sînt într-un plan, punctele B, A_1, A_2, A_3 sînt într-un alt plan, acestea fiind paralele și astfel că triunghiurile $A_1A_2A_3$ și B_1, B_2, B_3 sînt congruente.

(C. Coșniță)

T7.4. Într-o sferă de rază R se înscrie un con circular drept astfel că unghiul maxim a două generatoare ale conului este $2x$. Evaluați volumul cuprins între suprafața sferei și suprafața laterală a conului.

(C. Coșniță)

T7.5. Arătați că dacă $x \in (-\infty, -1]$ atunci

$$2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -\pi.$$

Test 8

T8.1. Fie AOB un triunghi dreptunghic în O. Punctele P și Q sînt variabile pe dreapta OB, P între O și Q astfel încît unghiurile OAP și OQA sînt congruente. a) Arătați că au loc relațiile:

$$\|OP\| \cdot \|OQ\| = \|OA\|^2, \quad \frac{1}{\|AP\|^2} + \frac{1}{\|AQ\|^2} = \frac{1}{\|OA\|^2}$$

b) Determinați locul geometric al intersecției perpendicularei din B pe AQ cu perpendiculara din Q pe AB.

Scanned with OKEN Scanner

T8.2. Fie $ABCD$ și $AB'C'D'$ două pătrate avînd laturi de aceeași lungime (și vîrful comun A). a) Arătați că dreptele BB', CC' și DD' sînt concurente, fie M punctul de intersecție. b) Determinați locul geometric al punctului M dacă pătratul $ABCD$ rămîne fix iar $AB'C'D'$ este variabil.

T8.3. Fie $OABC$ un tetraedru în care muchiile $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$ sînt congruente, A', B', C' puncte situate în planul (ABC). Dreptele OA', OB', OC' intersectează sfera circumscrisă tetraedrului $OABC$ în punctele A_1, B_1, C_1. Arătați că punctele A', B', C', A_1, B_1, C_1 sînt situate pe o aceeași sferă.

T8.4. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată avînd latura pătratului de bază $ABCD$ de lungime a și înălțimea $|SO|$ de lungime h. Se secționează piramida prin planul determinat de mijloacele muchiilor $|AB|$, $|AD|$ și $|SC|$. Precizați secțiunea realizată de acest plan în piramidă și evaluați aria secțiunii; apoi arătați că planul respectiv desface piramida în două poliedre de volume egale.

T8.5. Arătați că între unghiurile unui triunghi oarecare are loc: $\operatorname{ctg}\frac{A}{4}+\operatorname{ctg}\frac{B}{4}+\operatorname{ctg}\frac{C}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}-\operatorname{tg}\frac{B}{4}-\operatorname{tg}\frac{C}{4}=$
$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

Test 9

T9.1. Fie A un punct fixat pe un cerc dat, iar B un punct variabil pe același cerc. Fie P un punct fixat în plan, A' proiecția lui A pe dreapta PB și B' proiecția lui B pe PA. Determinați locul geometric al intersecției paralelei prin P la $B'A'$ cu AB.

T9.2. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C în această ordonare. Se notează prin M mijlocul segmentului $|BC|$. Cercurile de diametre $|AM|$ și $|BC|$ au punctul comun D care se proiectează pe dreapta dată în E. O dreaptă care trece prin A intersectează două paralele prin B și C în punctele P și, respectiv Q. Dacă R este simetricul lui Q față de C, arătați că punctele P, E, R sînt coliniare.

(Gh. Neagu)

Scanned with OKEN Scanner

T.9.3. Fie o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu latura bazei de aceeaşi lungime cu muchiile laterale. Fie M şi N mijloacele laturilor $|AD|$ şi $|CD|$. Planul care conţine dreapta MN şi este paralel cu muchia $|VD|$ determină în piramidă o secţiune poligonală. a) Determinaţi forma poligonului de secţiune şi evaluaţi aria acestuia. b) Determinaţi unghiul plan corespunzător diedrului format de planul secţiunii şi planul bazei. c) Aflaţi distanţa vîrfului B la planul de secţiune.

T9.4. Se dă un paralelipiped dreptunghic $[ABCDA'B'C'D']$ şi printr-un punct situat pe muchia $|DD'|$ la distanţa d de planul bazei $ABCD$ se duce un plan care secţionează toate muchiile laterale ale paralelipipedului.) a) Pentru ce poziţie a planului de secţiune, poliedrul format de planul de secţiune, planul bazei $ABCD$ şi feţele laterale ale paralelipipedului are volum maxim? b) În ce caz aria secţiunii este maximă?

(Florin Cîrjan)

T9.5. Arătaţi că între elementele unui triunghi ABC are loc relaţia

$$\sin A \sin\frac{A}{2}\sin\frac{1}{2}(B-C)+\sin B\sin\frac{B}{2}\sin\frac{1}{2}(C-A)+$$

$$+\sin C\sin\frac{C}{2}\sin\frac{1}{2}(A-B)=0.$$

Test 10

T10.1. Un triunghi dreptunghic ABC are ipotenuza $|BC|$ fixă. Fie D simetricul punctului B faţă de A, iar O mijlocul lui $|BC|$. Determinaţi locul geometric al punctului de intersecţie al dreptelor DO şi AC cînd A este variabil.

T10.2. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se demonstreze că o condiţie necesară şi suficientă ca patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram este ca oricare ar fi punctele M, N, P, Q situate respectiv pe segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ astfel ca $\frac{\|MA\|}{\|MB\|}=\frac{\|NB\|}{\|NC\|}=\frac{\|PC\|}{\|PD\|}=\frac{\|QD\|}{\|QA\|}$ dreptele AC, BD, MP şi NQ să fie cuncurente.

(Marcel Chiriţă)

Scanned with OKEN Scanner

T10.3. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile a, b, c. Sistemul

$$\begin{cases} a^2x - ay + z = a^3 \\ b^2x - by + z = b^3 \\ c^2x - cy + z = c^3 \end{cases}$$

unde presupunem a, b, c diferite oricare două are soluția unică (x, y, z). a) Arătați că $2y$ reprezintă aria totală a paralelipipedului, iar z reprezintă volumul acestuia. b) Prin diagonala $|BD|$ a bazei $ABCD$ (care are dimensiunile a și b) și printr-un punct I situat pe semidreapta $[CC'$ se consideră un plan care secționează paralelipipedul. Cunoscînd unghiul acestui plan cu planul $(ABCD)$ să se determine aria secțiunii. *Discuție.* c) Să se determine aria și volumul sferei circumscrise paralelipipedului.

(Bacalaureat, iunie, 1978)

T10.4. a) Să se arate că un hexaedru avînd fețele patrulatere este inscriptibil într-o sferă dacă și numai dacă toate fețele sale sînt patrulatere inscriptibile. b) Arătați că dacă patru din fețele hexaedrului sînt inscriptibile, atunci toate fețele sale sînt inscriptibile.

T10.5. Dacă a, b, c sînt lunginile laturilor unui triunghi, atunci au loc inegalitățile:

$$9abc + (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca) \geqslant 0,$$

$$9a^2b^2c^2 + (a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2) \geqslant 0,$$

egalitățile caracterizînd triunghiul echilateral.

(V. Cristescu)

Partea a II-a

SOLUȚII

Capitolul 1

1.1. B_1, C_1 fiind proiecțiile lui A pe bisectoarele interioare și B_2, C_2 proiecțiile pe bisectoarele exterioare, se constată că B_1B_2 trece prin mijlocul segmentului $|AB|$ și este paralelă cu BC, C_1C_2 trece prin mijlocul lui $|AC|$ și este paralelă cu BC. Așadar, cele patru puncte se află pe dreapta care unește mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|AC|$. **1.2.** Să admitem, la început, că punctele C și D se află în același semiplan față de AB. Fie O mijlocul lui $|AB|$ și P mijlocul lui $|CD|$. Atunci OP este perpendiculară pe AB și $\|OP\| = a/2$, deci punctul P este fix. Dacă C și D sînt de o parte și alta a dreptei AB atunci punctele C, M, D sînt coliniare și dreapta CD face cu AB un unghi de 45°. **1.3.** a) Fie G proiecția lui F pe AA_1. Rezultă că $\|AG\| = \|EM\|$, deci $\|EM\| + \|FN\| = \|AA_1\|$. Astfel, distanța de la mijlocul segmentului $|EF|$ la BC este $\frac{h}{2}$, locul acestuia este segmentul care unește mijloacele laturilor $|AB|$ și $|AC|$; b) Deoarece $\|MN\| = a$, avem: aria $[EFNM] = 1/2$ aria $[ABC]$; c) Notînd $l = \sqrt{a^2 + h^2}$ și S aria triunghiului dat, avem: aria $AEF = \frac{(l-x)x}{l} \cdot S$, maximul realizîndu-se pentru $x = l/2$, deci cînd $|EF|$ este linie mijlocie. **1.4.** Fie I_a, I_b, I_c, I_d centrele cercurilor înscrise în triunghiurile BCD, CDA, DAB, ABC și M, N, P, Q mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{AC}$. Rezultă $\mathrm{m}(\overset{\frown}{PCN}) = \frac{\mathrm{m}(\overset{\frown}{AB})}{4} = \mathrm{m}(\overset{\frown}{MQD})$, prin urmare patrulaterul CI_aI_bD este inscriptibil. Analog, patrulaterele DI_bI_cA, AI_cI_dB, BI_dI_aC sînt inscriptibile, de unde rezultă $\mathrm{m}\,\overset{\frown}{I_aI_bI_c} = 360° - (\mathrm{m}\,(\overset{\frown}{I_cI_bD}) + \mathrm{m}\,(\overset{\frown}{I_aI_bD})) = 90°$. Din simetrie, deducem că patrulaterul $I_aI_bI_cI_d$ are toate unghiurile

Scanned with OKEN Scanner

drepte. **1.5.** Patrulaterul BC_1B_1C fiind inscriptibil, rezultă că $\text{m}(\widehat{AC_1B_1}) = \text{m}(\widehat{ACB}) = \frac{1}{2}\text{m}(\widehat{AB}) = \text{m}(\widehat{C_2AB})$, C_2 fiind intersecţia tangentelor în A şi B la cercul circumscris. Perpendicularele din enunţ trec prin centrul cercului circumscris. **1.6.** Dreapta OM intersectează pe DC într-un punct N astfel că: $\|AM\| / \|MB\| = \|NC\| / \|ND\|$ şi cum $\|AM\| = \|MB\|$ rezultă $\|NC\| = \|ND\|$. La fel se arată că P se află pe dreapta MN. Egalitatea $\|EO\| = \|OF\|$ se obţine din asemănări de triunghiuri, ţinînd seama că $\|OD\| / \|BD\| = \|CO\| / \|CA\|$; evaluînd pe $\|EO\|$ din triunghiurile asemenea EDO şi ADB se obţine şi cealaltă egalitate. Ultima afirmaţie rezultă observînd că triunghiurile ABD şi ABC au aceeaşi arie. **1.7.** a) Fiecare din cele trei triunghiuri este asemenea cu triunghiul ABC, avînd cîte două perechi de unghiuri congruente; b) De exemplu, unghiurile $\widehat{AB'C'}$, $\widehat{CB'A'}$ sînt congruente cu unghiul din B al triunghiului dat; c) Punctele A' şi P sînt simetrice faţă de diametrul $|AB|$ (deoarece unghiurile $\widehat{PC'B}$ şi $\widehat{A'C'B}$ sînt congruente), deci $\|PC'\| = \|A'C'\|$; d) segmentul $|EF|$ este linie mijlocie în triunghiul $PA'Q$. **1.8.** (Soluţie elementară). Fie A intersecţia cercurilor de centre O_2 şi O_3 etc. Patrulaterele O_2AO_3H, O_3BO_1H, O_1CO_3H sînt romburi. Deoarece AH este perpendiculară pe O_2O_3 rezultă AH perpendiculară pe BC, deci H este ortocentrul triunghiului ABC şi cum simetricul ortocentrului faţă de o latură se află pe cercul circumscris, afirmaţia se impune. **1.9.** Presupunînd că punctul M se află pe arcul $\widehat{BC}$, folosind patrulaterele inscriptibile MA_1BC_1, MA_1B_1C şi $MBCA$, MC_1AB_1 se deduce că $\widehat{BA_1C_1} \equiv \widehat{B_1A_1C}$ ceea ce arată că punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

1.10. Conform problemei precedente, punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare. Rezultă: $\text{aria}[MC_1A_1] + \text{aria}[MA_1B_1] = \text{aria}[MB_1C_1]$, deci $\|MA_1\| \cdot \|MC_1\| \cdot \sin \hat{B} + \|MA_1\| \cdot \|MB_1\| \cdot \sin C = \|MB_1\| \cdot \|MC_1\| \cdot \sin A$ din care, prin împărţire cu $\|MA_1\| \cdot \|MB_1\| \cdot \|MC_1\|$ şi apoi prin amplificare cu $2R$, se obţine relaţia. **1.11.** Fie $I = MP \cap NQ$. Atunci $\text{m}(\widehat{MIN}) = \frac{\text{m}(\widehat{AB}) + \text{m}(\widehat{BC}) + \text{m}(\widehat{CD}) + \text{m}(\widehat{AD})}{4} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 90°$. Presupunînd că $MQ \parallel NP$ se deduce că $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$ deci $|AC|$ este diametru în cercul dat. **1.12.** Afirmația rezultă din enunțul următor: Fie un cerc de centru O, un diametru $|MN|$, A un punct pe cerc, E proiecția lui A pe diametrul $|MN|$, T proiecția lui N pe tangenta în A. Atunci $\|AT\| = \|AE\|$. În adevăr, triunghiurile AEN și ATN sînt congruente, deoarece sînt dreptunghice, AN este comună și $m(\widehat{EAN}) = m(\widehat{TAN})$. **1.13.** Deoarece suma măsurilor unghiurilor $\widehat{BP_1P_2}$ și $\widehat{BP_2P_1}$ este constantă, rezultă că măsura unghiului $\widehat{P_1BP_2}$ este constantă și deci măsura unghiului $\widehat{Q_1N_1A}$ este constantă, ceea ce arată că punctul Q_1 este fix. La fel se arată că Q_2 este fix. M_1 și M_2 fiind proiecțiile punctelor N_1 și N_2 pe P_1P_2, deoarece punctele A, Q_1, Q_2 sînt fixe, deducem că M_1 descrie cercul de diametru $|AQ_1|$, iar punctul M_2 descrie cercul de diametru $|AQ_2|$. Unghiurile $\widehat{Q_1N_1A}$ și $\widehat{Q_2N_2A}$ fiind congruente, rezultă că arcele $\overset{\frown}{AQ_1}$ și $\overset{\frown}{AQ_2}$ au aceeași măsură, ceea ce arată că triunghiurile isoscele Q_1O_1A și Q_2O_2A sînt asemenea. **1.14.** Soluția lui Traian Lalescu: Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$; mediatoarele segmentelor $|B'C'|$, $|B'A'|$, $|A'C'|$ trec, respectiv, prin punctele A_1, C_1, B_1. Să considerăm cercurile cu centrele A_1, B_1, C_1 care trec, respectiv, prin punctele B' și C', prin A' și C', prin A' și B', fie ele α, β, γ. Cercurile α și β au linia centrelor A_1B_1 perpendiculară pe perpendiculara din C' pe AB, deci această perpendiculară, trecînd prin punctul C' comun cercurilor α, β este axa lor radicală; la fel, axa radicală a cercurilor α și γ este perpendiculara din B' pe AC, iar axa radicală a cercurilor β și γ este perpendiculara din A' pe BC. Cum axele radicale a trei cercuri luate două cîte două sînt concurente. Concluzia se impune. **1.15.** a) Cercurile circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 și CA_1B_1 se retaie în M. Se arată ușor că patrulaterul BC_1MA_1 este înscriptibil. b) Se aplică proprietatea de la a) triunghiurilor ADE și ABF. **1.16.** Conform problemei precedente cele trei cercuri se taie într-un punct, fie el M. Afirmația rezultă din următoarea lemă: Fie S un punct pe segmentul $|AB|$ și două cercuri trecînd prin A și S, respectiv, S și B care se retaie în M. Două paralele prin A și B retaie cercurile în A_1

Scanned with OKEN Scanner

și B_1. Atunci punctele A_1, M, B_1 sînt coliniare (Justificare facilă). **1.17.** N este mijlocul arcului $\overset{\frown}{AB}$ care nu conține punctul M. Patrulaterul $OQBN$ este inscriptibil, deci punctul Q descrie cercul de diametru $|NB|$ (fix) și prin urmare centrul de greutate al triunghiului BQN descrie un cerc cu centrul în mijlocul segmentului $|NB|$ și de rază $\frac{\|NB\|}{6}$. **1.18.** Fie O_1 și O_2 mijloacele segmentelor $|AC|$ și $|CB|$. Atunci A_1O_1 și B_1O_2 sînt paralele și din triunghiurile isoscele AA_1O_1 și BB_1O_2 se deduce că AA_1 și BB_1 sînt perpendiculare, deci ele se intersectează pe semicercul de diametru $|AB|$. **1.19.** Fără a restrînge generalitatea, putem presupune ordinea (D, A, C). a), b). Folosind faptul că o semidreaptă $[TX$ este tangentă unui cerc în punctul T dacă și numai dacă măsura unghiului ei cu o coardă $[TA]$ este 1/2 din măsura arcului $\overset{\frown}{TA}$, deducem că unghiurile $\widehat{DBE}$ și $\widehat{DEB}$ sînt congruente, deci triunghiul BDE este isoscel, iar din congruența unghiurilor $\widehat{EDC}$ și $\widehat{EBC}$ deducem că DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ACE. c) Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC este paralelă cu DE, deci AO este perpendiculară pe DE. **1.20.** a) Cercul înscris este tangent bazelor în mijloacele acestora (!), deci laturile neparalele sînt de lungime $a+b$, înălțimea trapezului este $2\sqrt{ab}$, iar raza cercului înscris este $\sqrt{ab}$. b) Se utilizează asemănarea triunghiurilor AIM și ACB, respectiv CIN și CAD. Relația are loc în orice trapez. c) Triunghiul AIB este dreptunghic isoscel, deci înălțimea lui este de lungime a, înălțimea triunghiului CID are lungimea b, deci înălțimea trapezului are lungimea $a+b$. **1.21.** Locul geometric este o semidreaptă care trece prin O. **1.22.** Dacă dreptele d_1 și d_2 sînt paralele, există puncte care au suma distanțelor la cele două drepte o constantă dată k dacă și numai dacă $k \geqslant l$, l fiind distanța dintre cele două drepte. Dacă $k = l$, mulțimea punctelor cu proprietatea cerută este regiunea dintre cele două drepte, împreună cu dreptele. Pentru $k > l$, locul geometric este format din două paralele la d_1 și d_2, avînd distanțele la d_1 și d_2, $\frac{k-l}{2}$ și $\frac{k+l}{2}$, respectiv $\frac{k+l}{2}$ și $\frac{k-l}{2}$. Să presupunem că dreptele date se intersectează în O

și fie A, C pe d_1 care au distanțele la d_2 egale cu k, punctele B, D pe d_2 care au distanțele la d_1 egale cu k. Fie M un punct în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ cu proprietatea din enunț. Paralela prin M la OB taie pe OA în N. Triunghiul ANM trebuie să fie isoscel, $\| AN \| = \| NM \|$. Cum unghiurile triunghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{ANM}$ sînt congruente, deducem că $M \in | AB |$. Punctele de pe $| AB |$ au proprietatea cerută. În consecință locul geometric cerut este format din reuniunea laturilor dreptunghiului $ABCD$. **1.23.** Deoarece unghiul $\widehat{ABP}$ este drept, deducem că $| AP |$ este diametru în cerc, deci unghiul $\widehat{ACP}$ este drept. Astfel, în triunghiul AMN, $| MB |$ și $| NC |$ sînt înălțimi; rezultă că AP și MN sînt perpendiculare. Cînd A parcurge arcul mare $\overset{\frown}{BC}$, unghiul $\widehat{BMC}$ are măsura constantă, deci M descrie un arc de cerc care trece prin punctele C, B, iar cînd A descrie arcul mic $\overset{\frown}{BC}$, M descrie arcul ce completează pe cel anterior pînă la un cerc. **1.24.** Fie B_1 și C_1 mijloacele segmentelor $| AB |$ și $| AC |$ · $| B_1C_1 |$ este linie mijlocie în triunghiurile ABC și OMN, deci $BCMN$ este paralelogram. Deoarece $\| CM \| = \| BN \|$ = raza cercului, deducem că punctele M și N descriu cercuri congruente cu acesta de centre C și, respectiv, B, iar P descrie cercul cu centrul în mijlocul segmentului $| BC |$ și avînd raza $\frac{1}{2}$ din raza cercului dat. **1.25.** a) Patrulaterul $A_1A_2B_2C_2$ este trapez isoscel, prin urmare este inscriptibil. b) Fie A' intersecția înălțimii $| AA_1 |$ cu cercul circumscris. Triunghiurile dreptunghice HA_1C, $A'A_1C$ sînt congruente, ceea ce implică $\| HA_1 \| = \| A_1A' \|$. Prin urmare cercul lui Euler este omotetic cu cercul circumscris în omotetia de centru H și raport 1/2. În particular, el trece prin mijloacele segmentelor euleriene $| HA |$, $| HB |$, $| HC |$. c) O_9 se află pe mediatoarele segmentelor $| A_1A_2 |$, $| B_1B_2 |$, $| C_1C_2 |$ care se intersectează în mijlocul segmentului $| HO |$. Fie D intersecția semidreptei $| HA_2$ cu cercul circumscris; avem $\| HA_2 \| = \| A_2D \|$ și deci AA' și $A'D$ sînt perpendiculare ceea ce arată că $| AD |$ este diametru, deci trece prin O. În triunghiul AHD, $| AA_2 |$ și $| HO |$ sînt mediane. Fie G' intersecția lor; atunci $\| AG' \| = 2 \cdot \| G'A_2 \|$. Cum însă $| GA_2 |$ este mediană și în triunghiul ABC, rezultă G' coincide cu centrul de greutate al triunghiu-

Scanned with OKEN Scanner

lui ABC; în plus rezultă $\| OH \| = 3 \cdot \| OG \|$. Ținînd seama că O_9 este mijlocul segmentului $| HO |$, se obține egalitatea din enunț, care exprimă că diviziunea (H, O_9, G, O) este armonică. **1.26.** Locul geometric este un cerc care trece prin punctele B, C. **1.27.** Fie M' pe arcul $\overset{\frown}{AC}$ astfel încît arcele $\overset{\frown}{AM'}$ și $\overset{\frown}{CM}$ să fie congruente, iar $N = | BM' | \cap | AM |$. Rezultă că triunghiul BMN este echilateral, deci $\| MN \| = \| BM \| = \| BN \|$. Apoi, triunghiurile ABN și BCM sînt congruente, deci $\| AN \| = \| MC \|$ și concluzia se impune. **1.28.** Putem presupune că punctul M se află în exteriorul triunghiului și în interiorul unghiului ACB sau pe laturile acestuia. Să rotim triunghiul AMB în jurul punctului A cu un unghi de măsură 60°, astfel încît B să se suprapună cu C și fie M' transformatul lui M în această rotație. Triunghiul AMM' este echilateral, deci $\| MM' \| = \| AM \|$ triunghiurile AMB și $AM'C$ sînt congruente, deci $\| MB \| = \| M'C \|$, iar M' nu se află pe dreapta MC, deoarece $m(\widehat{AMC}) < 60°$. Deci triunghiul $MM'C$ are laturile de lungimi $\| AM \|$, $\| BM \|$, $\| CM \|$. **1.29.** Notînd $N = B_1A' \cap \cap C_1A_1$, rezultă că triunghiurile NA_1A și BAC sînt congruente. Dacă $D = NA \cap BC$, din congruențele $\widehat{NAA_1} \equiv \equiv \widehat{BAD}$, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ACB}$ rezultă că $| AD |$ este înălțimea din A a triunghiului ABC. Din congruența celor două triunghiuri rezultă că $\| NA \| = \| BC \|$ și cum AN are direcție fixă, deducem că dacă A descrie semicercul de diametru $| BC |$ atunci punctul N descrie un semicerc — translatatul celui descris de A pe direcția perpendiculară pe BC cu un vector de mărime $\| BC \|$ și situat în același semiplan față de BC. **1.30.** Din congruența unghiurilor $\widehat{AB_1C_1}$ și $\widehat{AB_2C_2}$ rezultă că arcele $\overset{\frown}{AC_1}$ și $\overset{\frown}{AC_2}$ ale celor două cercuri circumscrise au aceeași măsură, prin urmare cele două cercuri au aceeași tangentă în A, ceea ce impune concluzia. **1.31.** a) Folosind patrulaterele inscriptibile $BRMP$ și $CQMP$ se arată că patrulaterul $AMCB$ este inscriptibil; de aci se deduce că locul geometric al punctului M este cercul circumscris triunghiului ABC. b) Conform problemei precedente, cercurile sînt tangente în R, deci M coincide cu punctul R — locul geometric al punctului M este dreapta c. c) Dacă triunghiul ABC este echilateral, presupunînd că $M \in \overset{\frown}{BC}$, din relația lui

Scanned with OKEN Scanner

Ptolemeu deducem $\| MA \| \cdot \| BC \| = \| AB \| \cdot \| MC \| + \| AC \| \cdot \| MB \|$ deci $\| MA \| = \| MC \| + \| MB \|$. **1.32.** a) Triunghiurile ADE și AME sînt congruente; rezultă că triunghiul AMD este isoscel și deci P este mijocul lui $| MD |$. Analog, Q este miilocul lui $| DN |$. Astfel, $| PQ |$ este linie mijlocie în triunghiul MDN. b) Patrulaterul $APDQ$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{PQD})$ și cum $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{PEF}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{PEF}) + m(\widehat{PQF}) = m(\widehat{PEF}) + m(\widehat{PQD}) + m(\widehat{DQF}) = 180°$. c) Dacă S este un punct oarecare pe bisectoarea $| AE |$, atunci $\| SM \| + \| SB \| = \| SD \| + \| SB \| \geqslant \| BD \|$ egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă S coincide cu E, deci minimul sumei este $\| BD \| = c \cos B$. **1.33.** Se demonstrează cu ușurință că patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil; locul geometric este cercul circumscris triunghiului ABC. **1.34.** Cu notații curente, avem $\| CA_1 \| = \| CB_1 \| = p - c$. Paralela prin C taie dreptele C_1A_1 și C_1B_1 în punctele A_2 și B_2. Atunci $m(\widehat{B_1A_1C}) = m(\widehat{C_1A_1B}) = m(\widehat{CA_1A_2}) = m(\widehat{CA_2A_1}) = \pi/2 - \frac{m(\hat{B})}{2}$, triunghiul CA_1A_2 este isoscel, $\| CA_2 \| = p - c$. Analog $\| CB_2 \| = p - c$, deci $| CC_1 |$ este mediană în triunghiul $C_1A_2B_2$ și, prin urmare, trece prin mijloacele segmentelor $| B_1Q |$ și $| AT |$. Deoarece A_1TB_1Q este trapez, deducem că diagonalele A_1B_1 și TQ se intersectează într-un punct situat pe CC_1. **1.35.** a) Din construcție rezultă $\widehat{AB'C} \equiv \widehat{ABC}$ și $\widehat{AC'B} \equiv \widehat{ACB}$, deci centrul C_1 al cercului $(AB'C)$ este simetricul centrului O al cercului (ABC) față de latura $| AC |$, iar centrul C_2 al cercului $(AC'B)$ este simetricul centrului O față de latura $| AB |$. Măsura unghiului $\widehat{BA'C}$ rămîne constantă cînd dreapta $B'C'$ se rotește în jurul lui A, rămînînd exterioară unghiului $\widehat{BAC}$, deci A' descrie arcul capabil de unghiul A al triunghiului, care trece prin B, C în exteriorul triunghiului. Centrul cercului din care face parte acest arc este simetricul lui O față de $| BC |$. b) Notînd cu E cel de-al doilea punct de intersecție a cercurilor $(AB'C)$ și $(AC'B)$ se arată fără dificultate că patrulaterul $BA'CE$ este inscriptibil. c) Din constatarea că C_1 C_2, C_3 sînt simetricele

Scanned with OKEN Scanner

centrului O față de laturile triunghiului ABC rezultă că laturile triunghiului $C_1C_2C_3$ au lungimile lungimilor laturilor triunghiului ABC. **1.36.** a) Triunghiul EMG fiind isoscel, rezultă că unghiurile $\widehat{MEG}$ și $\widehat{GUM}$ sînt congruente, deci suma măsurilor unghiurilor $\widehat{UCG}$ și $\widehat{UMG}$ este 180°. b) Congruența celor două triunghiuri rezultă din: $\| LU \| = \| GU \|$, $\widehat{EMV} \equiv \widehat{GMU}$, $\widehat{VEM} \equiv \widehat{MGU}$. c) Unghiurile $\widehat{MUG}$ și $\widehat{MCG}$ sînt congruente (din patrulaterul inscriptibil $CGMU$) și cum unghiurile $\widehat{MCG}$ și $\widehat{DFG}$ sînt congruente, deducem că unghiurile $\widehat{GUQ}$ și $\widehat{GFQ}$ sînt congruente. d) Ca mai sus, patrulaterul $PEVF$ este inscriptibil, deci $\| PM \| \cdot \| MV \| = \| EM \| \cdot \| MF \|$, iar din patrulaterul $GUFQ$ rezultă $\| QM \| \cdot \| MU \| = \| EM \| \cdot \| MF \|$ și, deoarece $\| MU \| = \| MV \|$, rezultă $\| PM \| = \| QM \|$. **1.37.** Patrulaterele $IPBQ$, $IQCR$, $IRDS$, $ISAP$ fiind inscriptibile, deducem că $PQRS$ este inscriptibil. Obținem că triunghiurile ESP și EQR sînt asemenea, deci $\| EP \| \cdot \| EQ \| = \| ES \| \cdot \| ER \|$ deci E se află pe axa radicală a cercurilor $(IPBQ)$ și $(ISRD)$, axă radicală care este EI. *(Soluția aparține lui D. Ene.)* **1.38.** Fie α al doilea punct de intersecție a cercurilor de diametre $|OB|$ și $|OC|$, β, γ similarele lui α. Deoarece unghiurile $O\gamma A$ și $O\gamma B$ sînt drepte, rezultă că punctele γ, A, B sînt coliniare. La fel, β, A, C sînt coliniare și α, B, C sînt coliniare. Rezultă că α, β, γ sînt proiecțiile punctului O pe laturile triunghiului ABC, deci sînt coliniare. O altă soluție se poate da folosind o inversiune de centru O de o putere arbitrară. Realizați-o! **1.39.** Utilizați teorema bisectoarei și puterea punctului față de cerc! **1.40.** Observăm la început că punctul P se află pe cercul de diametru $|AB|$ și anume pe semicercul care conține punctul B

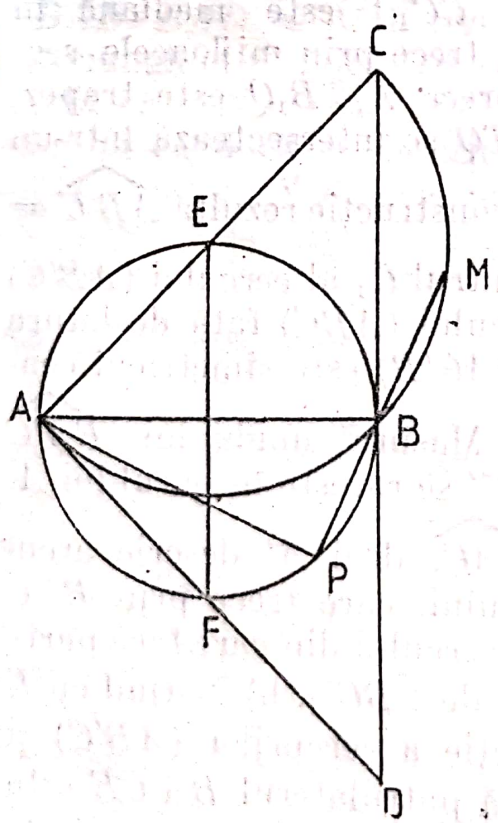


Fig. 1.40

Scanned with OKEN Scanner

și determinat de diametrul perpendicular pe AB, $|EF|$. Fie C și D fixe încît triunghiurile ABC și ABD să fie dreptunghice isoscele (fig. 1.40.). Dacă $P \in \overset{\frown}{EB}$, atunci triunghiurile BPA și CMA sînt asemenea, ceea ce arată că $\widehat{CMA}$ este drept. Rezultă că punctul M descrie sfertul de cerc al cercului de diametru $|AC|$ întins de coarda $|BC|$. Cînd P descrie arcul $\overset{\frown}{BF}$, M descrie arcul $\overset{\frown}{BD}$ din cercul de diametru $|AD|$. **1.41.** Să observăm că, fiind date două puncte A, B, cercul de rază minimă care conține cele două puncte este cercul de diametru $|AB|$. Dacă D este piciorul înălțimii din A, atunci cercurile de diametre $|AB|$ și $|AC|$ trec prin D. Oricare ar fi $M \in |BC|$, $M \neq D$, cercul circumscris triunghiului $AMB(AMC)$ are raza mai mare decît cercul circumscris triunghiului $ABD(ADC)$. Perimetrul triunghiului este $2r_1 + 2r_2 + 4\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. **1.42.** La prima vedere aceasta pare o problemă complicată. Soluția ei (probabil cea mai simplă) pornește de la observația că $\|AM\| \geqslant h$, $\|BN\| \geqslant h$, $\|CP\| \geqslant h$ pentru orice punct O și egalitățile au loc simultan dacă și numai dacă O este centrul cercului circumscris (h fiind lungimea înălțimii triunghiului). Așadar $\frac{1}{\|AM\|} + \frac{1}{\|BN\|} + \frac{1}{\|CP\|} \leqslant \frac{3}{h} = \frac{2}{R}$ și egalitatea are loc exact cînd O este centrul triunghiului. **1.43.** Motive evidente fac necesar doar studiul situației cînd centrul cercului nu este exterior patrulaterului. Notînd $\|BC\| = 2x$, $\|AD\| = 2y$, $\|AB\| = 2a$, R — raza cercului, obținem $R^2(x+y)^2 = (R^2 - a^2)(4a^2 + 4xy)$ și folosind inegalitatea mediilor avem: $R^2(x+y)^2 \leqslant (R^2 - a^2)[4a^2 + (x+y)^2]$. Rezultă $(x+y)^2 \leqslant 4(R^2 - a^2)$, prin urmare maximul sumei $x+y$ este $2\sqrt{R^2 - a^2}$ realizat pentru $x = y$, patrulaterul fiind dreptunghi. **1.44.** Perpendiculara din M pe BC trece prin O. Rezultă că măsura unghiului $\widehat{AMO}$ este constantă, M descrie două arce de cerc care trec prin A și O capabile de unghiul $\pi/2 - \mathrm{m}(\widehat{MBC})$. Fie D punctul în care CM intersectează arcul de cerc pe care se află M; atunci $\mathrm{m}(\widehat{AMD}) = 2 \cdot \mathrm{m}(\widehat{MBC})$, deci D este fix. **1.45.** Fie $A' = BC \cap B'C'$ și $P = AO \cap B'C'$. Aplicînd teorema lui Menelaus în tri-

Scanned with OKEN Scanner

unghiul ABC și utilizînd faptul că $\| CC' \| = a \cos C$, $\| AC' \| = c \cos A$, $\| AB' \| = b \cos A$, $\| B'B \| = a \cos B$, deducem $\frac{\| A'B \|}{\| A'B \| + a} = \frac{c \cos B}{b \cos C}$ din care se obține $\frac{\| A'B \|}{\| A'B \| + a/2} = \frac{2c \cos B}{a}$. Aceeași teoremă, aplicată triunghiului ABO, dă $\frac{\| A'B \|}{\| A'B \| + a/2} \cdot \frac{\| OP \|}{\| PA \|} \cdot \frac{b \cos A}{a \cos B} = 1$. Din acestea rezultă $\frac{\| OP \|}{\| PA \|} = \frac{a^2}{2bc \cos A}$. Dar $\| AO \|^2 = 1/2(b^2 + c^2) - 1/4\ a^2$ și cum $\| AO \|$ și a sînt constante, rezultă că $b^2 + c^2$ este constant și deci $2bc \cos A$ este constant, raportul $\frac{\| OP \|}{\| PA \|}$ este constant, astfel că P este fix. **1.46.** Problema se reduce la următoarea: fiind dat un triunghi isoscel ABC, $\| AB \| = \| AC \|$, să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului $| MN |$ cu $\| BM \| = \| AN \|$, $M \in | AB |$, $N \in | AC |$, pentru care vedeți soluția problemei 1.3. Pentru cazul general, se obține poligonul avînd vîrfurile în mijloacele laturilor poligonului dat. **1.47.** Perpendicularele în B' pe AC și în C' pe AB se intersectează în P. Patrulaterul $AB'PC'$ este inscriptibil, ceea ce împreună cu ipoteza antrenează faptul că AP este perpendiculară pe BC. Centrul cercului circumscris triunghiului $AB'C'$ fiind mijlocul segmentului $| AP |$ deducem că locul geometric cerut este semidreapta $|AH$, H fiind ortocentru triunghiului dat. **1.48.** Cercurile cu centrele în B, respectiv C, intersectează pe $| BC |$ în B_a, pe $| AB |$ în B_c, respectiv pe $| BC |$ în C_a și pe $| AC |$ în C_b. Să presupunem că aceste patru puncte sînt pe un cerc. Centrul acestui cerc se va găsi la intersecția mediatoarelor segmentelor $| B_aB_c |$, $| C_aC_b |$, care sînt bisectoarele interioare ale unghiurilor din B, respectiv C. Așadar, dacă cele șase puncte din enunț sînt conciclice, centrul cercului care le conține este exact centrul cercului înscris triunghiului ABC. Să mai observăm că dacă un cerc avînd centrul pe bisectoarea interioară a unui unghi cu vîrful în O intersectează laturile acestuia în punctele M, N, respectiv P, Q (N între O și M, P între O și Q) atunci $\| OM \| = \| OQ \|$ și $\| ON \| = \| OP \|$, observație care impune concluzia. **1.49.** Fie E proiecția lui A_1 pe AB; atunci $\| AD \| =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \| DE \| = \| EB \|$, deci D este fix. Rezultă că punctul G se află pe perpendiculara în punctul D pe AB. Orice punct de pe aceasta are proprietatea, locul cerut este deci perpendiculara în D pe dreapta AB. Cu notațiile din fig. 1.49., avem $\| B_1M \| = \frac{1}{2} \cdot \| AD \| = \frac{1}{2} \cdot \| MA_1 \|$, deci $\| B_1G \| = \frac{1}{4} \| GB \|$.

1.50. Fie P intersecția perpendicularelor $A'A''$ din A' pe BC și din C' pe AB (A'' pe BC, C'' pe AB (fig. 1.50)), iar B'' intersecția drep-

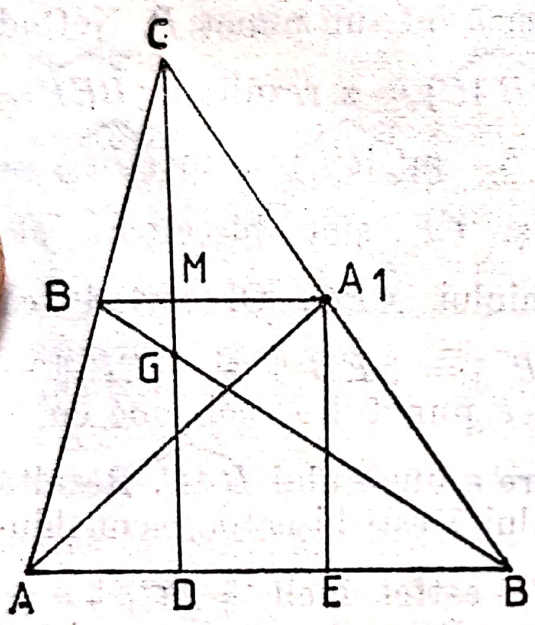


Fig. 1.49

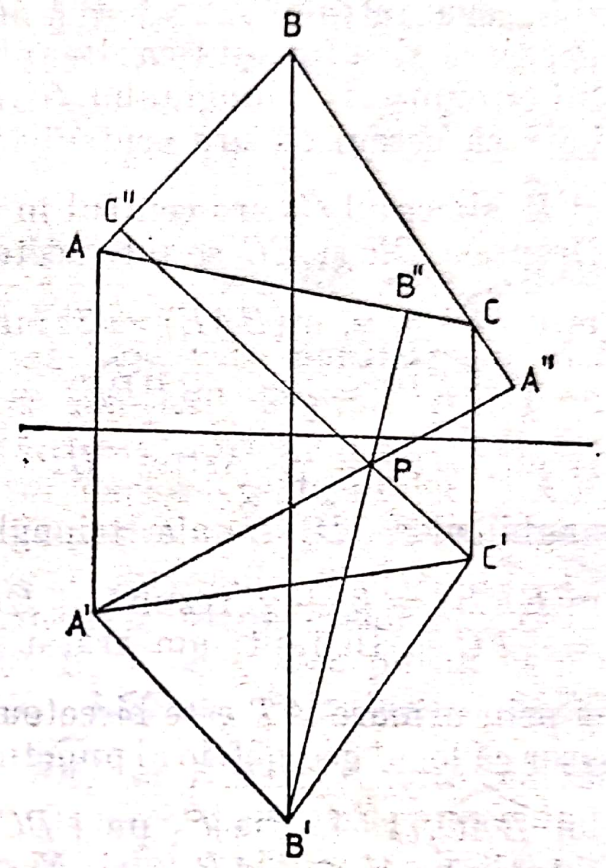


Fig. 1.50

telor $B'P$ și AC. Patrulaterul $A'B'C'P$ este inscriptibil, deci unghiurile $\widehat{B'A'C'}$ și $\widehat{B'PC'}$ sînt congruente, ceea ce antrenează congruența unghiurilor $\widehat{C''PB''}$ și $\widehat{C''AB''}$, deci patrulaterul $B''APC''$ este inscriptibil. Rezultă că PB'' este perpendiculară pe AC. **1.51.** a) Cercul de diametru $|A'B'|$ trece prin A, B. b) În cercul de la a) coarda $|AB|$ întinde un arc de măsură constantă; ea avînd lungime constantă, rezultă că diametrul cercului are lungime constantă. c) $|OP|$ este diametru în cercul circumscris patrulaterului $OBAP$, P fiind intersecția dreptelor AA', BB'. Ca mai sus, $|OP|$ este constant, deci P descrie un cerc de centru O și diametru de lungime $\| AB \| / \sin \hat{O}$. **1.52.** a) Patrulaterul

Scanned with OKEN Scanner

$AEFC$ este inscriptibil și, cum unghiurile $\hat{BAE}$ și $\hat{DAC}$ sînt congruente deducem că unghiurile $\widehat{CEF}$ și $\widehat{CBD}$ sînt congruente, deci EF este paralelă cu BD și deci perpendiculară pe AB. b) Patrulaterul $BHGF$ este inscriptibil, deci $\| AH \| \cdot \| AB \| = \| AG \| \cdot \| AF \|$, iar egalitatea $\| AH \| \cdot \| AB \| = \| AE \|^2$ reprezintă teorema catetei. c) Reamintim, egalitatea $\| AE \|^2 = \| AG \| \cdot \| AF \|$ este o condiție necesară și suficientă ca dreapta AE să fie tangentă cercului circumscris triunghiului GEF în punctul E. **1.53.** Se vede ușor că cercul C_1 are centrul în mijlocul arcului $|AB|$, fie el E, și cercul C_2 are centrul în mijlocul arcului $\widehat{AC}$, fie el F. Dreptele BF și EC se intersectează într-un punct P. Notînd $m(\widehat{CAF}) = \gamma$, $m(\widehat{BAE}) = \beta$, $m(\widehat{BAC}) = \alpha$, rezultă $m(\widehat{BEP}) = m(\widehat{CFP}) = \alpha$, $m(\widehat{PBE}) = \beta$, $m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{PBC}) = m(\widehat{ABP}) = \gamma$. Astfel BP și CF sînt bisectoare ale unghiurilor $\hat{B}$, $\hat{C}$ ale triunghiului ABC. Observînd că $m(\widehat{EPB}) = \beta + \gamma$ rezultă $\| EP \| = \| EB \|$ și $\| EP \| = \| FC \|$. În fapt, am arătat că punctul P coincide cu T și prin urmare AT este bisectoare a unghiului $\widehat{BAC}$. Rezultă ușor că locul geometric al punctului T este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. **1.54.** Fie C_1 pe $|BC|$ astfel încît $\| BC_1 \| = c$. Cît timp $M \in |AB|$ și $N \in |BC_1|$ locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$ este segmentul $|PQ|$ ce unește mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|BC_1|$. Fie $R \in |BC|$ astfel încît $\| BR \| = \| C_1C \|$ și S mijlocul segmentului $|RC|$. Cînd $M \in |BR|$ și $N \in |C_1C|$ mijlocul segmentului $|MN|$ descrie segmentul $|QS|$. Fie $B_1 \in |CA|$ încît $\| CB_1 \| = \| CR \| = \| AB \|$. Cînd $M \in |RC|$ $N \in |CB_1|$ mijlocul lui $|MN|$ descrie segmentul ce unește mijloacele segmentelor $|CR|$ și $|CB_1|$, fie el $|ST|$. Fie U pe $|CA|$ încît $\| CU \| = \| B_1A \|$ (sau $\| AU \| = \| AB \|$), V mijlocul segmentului $|AU|$. Cînd $M \in |CU|$ (și $N \in |B_1A|$) mijlocul segmentului $|MN|$ descrie segmentul $|TV|$. Cînd $M \in |UA|$ și $N \in |AB|$, mijlocul lui $|MN|$ descrie segmentul $|VP|$. **1.55.** *Suficiența.* Presupunînd că $ABCD$ este trapez ($BC \parallel AD$), notînd cu M mijlocul lui $|AB|$ și cu N mijlocul lui $|CD|$, observăm

că triunghiurile ANB și CMD au aceeași arie, astfel că, dacă d_M este distanța de la M la DC și d_N este distanța de la N la AB, are loc: $d_M \cdot \| DC \| = d_N \cdot \| AB \|$ și, deoarece $d_M = \frac{1}{2} \cdot \| AB \|$, rezultă $d_N = \frac{1}{2} \| DC \|$ deci cercul de diametru $| CD |$ este tangent la AB. *Necesitatea.* Fie P proiecția lui M pe DC și Q proiecția lui N pe AB. Fie O intersecția dreptelor AB și CD (cazul paralelismului este mai simplu), admițînd ordinile O, B, A și O, C, D. Rezultă $\| OB \| = \frac{d_M (1 - \sin \hat{O})}{\sin \hat{O}}$; $\| OC \| = \frac{d_N (1 - \sin \hat{O})}{\sin \hat{O}}$ și deci $\frac{\| OB \|}{\| OC \|} = \frac{d_M}{d_N} = \frac{\| MB \|}{\| NC \|}$, deci BC este paralelă cu MN și la fel se arată că AD este paralelă cu MN. De fapt, aceasta era ideea soluției: dreptele BC și AD să fie paralele cu o anumită dreaptă care nu putea fi decît MN. **1.56.** Fie U, V mijloacele segmentelor $| AM |$, $| AN |$. Deoarece O_1A și VO_2 sînt paralele, mediatoarea segmentului $| AV |$ trece prin mijlocul lui $| O_1O_2 |$. Prin același mijloc trec mediatoarele segmentelor $| AU |$ și $| AB |$, deci punctele A, U, B, V se găsesc pe un cerc cu centrul în mijlocul lui $| O_1O_2 |$. **1.57.** a) Patrulaterul $MEDB$ este inscriptibil deoarece $\widehat{BED} \equiv \widehat{BMD}$; rezultă că ME este perpendiculară pe AB. Deoarece proiecțiile punctului M pe laturile triunghiului ABC sînt coliniare (dreapta lui Simpson) rezultă că MF și AC sînt perpendiculare. b) Fie H' a doua intersecție a înălțimii AH cu cercul circumscris și M' simetricul lui M față de BC. Deoarece H' este simetricul lui H față de BC, rezultă că trapezul $HMM'H'$ este isoscel, deci $\widehat{M'HH'} \equiv \widehat{M'MH'}$ și cum $\widehat{M'HH'} \equiv \widehat{NAH'}$ deducem că HM' este paralelă cu AN și deci cu DE. Deoarece $\| MD \| = \| MD' \|$, rezultă $\| MR \| = \| HR \|$. *Observație.* Proprietatea b) este cunoscută ca teoremă a lui Steiner. **1.58.** a) Presupunem situația din fig. 1.58. Din egalitățile $m(\widehat{O_1SO_2}) - m(\widehat{O_1B_1A_2}) + m(\widehat{O_2A_2S}) = 180°$ și $m(\widehat{O_1TO_2}) = m(\widehat{O_2A_2S}) - m(\widehat{O_1B_1A_2})$, deducem $m(\widehat{O_1TO_2}) + m(\widehat{O_1MO_2}) = 180°$ deci T se află pe cercul circumscris triunghiului O_1MO_2. b) Notînd $m(\widehat{B_1A_1M}) = \varphi$, rezultă $m(\widehat{B_1SM}) =$

$= m(\widehat{O_1MA_1}) = m(\widehat{A_2B_2M}) = m(\widehat{O_2MB_2}) = \varphi$, de unde rezultă afirmația. c) Triunghiurile MA_1B_1, MB_2A_2 sînt asemenea, fiind dreptunghice și $\widehat{B_1A_1M} \equiv \widehat{B_1SM} \equiv \widehat{MB_2A_2}$ și relația se impune. d) ω_1 se află la intersecția

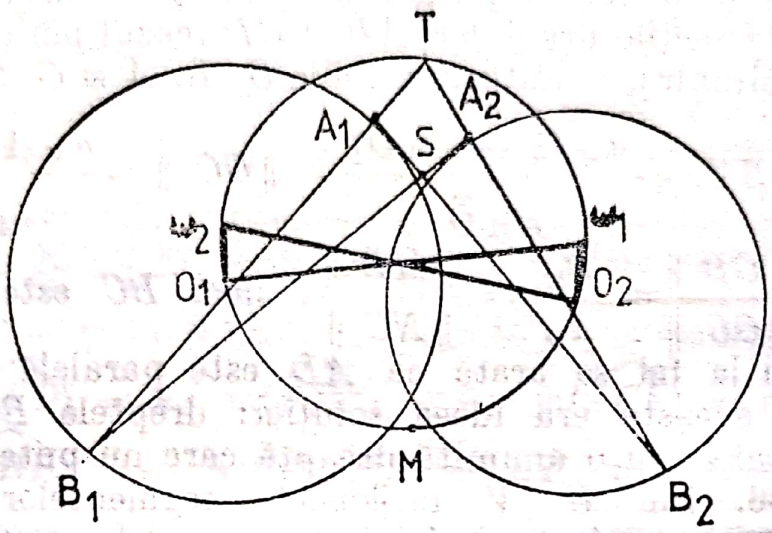


Fig. 1.58

mediatoarelor segmentelor $|MB_2|$ și $|MA_1|$ care trec, evident, prin O_2, respectiv O_1. Rezultă $\widehat{O_1\omega_1O_2} \equiv \widehat{O_1TO_2}$, deci ω_1 se află pe cercul circumscris triunghiului O_1MO_2. La fel, ω_2 se află pe același cerc. Deoarece $O_2\omega_2$ este perpendiculară pe A_2M care este paralelă cu $O_2\omega_1$, rezultă că $|\omega_1\omega_2|$ este diametru în cercul circumscris triunghiului O_1MO_2. **1.59.** Fie E intersecția dreptelor AD și BC. Atunci Q este ortocentrul triunghiului EAB. Notînd cu T' mijlocul segmentului $|EQ|$, rezultă că triunghiul ETC este isoscel, deci $T'CE \equiv CET' \equiv CAO \equiv ACO$, de unde deducem că $\widehat{TCO}$ este drept, adică $T'C$ este tangentă în C la semicercul dat. Analog, $T'D$ este tangentă în D la același semicerc și atunci T' coincide cu T, ceea ce dovedește afirmația a). b) OM este bisectoare a unghiului $\widehat{COB}$ și mediatoare a segmentului $|BC|$; rezultă $\widehat{OSB} \equiv \widehat{OSC} \equiv \widehat{ABD}$ și deci triunghiurile OMB și OSB sînt asemenea, de unde $\|OM\| \cdot \|OS\| = \|OB\|^2$. c) Fie U' intersecția segmentului $|TM|$ cu semicercul de diametru $|AB|$. Atunci $U'M$ este perpendiculară pe OS. Relația $\|OM\| \cdot \|OS\| = \|OU'\|^2$ arată că triun-

ghiul $OU'S$ este dreptunghic în U' și concluzia se impune. **1.60.** Deoarece $\widehat{SNM} \equiv \widehat{SAM}$, $\widehat{ANM} \equiv \widehat{ABC}$ și $m(\widehat{SNA}) = 90°$ rezultă că AS este perpendiculară pe BC. Fie B' intersecția dreptelor NS și AB, C' intersecția dreptelor MS și AC. Să notăm că, punctele M și N fiind fixate ca în enunț, există un unic cerc ortogonal cercului $AMSN$ și care trece prin M și N, anume cercul $B'MNC'$. În adevăr, dacă O_1 este mijlocul lui $|AS|$ și O_2 mijlocul lui $|B'C'|$ (centrele celor două cercuri), observăm că $m(\widehat{O_1NS}) + m(\widehat{O_2NS}) = 90°$, ținînd seama că triunghiurile O_1NS și O_2NB sînt isoscele. Rezultă că cercurile $AMSN$ și $BMNC$ sînt ortogonale dacă și numai dacă M și N sînt picioarele înălțimilor din C și B ale triunghiului ABC, deci dacă și numai dacă $|BC|$ este diametru în cercul $BMNC$. **1.61.** a) Cercul OMP taie dreapta Oy în B astfel că $|BM|$ este diametru. Se vede că BM este perpendiculară pe AN, deci M este ortocentrul triunghiului ABM. Cum MP este perpendiculară pe BP și AP pe PN, concluzia se impune. În plus B, P, N sînt coliniare. În fapt, esența soluției constă în observarea faptului că într-un triunghi, cercurile avînd diametre o latură și segmentul Euler de pe înălțimea corespunzătoare sînt ortogonale; b), c). Cu observația de mai sus, condiția din enunț scriindu-se $\|OA\|^2 = \|OM\| \cdot \|ON\|$, rezultă că O este mijlocul lui $|AB|$, de unde concluziile $\|OA\| = \|OP\|$ și B este fix. Locul lui P este sfertul de cerc de centru O și rază $\|OA\|$ situat în interiorul unghiului $\widehat{BOM}$. **1.62.** a) Patrulaterul $ABCN$ este inscriptibil, $|BN|$ fiind diametru al cercului circumscris. Rezultă că centrul cercului ABC se află pe mediatoarea segmentului $|AN|$, care este locul geometric cerut. b) Dacă T este unul din punctele de tangență, avem $\|MT\|^2 = \|MA\| \cdot \|MN\| =$ constant, deci T se află pe cerc de centru M și care trece prin punctele în care perpendicularele în A pe MN taie cercul dat. Locul geometric este acest cerc din care se exclud intersecțiile sale cu dreapta MN. **1.63.** Triunghiul echilateral, pătratul, hexagonul regulat. **1.64.** Dacă patrulaterul este ortodiagonal și $I = AC \cap BD$, atunci cercurile de diametre $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ trec prin I. Reciproc, fie I al doilea punct comun cercurilor de diametre $|AB|$ și $|AC|$; atunci I este piciorul înălțimii din B pe AC în triunghiul ABC. Deoarece cercul de diametru $|DC|$ trece prin I, rezultă că I se află pe $|BD|$ și deci AC

Scanned with OKEN Scanner

și BD sînt perpendiculare. **1.65.** Observăm că punctele situate pe înălțimile triunghiului au proprietatea din enunț. Pentru celelalte puncte suma este strict inferioară lui 90°. **1.66.** Evident, unghiurile $\widehat{BCA}$ și $\widehat{B'PA}$ sînt congruente, deci arcele $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{A'B'}$ sînt congruente și atunci $\|AB\| = \|A'B'\|$. Analog, $\|BC\| = \|B'C'\|$ și $\|AC\| = \|A'C'\|$. Din congruența arcelor $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{A'B'}$ rezultă și paralelismul dreptelor AA' și BB'. Fie O centrul cercului circumscris, H, G ortocentrul și centrul de greutate ale triunghiului ABC, M mijlocul laturii $|BC|$, H', G', M' punctele analoage în triunghiul $A'B'C'$. Atunci triunghiurile OMG și $OM'G'$ sînt congruente (se ține seama că medianele celor două triunghiuri sînt respectiv congruente) și deci $\|OG\| = \|OG'\|$ care arată că locul lui G' este un cerc, de centru O și rază $\|OG\|$. Locul lui H' este un cerc de centru O și rază $\|OH\|$. **1.67.** Fie P intersecția dreptelor M_1O_1 și M_2O_2. Cu concursul triunghiurilor isoscele M_1O_1A, M_2O_2A deducem că unghiurile $\widehat{O_1AO_2}$, $\widehat{O_1PO_2}$ sînt congruente cînd M_1 și M_2 sînt de aceeași parte a liniei centrelor și suplementare în situația complementară. Rezultă că P descrie cercul circumscris triunghiului O_1BO_2, B fiind al doilea punct comun cercurilor date. **1.68.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și F simetricul lui G față de E; F este fix. Patrulaterul $AGCF$ este paralelogram, deci $\|AF\| = \|GC\|$ și din ipoteza că $\|AB\| = \|AC\|$ deducem $\|AF\| = \frac{2}{3}\|BE\|$ și atunci A descrie cercul cu centru F și rază $\frac{2}{3}\|BE\|$. **1.69.** Din asemănarea triunghiurilor HPU și HFQ și respectiv HQV și HEP deducem $\frac{\|UH\|}{\|QH\|} = \frac{\|HP\|}{\|FH\|} = \frac{\|PU\|}{\|FQ\|}$, $\frac{\|VH\|}{\|HP\|} = \frac{\|HQ\|}{\|HE\|} = \frac{\|QV\|}{\|EP\|}$ din care se obține $\frac{\|HU\|}{\|VH\|} = \frac{\|HC\|}{\|HB\|}$ care, conform reciprocei teoremei lui Tales, arată că VU și BC sînt paralele. **1.70.** a) Dacă I este centrul cercului înscris triunghiului ABC, rezultă $m(\widehat{AIB}) = 135°$ și prin urmare I descrie două arce de cerc care trec

Scanned with OKEN Scanner

prin A și B din ale căror puncte segmentul $|BA|$ se vede sub unghiuri de 135°. b) Dacă P este intersecția dreptelor AM și BN, patrulaterul $IAPB$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{APB}) = 45°$ și obținem $m(\widehat{MN}) = 90°$, ceea ce justifică afirmația. c) MN este paralel cu AB dacă și numai dacă patrulaterul $ABNM$ este trapez isoscel, ceea ce se realizează cînd $m(\widehat{MAB}) = măs(\widehat{NBA})$ echivalent cu $\widehat{IAB} \equiv \widehat{IBA}$, deci cînd triunghiul ACB este dreptunghic în C. MN nu poate fi perpendicular pe AB. **1.71.** a) Paralela prin A la BC taie segmentul $|MN|$ în P, care este mijlocul acestuia. Prin urmare $\|EM\| + \|EN\| = 2 \cdot \|EP\| = 2 \cdot \|AD\|$. Dar $2\|AD\| < \|AB\| + \|AC\|$ (fie A' simetricul lui A față de D; atunci $2\|AD\| = \|AA'\| < \|AC\| + \|CB'\| = \|AB\| + \|AC\|$). b) G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC avem $\|CD\| = \frac{1}{2}\|BC\|$, deci $\|AD\| = \frac{3}{2}\|BC\|$ care antrenează $\|EM\| + \|EN\| = 3\|BC\|$. c) Locul geometric este un cerc, avînd centrul în D și raza $\frac{3}{2}\|BC\|$. **1.72.** Fie Q punctul de intersecție a dreptelor A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 și fie d_1, d_2, d_3 distanțele punctului Q la A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2. Ținînd seama că un punct al medianei unui triunghi se caracterizează prin faptul că distanțele lui la laturile care pornesc din vîrful respectiv sînt invers proporționale cu lungimile acestora, deducem $d_3\|A_1D_1\| = d_2 \cdot \|A_1B_1\|$, $d_3 \cdot \|A_2B_2\| = d_1 \cdot \|A_2D_2\|$ și $d_1\|A_3B_3\| = d_2\|A_3D_3\|$. Din aceste egalități rezultă, în ipoteza egalităților din enunț, că $\|A_3B_3\| = \|A_1D_1\|$. **1.73.** Fie P_1, P_2 proiecțiile punctelor O_1, O_2 pe A_1A_2 și Q_1Q_2 proiecțiile lor pe B_1B_2. Din trapezele dreptunghice $O_1P_1P_2O_2$, $O_1Q_1Q_2O_2$ care au unghiurile ascuțite congruente, conform ipotezei, rezultă $\|P_1P_2\| = \|Q_1Q_2\|$ și deci $\|A_1A_2\| = \|B_1B_2\|$. Din cele spuse rezultă și $\|A_1A_2\| \leqslant 2\|O_1O_2\|$. b) Cu ceea ce am obținut la punctul a) se deduce și construcția cerută: se construiește cercul de diametru $|O_1O_2|$ și în acesta se construiește coarda $|O_2C|$ de lungime $\frac{l}{2}$. Paralela prin A la O_2C taie cercurile în punctele A_1 și A_2 astfel că $\|A_1A_2\| = l$.

Are loc $\| AB \| \leqslant \| A_1A_2 \| \leqslant 2 \| O_1O_2 \|$. **1.74.** Deoarece unghiul $\widehat{AND}$ este drept, iar punctele D și B sînt fixe rezultă că punctul N se află pe cercul de diametru $| BD |$. Este ușor de văzut că atunci cînd M descrie cercul dat, punctul N descrie în întregime cercul de diametru $| BD |$. Deoarece A este fix, rezultă că mijlocul segmentului $| AN |$ descrie cercul de diametru $| AC |$. **1.75.** a) Este un exemplu de rezolvare a unei probleme indirect sau „invers": fie D și G puncte ca în enunț și fie E' și F' punctele în care dreapta DG intersectează dreapta AB și dreapta AC. Vom arăta că $\| BE' \| = \| AC \|$ și $\| CP' \| = \| AB \|$. În adevăr, deoarece D este mijlocul arcului $\widehat{BC}$ pe care nu se află A, deducem că unghiurile $\widehat{BGD}$ și $\widehat{CGF'}$ sînt de măsură 45° și deci triunghiurile dreptunghice BGE' și CGF' sînt isoscele și, cum $ABGC$ este dreptunghi, concluzia se impune. b) Să presupunem că A descrie semicercul „superior", deci D este punctul fix — mijloc al semicercului, „inferior" al cercului dat. Deoarece măsura unghiului $\widehat{BED}$ este constantă de 45° rezultă că punctul E se află pe cercul care trece prin punctele D și B și care are centrul în punctul O_1 simetricul punctului O față de BD. Evident, patrulaterul $BODO_1$ este un pătrat, ceea ce arată că cercul de centru O_1 și care trece prin punctele B, D este ortogonal cercului dat. Punctul E descrie arcul mare $\widehat{BD}$ al acestui cerc. Analog, punctul F descrie arcul mare al cercului care trece prin C și D și care are centrul în punctul O_2 — simetricul lui O față de CD. Acest cerc este ortogonal cercului dat și este tangent cercului descris de E în punctul D. c) Este știut că simetricul ortocentrului față de o latură a triunghiului se află pe cercul circumscris (vedeți 1.7). Dar cercul pe care se află punctul E este simetricul cercului dat față de BD. Rezultă că ortocentrul triunghiului BED se află pe cercul dat. Analog, pentru triunghiul CFD. **1.76.** a) Presupunem că M se află pe semicercul superior AB. Se vede că $m(\widehat{APO}) = 45°$, deci P descrie arcul cercului de centru O_1 și care trece prin punctele A și O, O_1 fiind „deasupra" segmentului $| AB |$ astfel că triunghiul AO_1O este isoscel și dreptunghic în O_1, arc situat „deasupra" segmentului $| AB |$ și avînd extremitățile O și U unde U este astfel că triunghiul UAO este isoscel și drep-

Scanned with OKEN Scanner

tunghic în A. Analog pentru Q. b) Fie $|ED|$ diametrul perpendicular pe AB, E situat pe semicercul „superior". Constatăm ușor că OL este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{EOM}$. Rezultă că LE este tangenta în E la cercul dat; astfel locul geometric al punctului L este segmentul $|UV|$ unde V este simetricul punctului U față de E. **1.77.** Fie O intersecția dreptelor AD și BC; atunci $\frac{\|OQ\|}{\|OA\|} = \frac{\|OC\|}{\|OP\|}$ și $\frac{\|OD\|}{\|OA\|} = \frac{\|OC\|}{\|OB\|}$ de unde $\frac{\|OQ\|}{\|OD\|} = \frac{\|OB\|}{\|OP\|}$ care arată că OB și PD sînt paralele. **1.79.** a) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și fie O' intersecția mediatoarei segmentului $|BM|$ cu dreapta BO. Atunci $\frac{\|BO'\|}{\|BO\|} = \frac{\|BM\|}{\|MC\|} = \frac{\|BP\|}{\|BA\|}$ și atunci triunghiurile PBO' și ABO sînt asemenea, astfel că $\|PO'\| = \|BO'\| = \|MO'\|$. În definitiv B, O_1, O sînt coliniare. Analog C, O_2, O sînt coliniare. B_1M este perpendiculară pe BC și la fel C_1M, deci B_1C_1 este perpendiculară pe BC în M; triunghiul OB_1C_1 este isoscel, deci mediatoarea segmentului $|B_1C_1|$ trece prin O. b) Din patrulaterele inscriptibile $BMSP$ și $CMSQ$ deducem $m(\widehat{BSC}) = 2\,m(\hat{A})$. Rezultă că S descrie arcul care trece prin C și B capabil de unghiul $2A$, situat în același semiplan cu A față de BC. **1.80.** a) Proiecțiile paralele a două segmente paralele și congruente pe o dreaptă oarecare sînt segmente congruente. Astfel, $\|DM\| = \|PN\|$ și atunci $\|MN\| = \|DP\|$. b) Rezultă (de exemplu) din congruența triunghiurilor ADM și QPN. c) Locul geometric este o dreaptă paralelă cu dreapta DE. (Dacă N este variabil pe o dreaptă d și vectorul $\overrightarrow{NQ}$ rămîne echipolent cu un vector dat, atunci Q descrie o dreaptă paralelă cu d). **1.81.** a) Intersecția E a diagonalelor $|AD|$ și $|BC|$ ale trapezului $ABCD$ se află pe $|MN|$. Rezultă $\frac{\|EM\|}{\|AB\|} = \frac{\|EN\|}{\|CD\|} = \frac{\|MN\|}{\|AB\| + \|CD\|} = \frac{1}{2}$, deci triunghiul AEB este dreptunghic în E. (Condiția necesară și suficientă ca un triunghi AEB să fie dreptunghic în E este ca lungimea

Scanned with OKEN Scanner

medianei $|EM|$ să fie jumătate din lungimea laturii $|AB|$.) b) Din asemănarea triunghiurilor AEB și CED deducem $\frac{\|AE\|}{\|CE\|} = \frac{\|BE\|}{\|DE\|} = \frac{\|AB\|}{\|CD\|} = \frac{a}{b}$ unde $\|EM\| = a$ și $\|EN\| = b$ și relația de demonstrat este echivalentă cu $\|AE\|^2 + \|EB\|^2 = \|AB\|^2$ care este adevărată conform a). c) Cercul de diametru $|MN|$, deoarece dacă U este mijlocul segmentului $|BC|$, atunci UN este paralel cu BD și MU este paralel cu AC, ceea ce arată că $m(\widehat{MUN}) = 90°$. d) Dreapta MN, deoarece într-un trapez, dreapta care unește mijloacele laturilor paralele trece prin intersecția celorlalte două. e) Proiecția pe AB descrie cercul de diametru $|EM|$, iar proiecția pe DC descrie cercul de diametru $|EN|$. Deoarece, în acest caz, intersecția F a dreptelor AD și BC este un punct fix $\left(\text{deoarece } \frac{\|FM\|}{\|FN\|} = \frac{a}{b}\right)$, rezultă că proiecțiile pe BC și AD descriu cercul de diametru $|EF|$. **1.82.** Fie O mijlocul segmentului $|AB|$ și O_1 mijlocul segmentului $|A_1B_1|$. Atunci O, O_1M sînt coliniare și $\|OM\| = 2 \cdot \|OO_1\|$. Rezultă că O_1 descrie un cerc (precizați-l!), G fiind centrul de greutate al triunghiului AMB, avem $\|OG\| = \frac{1}{3}\|OM\|$, deci G descrie un cerc. **1.83.** a) Segmentul care unește mijloacele segmentelor $|T_1T_2'|$ și $|T_1T_2|$ este paralel și congruent cu segmentul care unește mijloacele segmentelor $|T_1'T_2'|$ și $|T_1'T_2|$. b) Paralelogramul respectiv este dreptunghi dacă și numai dacă T_1T_1' și T_2T_2' sînt perpendiculare, ceea ce este echivalent cu perpendicularitatea dreptelor AO_1 și AO_2. Astfel, A se află, în mod necesar pe cercul de diametru $|O_1O_2|$ (și exterior celor două cercuri). c) Locul geometric există dacă și numai dacă cercul de diametru $|O_1O_2|$ are puncte în exteriorul cercurilor date. Lăsăm în seama cititorului analiza detaliată. **1.84.** a) $BB'C'C$ este trapez, iar $|AO|$ este linia mijlocie; rezultă $\|BB'\| + \|CC'\| = 2\|AO\| = \|BC\|$. b) Fie A' proiecția punctului A pe BC. Triunghiurile $AA'C$ și $CC'A$ sînt congruente, triunghiurile $AA'B$ și $BB'A$ sînt congruente, de unde rezultă că raportul cerut este 2. c) Cele două cercuri trec prin A'. **1.88.** a) În triunghiul FAB,

Scanned with OKEN Scanner

$|AD|$ și $|BC|$ sînt înălțimi, deci E este ortocentrul acestui triunghi, astfel că FE este perpendiculară pe AB. b) Deoarece $m(\widehat{AC}) = 90°$, $m(\widehat{AD}) = 120°$, rezultă $m(\widehat{CD}) = 30°$ și atunci $m(\widehat{CAD}) = 15°$, $m(\widehat{ADC}) = 45°$, $m(\widehat{ACD}) = 120°$, $\|AC\| = a\sqrt{2}$, $\|AD\| = a\sqrt{3}$, $\|CD\| = 2a \sin 15°$. c) Patrulaterul $CEDF$ are unghiurile din C și D drepte, deci este inscriptibil, $|EF|$ este diametru în cercul circumscris; triunghiurile DEF și BDA sînt asemenea și deducem $\|EF\| = 2a \operatorname{tg} 15° = 2a(2 - \sqrt{3})$. Cercul $CEDF$ este ortogonal cercului dat, astfel că O_1 fiind centrul lui, CO_1 este tangentă în C cercului dat, deci paralelă cu AB. Fie H intersecția dreptelor FE și AB. Din triunghiul dreptunghic OHO_1 găsim $\|OO_1\| = 2a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. **1.89.** a) Din ipoteză rezultă $m(\widehat{AMD}) = \frac{\pi}{8} = m(\widehat{AND})$ (folosind proprietatea unghiului exterior), deci patrulaterul $ANMD$ este inscriptibil. b) $m(\widehat{PAN}) = \frac{\pi}{4}$. deci $m(\widehat{PAB}) = \frac{\pi}{8}$ și cum triunghiurile PAD și PCD sînt congruente, deducem $m(\widehat{PCD}) = \frac{3\pi}{8} = m(\widehat{NMD})$ și deci dreptele CP și MN sînt paralele. c) Afirmația rezultă din observația că $m(\widehat{NAP}) = \frac{\pi}{4} = m\,\widehat{DAP}$. d) Patrulaterul $HANG$ este inscriptibil și $|AG|$ este diametru în cercul circumscris; cum $m(\widehat{HNG}) = 45°$, rezultă $m(\widehat{HAC}) = 45°$. Dar $m(\widehat{HAC}) = 45°$, astfel că A, C, G sînt coliniare. e) Se obține imediat că $m(\widehat{DHN}) = \frac{\pi}{8}$ (din triunghiul DHN) și atunci $\|DH\| = \|DC\| \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} = a(2 + \sqrt{3})$. **1.90.** a) Notînd $\alpha = m(\widehat{CAB})$, rezultă $m(\widehat{MAC}) = 45° - \frac{\alpha}{2}$, $m(\widehat{ABN}) = 90° - \alpha$, $m(\widehat{QMP}) = 45° + \frac{\alpha}{2}$, $m(\widehat{MQP}) = 45° + \frac{\alpha}{2}$, deci triunghiul MPQ este isoscel cu $\|MP\| = \|QP\|$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $\|AD\| = a$, avem $\|NC\| = a \sin \alpha$, $\|DC\| = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, $\|DM\| = a \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = a \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\|MC\| = a \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$ și egalitatea propusă se verifică. c) În acest caz, $m(\widehat{AB}) = 90° + \alpha$, $m(\widehat{BC}) = 2\alpha$ și deci $\alpha = 30°$, astfel că triunghiul AQB este echilateral și proprietatea este cunoscută. d) În ipoteza impusă, dreptele QN și AP sînt înălțimi în triunghiul ACQ, deci CM trebuie să fie perpendiculară pe AM. Rezultă că M trebuie luat în D. Pentru această poziție proprietatea are loc. **1.91.** a). Dacă $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$ și r este raza cercului înscris, avem relația $bc = r(a + b + c)$ și deducem, observînd că $\|ME\| = \|FN\| = r$, că $\|AM\| = \frac{c}{b}(b - r)$, $\|AN\| = (c - r)\frac{b}{c}$ și prin urmare aria $[AMN] = \frac{(c - r)(b - r)}{2}$. Afirmația din enunț este echivalentă cu egalitatea $2(c - r)(b - r) = r(a + b + c)$ care se verifică ținînd seama de legătura între r și laturi și de $a^2 + b^2 + c^2$. b) Se verifică prin calcul egalitatea $\frac{\|AD\|}{\|AM\|} = \frac{\|AN\|}{\|AC\|}$. **1.92.** Fie D diametralul opus lui A. Atunci patrulaterul $BHCD$ este paralelogram, deci punctele H, A_1, D sînt coliniare. Deducem (afirmație cu care ne-am mai întîlnit) că paralela prin A_1 la AO taie segmentul $|AH|$ în mijlocul acestuia, deci $\|AA''\| = \|A''H\| = \|OA_1\|$. Subliniem că de aci rezultă și $\|OA_1\| = \|OA'\|$. Astfel, triunghiul $A'B'C'$ este simetricul triunghiului $A_1B_1C_1$ față de O, deci congruent cu acesta și asemenea cu ABC. Apoi, $\|HA\| = 2 \cdot \|HA''\|$ și analoagele, de unde rezultă că triunghiul $A''B''C''$ este asemenea cu triunghiul ABC în raportul de asemănare $\frac{1}{2}$, deci congruent cu $A_1B_1C_1$ și prin urmare cu $A'B'C'$. **1.93.** a) Observați că $ABDE$ este dreptunghi, $|BE|$ este diametru în cercul dat; la fel, $ACDF$ este dreptunghi și deci CF trece prin O. b) Deoarece $\|FD\| = \|AC\|$ și $\|AN\| = \|MD\|$, rezultă $\|FM\| = \|NC\|$, astfel că $MFNC$ este paralelogram și atunci $\|FN\| = \|MC\|$. **1.94.** a) Avem $m(\widehat{CD}) - m(\widehat{AB}) =$

$= 180°$, deci $m(\widehat{CD}) = 240°$, astfel că $m(\widehat{CABD}) = 120°$, prin urmare $|CD|$ are lungimea laturii triunghiului echilateral înscris în cercul dat. b) Notînd $m(\widehat{BOD}) = 2\alpha$, rezultă cu ușurință $\|AD\| = 2R \sin(30° + \alpha)$, $\|BC\| = 2R \cdot \sin(60° - \alpha) = 2R \cos(30° + \alpha)$, deci $\|AD\|^2 + \|BC\|^2 = 4R^2$. c) Fie M intersecția dreptelor AD și BC. Rezultă $m\,\widehat{AMB} = 150°$, deci M descrie un cerc care trece prin A și B. **1.95.** a) Observați că PQ este paralelă cu tangenta în A la cercul dat. b) Remarcăm, la început, că proprietatea de la a) este independentă de măsura unghiului $\widehat{MAN}$ (diferită de 90°). Problema b) este formulată pentru o măsură dată a unghiului $\widehat{MAN}$. Maximul cerut se realizează atunci cînd $|AO$ este bisectoarea interioară unghiului MAN. **1.96.** Patrulaterele $ABCE$, $AFCD$, $ANMC$ sînt paralelograme, ceea ce implică faptul că $|BE|$, $|DF|$, $|MN|$ se intersectează în mijlocul lui $|AC|$, punctul de intersecție fiind mijloc al fiecăruia dintre acestea. **1.97.** Fie un cerc cu centrul O și A, B, C puncte pe cerc. Cercurile cu centrele în A și B și care trec prin O se taie în C_1. Analog definim punctul A_1. Atunci ACA_1C_1 este paralelogram (demonstrați afirmația). Cu aceasta, afirmația din enunț rezultă cu ușurință. **1.98.** Folosind asemănarea triunghiurilor PA_1B și CA_1P deducem $\frac{\|CA_1\|}{\|PA_1\|} = \frac{\|PA_1\|}{\|BA_1\|} = \frac{\|PC\|}{\|PB\|}$ din care se deduce $\frac{\|A_1C\|}{\|A_1B\|} = \frac{\|PC\|^2}{\|PB\|^2}$. Cu două relații analoage se verifică egalitatea $\frac{\|A_1C\|}{\|A_1B\|} \cdot \frac{\|B_1A\|}{\|B_1C\|} \cdot \frac{\|C_1B\|}{\|C_1A\|} = 1$ care arată că punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare.

Capitolul 2

2.1. $|AC|$ intersectează pe $|MN|$ în P. Atunci $\|MP\| / \|CD\| = \frac{m}{m+n}$ și $\|PN\| / \|AC\| = \frac{n}{m+n}$, folosind asemănări de triunghiuri și proprietăți ale proporțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Fie M mijlocul laturii $|BC|$ și M_1 punctul în care paralela prin M la direcția considerată taie dreapta d. Conform problemei 2.1. avem $3 \cdot \|GG_1\| = 2 \cdot \|MM_1\| + \|AA_1\|$ care împreună cu faptul că $|MM_1|$ este linie mijlocie în trapezul BCC_1B_1 impune concluzia. **2.3.** Dreapta MN intersectează dreapta BC în E, paralela prin A la BC în F și mediana $|AD|$ a triunghiului ABC în P. Din asemănarea triunghiurilor EMB și FMA obținem $\frac{\|BM\|}{\|MA\|} = \frac{\|EB\|}{\|AF\|}$; iar din asemănarea triunghiurilor ECN și FNA avem $\frac{\|CN\|}{\|NA\|} = \frac{\|EC\|}{\|AF\|}$. Din acestea deducem $\frac{\|BM\|}{\|MA\|} + \frac{\|CN\|}{\|NA\|} = 2\frac{\|ED\|}{\|AF\|}$ și cum $\frac{\|ED\|}{\|AF\|} = \frac{\|DP\|}{\|PA\|}$, rezultă $2 \cdot \frac{\|DP\|}{\|PA\|} = k$ și prin urmare P este un punct fix. **2.4.** Dreapta MON taie pe BC în Q și paralela prin A la BC în P. Folosind asemănări de triunghiuri obținem $\frac{\|CA\|}{\|NA\|} = 1 + \frac{\|QC\|}{\|AP\|}$, $\frac{\|BA\|}{\|MA\|} = 1 + \frac{\|QB\|}{\|AP\|}$, $\frac{\|DA\|}{\|OA\|} = 1 + \frac{\|QD\|}{\|AP\|}$. Rezultă:

$$\frac{\|BD\| \cdot \|CA\|}{\|NA\|} + \frac{\|DC\| \cdot \|BA\|}{\|MA\|} = \|BD\| + \|DC\| +$$

$$+ \frac{\|BD\| \cdot \|QC\| + \|DC\| \cdot \|QB\|}{\|AP\|} = \|BC\| +$$

$$+ \frac{\|BD\| \cdot \|QC\| + \|DC\| \cdot \|QB\|}{\|AP\|}$$

și rămîne de observat că $\|BC\| \cdot \|QD\| = \|BD\| \cdot \|QC\| + \|DC\| \cdot \|QB\|$. **2.5.** Triunghiurile BCE și CFB sînt asemenea, deoarece $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{BCF})$ și $m(\widehat{CFB}) = m(\widehat{BCE})$. **2.6.** Fie DD' și BB' paralele cu MN, $D' \in AC$, $B' \in AC$, $O = AC \cap BD$. Avem $\frac{\|AM\|}{\|MB\|} = \frac{\|AO\|}{\|OB'\|}$, $\frac{\|ND\|}{\|NC\|} = \frac{\|OD'\|}{\|OC\|}$, $\frac{\|OD'\|}{\|OB'\|} = \frac{\|OD\|}{\|OB\|}$ de unde $\frac{\|AM\| \cdot \|ND\|}{\|MB\| \cdot \|NC\|} = \frac{\|AO\| \cdot \|OD'\|}{\|OB'\| \cdot \|OC\|} = \frac{\|AO\| \cdot \|OD\|}{\|OB\| \cdot \|OC\|}$. **2.7.** Notînd $\|AC'\| = x$, $\|BA'\| = y$, $\|CB'\| = z$, ținînd seama de asemănarea triunghiurilor $BA'C'$, $AC'B'$,

Scanned with OKEN Scanner

$CA'B'$ cu triunghiul ABC deducem $\frac{x}{b} = \frac{b-z}{c}$, $\frac{y}{c} = \frac{c-x}{a}$, $\frac{z}{a} = \frac{a-y}{b}$ de unde rezultă $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ etc., ceea ce arată că A', B', C' sînt picioarele înălțimilor din A, B, C, adică $A'B'C'$ este triunghiul ortic. **2.8.** a) $m(\widehat{ATC}) = m(\hat{B}) = m(\widehat{CET})$, deci $BCED$ este inscriptibil. b) Ipoteza implică $m\,\hat{C} = \frac{1}{2} m\,\hat{B}$. Rezultă că triunghiurile ABB' și ABC sînt asemenea, ceea ce conduce la egalitatea de demonstrat. c) Triunghiul $BB'C$ este isoscel ($\widehat{B'BC} \equiv \widehat{B'CB}$); rezultă că mediatoarea segmentului $|BC|$, adică OM, trece prin B'. **2.9.** Din asemănarea triunghiurilor ACD și AKB rezultă $\|AD\| \cdot \|AK\| = \|AB\| \cdot \|AC\|$ și ținînd seama că $\|AK\| = \|AD\| + \|DK\|$ rezultă prima relație. Triunghiurile AKB și BKD sînt asemenea, de unde: $\|BK\|^2 = \|AD\| \cdot \|AK\|$, din care, înlocuind $\|DK\| = \|AK\| - \|AD\|$, obținem a doua relație. **2.10.** Folosind teorema bisectoarei în triunghiurile AMB și AMC obținem $\frac{\|AE\|}{\|EB\|} = \frac{\|AM\|}{\|BM\|}$, $\frac{\|AF\|}{\|FC\|} = \frac{\|AM\|}{\|CM\|}$ de unde, ținînd seama că $\|BM\| = \|MC\|$ rezultă $\frac{\|AE\|}{\|EB\|} = \frac{\|AF\|}{\|FC\|}$ și deci EF este paralelă cu BC. Afirmația a doua rezultă observînd că triunghiul EMF este dreptunghic în M, iar N este mijlocul ipotenuzei $|EF|$. **2.11.** a) Patrulaterele $AFDB$ și $ADCE$ sînt inscriptibile și ținînd seama că unghiurile $\widehat{BAD}$, $\widehat{BFD}$, $\widehat{DAC}$ și $\widehat{DFC}$ au măsurile 45°, obținem egalitățile. b) Fie E' a doua intersecție a cercului (BFC) cu FD; atunci $m(\widehat{DCE'}) = 45°$, deci $\|CD\| = \|DE'\|$ și cum $\|CD\| = \|ED\|$, rezultă că E' este simetricul lui E față de BC. Altfel, se observă că F este ortocentrul triunghiului BEC, ceea ce impune și ultima afirmație. c) Cele două unghiuri au același complement, iar egalitatea rezultă din asemănarea triunghiurilor ABF și AEC. **2.12.** Dacă B' este mijlocul arcului $\widehat{BC}$, atunci I este intersecția dreptelor AA' și BB'.

Scanned with OKEN Scanner

Prima egalitate este evidentă. Pentru a doua, observăm că $m(\widehat{IBA'}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B'C}) + m(\widehat{A'C})] = \frac{1}{2}[m(\widehat{BA'}) + m(\widehat{AB'})] =$ $= m(\widehat{BIA'})$, de unde $\| BA' \| = \| IA' \|$. **2.13.** Fie A', C' mijloacele arcelor BC și AB din cercul circumscris, $I = AA' \cap CC'$. Fie D proiecția lui I pe AC și A_1 diametralul opus lui A' în cercul circumscris. Din asemănarea triunghiurilor AID și $A_1A'C$ rezultă $\frac{\| AI \|}{2R} = \frac{r}{\| A'C \|}$ și cum $\| A'C \| = \| A'I \|$ (vedeți 2.12) obținem $\| AI \| \cdot \| A'I \| = 2rR$. Dar $\| AI \| \cdot \| A'I \|$ este puterea punctului I față de cercul circumscris, deci $\| AI \| \cdot \| A'I \| = R^2 - \| OI \|^2$, deci $\| OI \|^2 = R(R - 2r)$. De aici rezultă și inegalitatea $R \geqslant 2r$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. **2.14.** Unghiurile $\widehat{YOO_1}$ și $\widehat{AOO_2}$ sînt congruente; rezultă că triunghiurile isoscele YO_1O și AO_2O sînt asemenea, deci $\frac{\| OY \|}{\| OA \|} = \frac{\| O_1O \|}{\| OO_2 \|}$. Analog $\frac{\| OZ \|}{\| OB \|} = \frac{\| O_2O \|}{\| O_3O \|}$ și $\frac{\| OX \|}{\| OC \|} = \frac{\| O_3O \|}{\| O_1O \|}$ de unde obținem relația. **2.15.** Înlocuind $\| AC \| = \| OA \| + \| OC \|$ și $\| BD \| = \| DO \| + \| BO \|$ prima relație de demonstrat se reduce la $\| AO \| \cdot \| OC \| = \| DO \| \cdot \| OB \|$ care este adevărată. Deoarece $\widehat{POA} \equiv \widehat{DCO} \equiv \widehat{PBO}$, obținem că triunghiurile PAO și POB sînt asemenea, ceea ce conduce la $\| PO \|^2 = \| PA \| \cdot \| PB \|$. **2.16.** Paralela prin B' la BC taie pe AB în punctul C_1. Evident $\frac{\| C_1B \|}{\| C_1A \|} = \frac{\| CB' \|}{\| B'A \|} = \frac{\| BA' \|}{\| A'C \|}$ de unde rezultă că C_1A' este paralelă cu AC și că $\| AC' \| = \| C_1B \|$, $\| AC_1 \| = \| BC' \|$. $A'C_1CB'$ este deci paralelogram, prin urmare $| CC_1 |$ și $| A'B' |$ au același mijloc, deci $| CC_1 |$ și $| AD |$ au același mijloc, ceea ce demonstrează că AC_1DC este paralelogram, de unde $\| AC_1 \| = \| CD \|$. Obținem $\| BC' \| = \| DC \|$ și, din paralelismul dreptelor AB și CD deducem că patrulaterul $BC'CD$ este paralelogram, deci DC' trece prin mijlocul segmentului $| BC |$. **2.17.** a) Paralelele prin A și C intersectează dreapta DO în punctele E și F. Atunci

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{\|DA\|}{\|DM\|}+\frac{\|DC\|}{\|DP\|}=\frac{\|DE\|}{\|DN\|}+\frac{\|DF\|}{\|DN\|}=\frac{\|DE\|+\|DF\|}{\|DN\|}=$
$=\frac{2\cdot\|DO\|}{\|DN\|}$ deoarece $\|NO\|=\|OE\|$, din congruența triunghiurilor AOE și COF. b) Rezultă folosind a) și $\|BD\|=$ $=2\cdot\|DO\|$. **2.18.** a) Fie B_1 și C_1 diametral-opusele punctelor B, C. Triunghiul $BC'L$ este asemenea cu triunghiul BAB_1, deci $\frac{\|BL\|}{\|BC'\|}=\frac{\|BB_1\|}{\|BA\|}$. Analog $\frac{\|CK\|}{\|CB'\|}=\frac{\|CC_1\|}{\|CA\|}$. Din asemănarea triunghiurilor ABB' și ACC' avem $\frac{\|CA\|}{\|BA\|}=\frac{\|AC'\|}{\|AB'\|}$. Din aceste trei relații se obține egalitatea din enunț. b) $m(\widehat{SHL})'=m(\widehat{ABC})$; $m(\widehat{THK})=$ $=m(\widehat{BHA'})=m(\widehat{ACB})$; $m(\widehat{HTK})=m(\widehat{BC_1C})=m(\widehat{BAC})$; $m(\widehat{HSL})=m(\widehat{BSA'})=m(\widehat{BB_1C})=m(\widehat{BAC})$. Rezultă că triunghiurile THK și HSL sînt asemenea, de unde se obține relația b). **2.19.** a) Notînd $L=BD\cap N_0P_0$ și $I=AC\cap BD$ avem $\frac{\|LD\|}{\|LB\|}=\frac{\|P_0D\|}{\|N_0B_0\|}$, $\frac{\|DA\|}{\|AN\|}=\frac{\|DI\|}{\|BI\|}$. Punînd $K=$ $=BD\cap M_0Q_0$ obținem la fel $\frac{\|KD\|}{\|KB\|}=\frac{\|DI\|}{\|BI\|}$; rezultă $L\equiv$ $\equiv K$, b) Avem $\frac{\|AC\|}{\|M_0N_0\|}=\frac{\|DI\|}{\|BD\|}$, $\frac{\|AC\|}{\|P_0Q_0\|}=\frac{\|BI\|}{\|BD\|}$ și deci $\frac{\|AC\|}{\|M_0N_0\|}+\frac{\|AC\|}{\|P_0Q_0\|}=1$. c) Utilizînd teorema lui Pappus (vedeți mai jos problema 4.6.) deducem că dreptele PM și NQ se intersectează pe segmentul $|AC|$, care reprezintă locul geometric căutat. **2.20.** a) Condiția este necesară. Dacă OM și ON sînt simetrice față de bisectoarea unghiului xOy (izogonale) triunghiurile OMM' și ONN'' sînt asemenea și triunghiurile OMM'' și ONN' sînt asemenea, de unde se deduce proporția din enunț. Condiția este suficientă. Presupunînd relația adevărată, deoarece unghiurile $\widehat{M'MM''}$ și $\widehat{N'NN''}$ sînt congruente, rezultă că triunghiurile $M'MM''$, $N'NN''$ sînt asemenea, ceea ce arată că unghiurile $\widehat{N''N'N}$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și $\widehat{M'M''M}$ sînt congruente, care împreună cu inscriptibilitatea patrulaterelor $ON'NN''$ și $OM''MM'$ arată că unghiurile $\widehat{M'OM}$ și $\widehat{N''ON}$ sînt congruente. b) Fie P intersecția cevienelor $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$ și Q intersecția izogonalelor AA'', BB'' ale dreptelor AA', BB' față de unghiurile din A, respectiv B. Notînd P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c proiecțiile punctelor P și Q pe laturile triunghiului ABC avem, conform necesității condiției a) $\frac{\|PP_a\|}{\|QQ_b\|} = \frac{\|PP_b\|}{\|QQ_a\|}$; $\frac{\|PP_b\|}{\|QQ_c\|} = \frac{\|PP_c\|}{\|QQ_b\|}$ de unde rezultă $\frac{\|PP_a\|}{\|QQ_b\|} = \frac{\|PP_b\|}{\|QQ_a\|}$ care arată, conform suficienței, că dreptele CP și CQ sînt simetrice față de bisectoarea unghiului C. **2.21.** Fie D diametralul opus lui A. Deoarece $\widehat{BAT} \equiv \widehat{CAD}$, avem $m(\widehat{BT}) = m(\widehat{CD})$, deci $m(\widehat{EST}) = \frac{m(\widehat{TC}) - m(\widehat{BT})}{2} = \frac{m(\widehat{TD})}{2} = m(\widehat{EAT})$; rezultă că patrulaterul $ASTE$ este inscriptibil, deci $\widehat{ASE} \equiv \widehat{ATE}$, de unde $\widehat{BG} \equiv \widehat{CF}$, deci BG și CF sînt paralele. Relația b) rezultă din asemănarea triunghiurilor AEC și ABT ($\widehat{ACE} \equiv \widehat{ATB}$, $\widehat{CAE} \equiv \widehat{TAB}$). **2.22.** În ipoteza impusă, dreapta PP' intersectează dreapta d, fie F punctul de intersecție. Din asemănări de triunghiuri (FOP cu $FO'P'$ și OPB cu $O'P'B'$) rezultă $\frac{\|FO\|}{\|FO'\|} = \frac{\|BO\|}{\|B'O'\|} =$ = constant, deci F este fix. **2.23.** Presupunem $\|AB\| < \|AC\|$. a) Fie A', B', C' proiecțiile punctelor A_1, B_1, C_1 pe dreapta BC; atunci $\|B_1B'\| = \frac{c\cos B}{\sqrt{3}}$ $\|A_1A'\| = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $\|C_1C'\| = \frac{b\cos C}{\sqrt{3}}$; $\|B'B\| = \|C'C\| = \frac{c\sin B}{\sqrt{3}}$. Se verifică ușor că $\frac{\|B'A'\|}{\|A'C'\|} = \frac{\|A_1A'\| - \|B_1B'\|}{\|C_1C'\| - \|A_1A'\|}$ ceea ce arată că punctele B_1, A_1, C_1 sînt coliniare .b) Afirmația rezultă cu observația că $\|B'A'\| = \|A'C'\|$. c) Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ABB_1 și A_2BA_1 rezultă $\frac{\|BB_1\|}{\|AB\|} = \frac{\|BA_1\|}{\|BA_2\|}$ care împreună cu egalitatea $m(\widehat{B_1BA_1}) =$

$= \mathrm{m}(\widehat{ABA_2})$ arată că triunghiurile BB_1A_1 și BAA_2 sînt asemenea, deci $\mathrm{m}(\widehat{BB_1A_1}) = \mathrm{m}(\widehat{BAA_2})$ din care rezultă perpendicularitatea dreptelor AA_2 și B_1A_1. **2.24.** a) Patrulaterul $AA'BB'$ este inscriptibil, astfel că obținem $\widehat{A'B'A} \equiv \widehat{A'BA}$, iar din patrulaterul inscriptibil, $AA'CC'$ deducem $\widehat{A'C'A} \equiv \widehat{A'CA}$. b) Mijlocul laturii $|B'C'|$ are ca loc geometric mediatoarea segmentului $|BC|$. Din patrulaterul inscriptibil $A'BB'A$ rezultă că mijlocul laturii $|A'B'|$ se află pe mediatoarea segmentului $|AB|$. Se vede ușor că această mediatoare este locul geometric al mijlocului segmentului $|A'B'|$. Locul mijlocului laturii $|A'C'|$ este mediatoarea segmentului $|AC|$. **2.25.** Fie a, b, c, a', b', c' lungimile laturilor celor două triunghiului, h_a, h_b, h_c, h'_a, h'_b, h'_c, înălțimile corespunzătoare. Din ipoteza $\frac{h_a}{h'_a} = \frac{h_b}{h'_b} = \frac{h_c}{h'_c}$ rezultă $\frac{ah_a}{ah'_a} = \frac{bh_b}{bh'_b} = \frac{ch_c}{ch'_c}$ de unde, ținînd seama că numărătorii sînt egali deducem egalitățile $ah'_a = bh'_b$ etc., care conduc la $\frac{a}{b} = \frac{h'_b}{h'_a} = \frac{h_b}{h_a} = \frac{a'}{b'}$ și acestea impun concluzia. Pentru cazul medianelor, folosind formula de calcul a medianei avem prin ipoteză $\frac{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}{2(a^2+b^2)-c^2} = \frac{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{2(\alpha^2+\gamma^2)-\beta^2}{2(a^2+c^2)-b^2}$ și notînd prin λ valoarea comună a acestor rapoarte obținem, aplicînd proprietatea proporțiilor $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \lambda(a^2+b^2+c^2)$ cu concursul căreia din egalitățile de mai sus deducem $\lambda a^2 = \alpha^2$ și încă două, ceea ce demonstrează afirmația. **2.26.** a) Patrulaterul BCC_2B_2 este inscriptibil și $|B_2C_2|$ este diametru în cercul circumscris acestuia, deci N este centrul acestui cerc. M fiind mijlocul coardei $|BC|$ din acest cerc, rezultă că MN este perpendiculară pe BC. Folosind și patrulaterul inscriptibil BCB_1C_1, rezultă $\widehat{C_1B_1A} \equiv \widehat{B_2C_2A}$ și deci B_1C_1 și B_2C_2 sînt paralele. b) Din asemănarea triunghiurilor AB_1C_1 și ABC rezultă $\|BC\| \cdot \|AB_1\| = \|AB\| \cdot \|B_1C_1\|$, iar din asemănarea triunghiurilor ABC și AB_2C_2 obținem $\|BC\| \cdot$

Scanned with OKEN Scanner

$\cdot \| AC_2 \| = \| AB \| \cdot \| B_2C_2 \|$; din aceste relații obținem $\| BC \|^2 \cdot \| AB_1 \| \cdot \| AC_2 \| = \| AB \|^2 \cdot \| B_1C_1 \| \cdot \| B_2C_2 \|$. Pe de altă parte, aplicînd teorema catetei în triunghiul dreptunghic ABC_2 avem $\| AB \|^2 = \| AB_1 \| \cdot \| AC_2 \|$ și concluzia se impune. **2.27.** a) Din asemănarea triunghiurilor NIP și NMA, rezultă $\frac{\| IP \|}{\| AM \|} = \frac{\| CP \|}{\| CA \|}$, iar din asemănare triunghiurilor CIP și CBA deducem $\frac{\| CP \|}{\| CA \|} \cdot \frac{\| CI \|}{\| BC \|}$, prin urmare $\frac{\| IP \|}{\| AM \|} \cdot \frac{\| IC \|}{\| BC \|}$. Analog, obținem $\frac{\| IQ \|}{\| AN \|} = \frac{\| IB \|}{\| BC \|}$ și cu acestea avem $\frac{\| IP \|}{\| AM \|} + \frac{\| IQ \|}{\| AN \|} = 1$.

b) În acest caz avem $\| IP \| = \| IQ \| = \frac{1}{2} \| AB \|$ și relația de la a) se transformă în cea din enunț. **2.29.** a) Avem $\| OA \| \cdot \| OA' \| = R^2$. Triunghiurile OAM și $OA'M$ au unghiul MOA comun și $\frac{\| OA \|}{R} = \frac{R}{\| OA' \|}$, deci sînt asemenea. Din asemănare rezultă $\frac{\| MA \|}{\| MA' \|} = \frac{\| OA \|}{R} = \text{const.}$

b) Teorema bisectoarei în $\triangle AMA'$ ne dă $\frac{\| MA \|}{\| MA' \|} = \frac{\| CA' \|}{\| CA \|} = \text{const.}$, deci C este fix. Din $\frac{a}{R} = \frac{\| MA \|}{\| MA' \|} = \frac{\| CA' \|}{\| CA \|}$ rezultă $\| AC \| = \frac{R(b-a)}{a+R}$ și $\| OC \| = a + \frac{R(b-a)}{a+R}$. **2.30.** Fie P' intersecția lui $|CP|$ cu $|AB|$, P'' intersecția lui $|BP|$ cu $|CD|$, Q' intersecția lui $|AQ|$ cu $|CD|$ și Q'' intersecția lui $|QD|$ cu $|AB|$. Dacă notăm $\frac{\| DP \|}{\| PA \|} = \frac{n}{m}$, $\| DC \| = a$, $\| AB \| = b$ avem $\frac{\| CD \|}{n} = \frac{\| Q'C \|}{m}$ de unde $\| Q'C \| = \frac{am}{n}$ și deci $\| P'A \| = \frac{am}{n}$. Rezultă $\frac{\| CQ \|}{\| QB \|} = \frac{am}{nb}$ dar $\frac{\| CQ \|}{\| QB \|} = \frac{\| CD \|}{\| BQ \|}$ de unde $\| BQ'' \| =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{bn}{m}$. Din $\triangle APB \sim \triangle DPP''$ rezultă $\|DP''\| = \frac{bn}{m}$. Dar $\|BQ''\| = \|DP''\|$ și $|BQ''| \| |DP''|$ deci $|PB| \| |DQ|$.

2.36. Avem $|DE| \| |BC|$ deci $\frac{\|AE\|}{\|BC\|} = \frac{\|AD\|}{\|DB\|}$ (1), iar din asemănarea triunghiurilor EFP și FDB rezultă: $\frac{\|EP\|}{\|PB\|} = \frac{\|EF\|}{\|FD\|}$ (2). Avem $\triangle AFE \sim \triangle AA'C$ de unde $\frac{\|AE\|}{\|EC\|} = \frac{\|FE\|}{\|A'C\|}$ și $\triangle ADF \sim \triangle ABA'$ de unde $\frac{\|AD\|}{\|AB\|} = \frac{\|DF\|}{\|BA'\|}$. Ținînd seama de (1) avem $\frac{\|EF\|}{\|A'C\|} = \frac{\|DF\|}{\|BA'\|}$ sau $\frac{\|EF\|}{\|DF\|} = \frac{\|A'C\|}{\|BA'\|}$, iar de aici și din (2) avem $\frac{\|CA'\|}{\|A'B\|} = \frac{\|EP\|}{\|PB\|}$ ceea ce ne arată că $|A'P| \| |EC|$ sau $|AC| \| |QF|$. Analog pentru $|A'Q| \| |PF|$. **2.32.** Fig. 2.32. Fie M' intersecția lui PQ cu paralela dusă prin E la FD. Triunghiurile DBF și CBP sînt isoscele și au bazele paralele deci $\|FP\| = \|DC\| = \|CE\|$. Analog $\|BD\| = \|QE\| = \|BF\|$. $\triangle BFD \sim \triangle BPC$ de unde $\frac{\|FD\|}{\|PC\|} = \frac{\|BD\|}{\|BC\|} = \frac{\|QE\|}{\|QC\|} = \frac{\|EM'\|}{\|PC\|}$ ($\|EM'\| = \|FD\|$, $\|QC\| = \|BC\|$). Rezultă de aici $\|DF\| = \|EM'\|$, dar din enunț rezultă $\|DF\| = \|EM\|$ deci $\|EM'\| = \|EM\|$ și avînd aceeași direcție rezultă $M \equiv M'$.

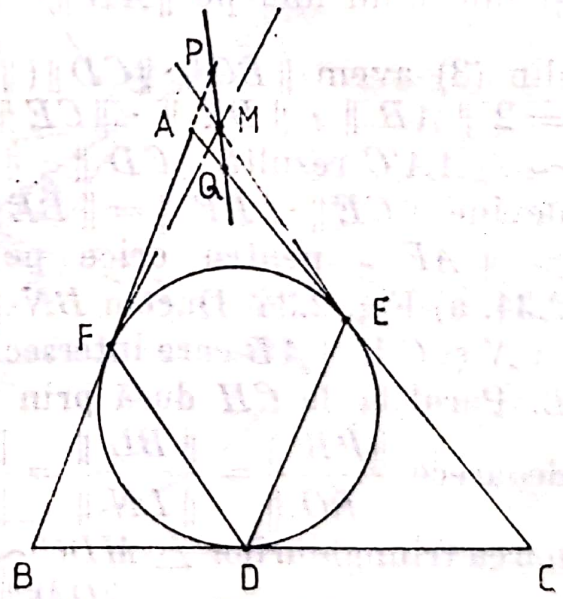


Fig. 2.32

2.33. Fie B' și C' picioarele înălțimilor. $\triangle CDE \sim \triangle BCB'$ de unde $\frac{\|DE\|}{\|BB'\|} = \frac{\|CD\|}{\|CB\|} =$

$= \frac{\| CE \|}{\| CB' \|}$ (1), iar din $\triangle EAF \sim \triangle CAC'$ avem $\frac{\| EF \|}{\| CC' \|} =$
$= \frac{\| AE \|}{\| AC \|} = \frac{\| AF \|}{\| AC' \|}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\frac{\| DE \|}{\| EF \|} =$
$= \frac{\| CD \|}{\| CB \|} \cdot \frac{\| AC \|}{\| AE \|}$ sau $\| AC \| \cdot \| CD \| \cdot \| EF \| = \| BC \| \cdot$
$\cdot \| DE \| \cdot \| AE \|$ (3), și $\frac{\| DE \|}{\| EF \|} = \frac{\| CE \|}{\| CB' \|} \cdot \frac{\| AC' \|}{\| AF \|}$ sau
$\frac{\| AC' \|}{\| CB' \|} = \frac{\| DE \| \cdot \| AF \|}{\| CE \| \cdot \| EF \|}$ sau aplicînd proprietățile pro-
porțiilor $\frac{\| AC' \| + \| CB' \|}{\| CB' \|} = \frac{\| DE \| \cdot \| AF \| + \| CE \| \cdot \| EF \|}{\| CE \| \cdot \| EF \|}$
de unde $\frac{\| AB \|}{\| CB' \|} = \frac{\| DE \| \cdot \| AF \| + \| CE \| \cdot \| EF \|}{\| CE \| \cdot \| EF \|}$ (4).
Avem $\triangle BCB' \sim \triangle AA'C$ de unde $\| CB' \| = \frac{\| BC \|^2}{2 \| AC \|}$ și ținînd
seama de (4) rezultă $\frac{\| BC \|^2}{2 \| AC \|} = \frac{\| AB \| \cdot \| CE \| \cdot \| EF \|}{\| DE \| \cdot \| AF \| + \| CE \| \cdot \| EF \|}$
și înlocuind aici pe $\| AB \| \cdot \| EF \| = \frac{\| BC \| \| DE \| \| EA \|}{\| CD \|}$.
din (3) avem $\| BC \| \cdot \| CD \| (\| DE \| \| AF \| + \| CE \| \| EF \|) =$
$= 2 \| AB \| \cdot \| DE \| \cdot \| CE \| \cdot \| AE \|$ (5). Din $\triangle CDE \sim$
$\sim \triangle AA'C$ rezultă $\| CD \| \cdot \| BC \| = 2 \| AC \| \| CE \|$ și (5)
devine $\| CE \| \cdot \| EF \| = \| DE \| (\| AE \| - \| AF \|) \cdot \| AE \| >$
$> \| AF \|$ pentru orice poziție a lui D pe $| BC |$.
2.34. a) Fig. 2.34. Ducem $BN \| CH$ care intersectează pe CA în N și $CM \| AB$ care intersectează pe BS în M și pe BN în L. Paralela la CH dusă prin P intersectează pe MN în Q deoarece $\frac{\| PR \|}{\| RQ \|} = \frac{\| BL \|}{\| LN \|} = \frac{\| CA \|}{\| CN \|} = \frac{\| HA \|}{\| HB \|}$. Din asemănarea triunghiurilor $\triangle MDC \sim \triangle ADB$ și $\triangle DBN \sim \triangle DSC$ rezultă $MN \| AS$. Din $\frac{\| QM \|}{\| QN \|} = \frac{\| MP \|}{\| PB \|} = \frac{\| CB' \|}{\| B'B \|}$ rezultă că Q împarte pe $| MN |$ într-un raport independent de H și $| BS |$. b) M este fix iar N variabil pe CA. Q descrie o paralelă la CA care intersectează pe MD în E așa încît

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{\| ME \|}{\| ED \|} = \frac{\| CB' \|}{\| B'B \|}$. c) M și N sînt fixe Q va descrie $MN \| AS$.

2.35. a) Avem $\widehat{HBC} \equiv \widehat{A_1AC} \equiv \widehat{A_1BC}$ deci $\| HA' \| = \| A'A_1 \|$. b) Rezultă $| B'C' | \| | B_1C_1 |$ și $| OA \perp | B_1C_1 |$,

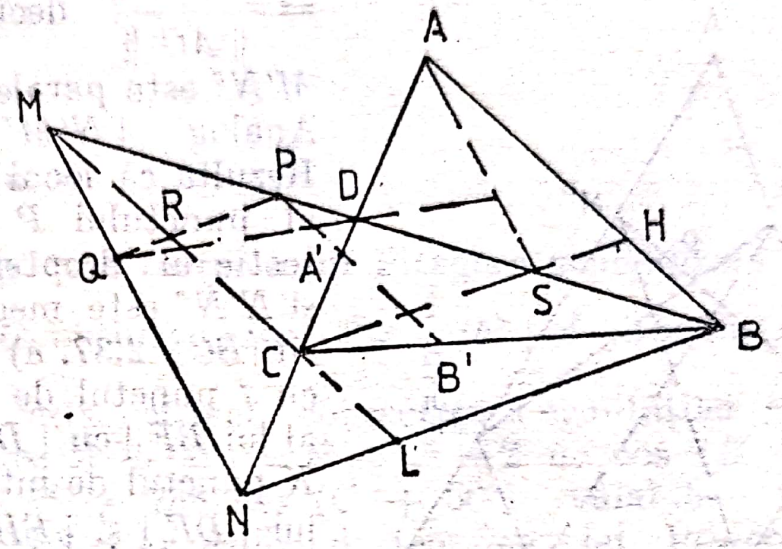


Fig. 2.34

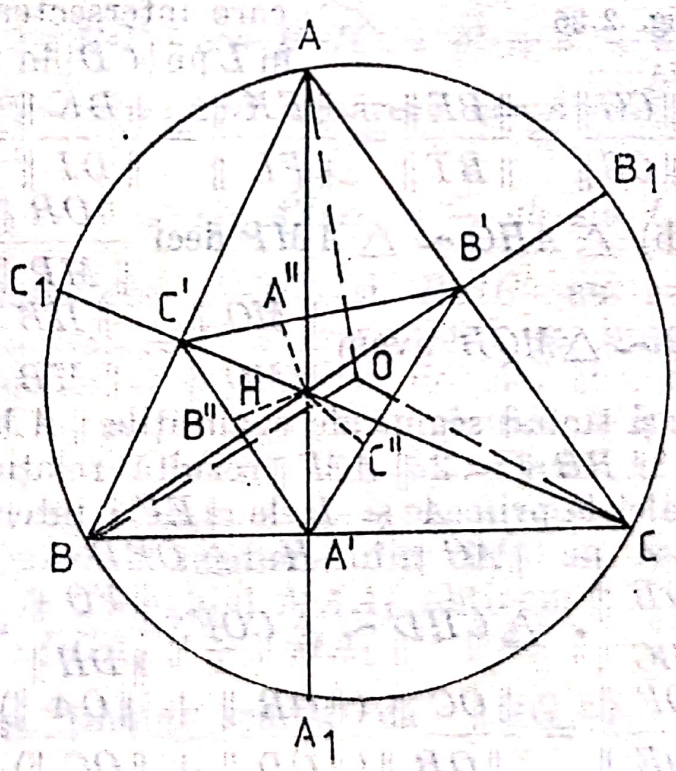


Fig. 2.35

A fiind mijlocul arcului B_1C_1. c) Avem $| OA | \perp | B'C' |$ și $\widehat{B''A''H} \equiv \widehat{HC'B'} \equiv \widehat{HAB'} \equiv \widehat{BAO}$ deci $| A''B'' | \| | AB |$. Analog pentru celelalte (Fig. 2.35). **2.36.** Fig. 2.36. $| AC | \|$

Scanned with OKEN Scanner

$\| |MM'|, |AB| \| |NN''|$ avem $\frac{\|AM'\|}{\|AB\|} = \frac{\|MC\|}{\|BC\|}$,

$\frac{\|AN''\|}{\|AC\|} = \frac{\|BN\|}{\|BC\|} \cdot \|MC\| = \|BN\|$ deci $\frac{\|AM'\|}{\|AB\|} = \frac{\|AN''\|}{\|AC\|}$ deci dreapta $M'N''$ este paralelă cu BC. Analog $|N'M''| \| |BC|$. Rezultă că locul geometric al punctului P de intersecție al dreptelor $M'M''$ și $N'N''$ este mediana laturii $|BC|$. **2.37.** a) Să notăm cu J punctul de intersecție al lui $BF|$ cu $|DE|$ și prin K punctul de intersecție al lui $|DE|$ și $|FH|$. Ducem prin J o paralelă la $|AD|$ care intersectează pe $|FH|$ în L pe $|CD|$ în S și pe $|AB|$ în T. Avem $\frac{\|CG\|}{\|CS\|} = \frac{\|BE\|}{\|BT\|} = \frac{\|FK\|}{\|FL\|} = \frac{\|DK\|}{\|DJ\|} = \frac{\|SL\|}{\|SJ\|} = \frac{\|IG\|}{\|IJ\|}$. b) $\triangle AHO \sim \triangle AMP$ deci $\frac{\|OR\|}{\|MP\|} = \frac{\|AR\|}{\|AM\|}$.

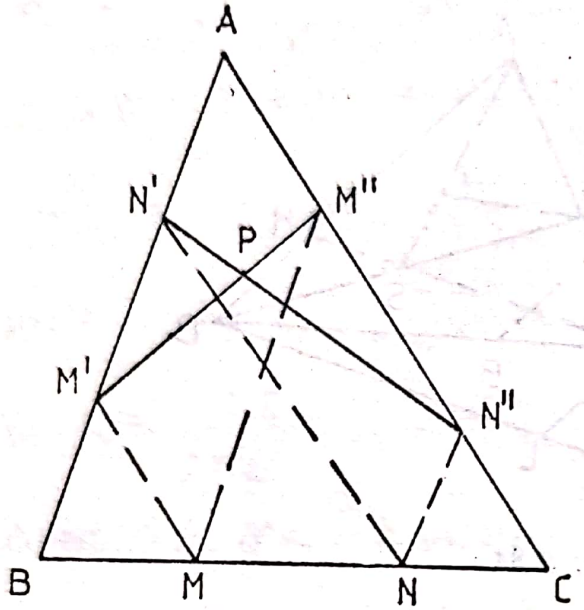


Fig. 2.36

Din $\triangle OHB \sim \triangle MQB$ avem $\frac{\|MO\|}{\|MQ\|} = \frac{\|HB\|}{\|MB\|}$. Adunînd aceste relații și ținînd seama de egalitățile $\|AM\| = \|MB\|$ și $\|AR\| + \|RB\| = 2\|AM\|$ rezultă relația din enunț. **2.38.** a) Paralelele prin A și D la $|EF|$ intersectează pe $|BD|$ în G și pe $|AC|$ în H. $\triangle OEB \sim \triangle BAG$ deci $\frac{\|EO\|}{\|AG\|} = \frac{\|OB\|}{\|BG\|}$, $\triangle CHD \sim \triangle COF$, $\frac{\|FO\|}{\|DH\|} = \frac{\|OC\|}{\|CH\|}$; de unde $\frac{\|OF\|}{\|OE\|} = \frac{\|OC\|(\|OB\| + \|OA\|)}{\|OB\|(\|OD\| + \|OC\|)} \cdot \frac{\|DH\|}{\|AG\|}$.

Din $\triangle OGA \sim ODH$ avem $\frac{\|DH\|}{\|AG\|} = \frac{\|OD\|}{\|OG\|}$ deci $\frac{\|OF\|}{\|OE\|} = \frac{\|OC\|\|OD\|(\|OB\| + \|OA\|)}{\|OA\|\|OB\|(\|OD\| + \|OC\|)}$. b) $\triangle CAB \sim \triangle CMP$,

Scanned with OKEN Scanner

de unde $\frac{\| CM \|}{\| CA \|} = \frac{\| MP \|}{\| AB \|}$, iar din $\triangle ADC \sim \triangle AQM$ avem $\frac{\| AM \|}{\| AC \|} = \frac{\| MQ \|}{\| CD \|}$, care adunate ne dau relația din enunț.

Capitolul 3

3.1. Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul AB_1C_1 obținem $\| B_1C_1 \|^2 = \frac{1}{9}(b^2+c^2-2bc\cos(A+60°))$. Afirmația este, atunci, consecință a egalităților $b^2 + c^2 - 2bc\cos(A+60°) = c^2 + a^2 - 2ac\cos(B+60°) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C+60°)$ valabilă în orice triunghi. **3.2.** a) Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată, avem $\| B'C' \|^2 = \| HB' \|^2 + \| HC' \|^2 - 2\| HB' \| \| HC' \| \cos \widehat{B'HC'} = b^2 + c^2 + 2bc\cos A = 2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2$ deoarece $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

b) $\sigma[A'HB'] = \frac{1}{2}ab\sin \widehat{A'HB'} = \frac{1}{2}ab\sin C = \sigma[ABC]$; la fel triunghiurile $A'HC'$ și $B'HC'$ au arii egale cu aria triunghiului ABC și rezultatul se impune. c) Din egalitatea ariilor triunghiurilor de mai sus, rezultă că H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$, deci $A'H$ trece prin mijlocul lui $|B'C'|$. **3.3.** Problema este înscrisă pentru a atrage atenția asupra necesității reținerii relației! **3.4.** Fie A_1 piciorul medianei din vîrful A. Aplicînd relația lui Stewart în triunghiul MAA_1, obținem $\| MG \|^2 \cdot \| AA_1 \| = \| MA \|^2 \cdot \| GA_1 \| + \| MA_1 \|^2 \cdot \| AG \| - \| AG \| \cdot \| GA_1 \| \cdot \| AA_1 \|$ și ținînd seama că $\| AG \| = \frac{2}{3}\| AA_1 \|$ și $\| GA_1 \| = \frac{1}{3}\| AA_1 \|$, rezultă $3\| MG \|^2 = \| MA \|^2 + 2\| MA_1 \|^2 - \frac{2}{3}\| AA_1 \|^3$. Utilizînd formula medianei pentru $|AA_1|$ în triunghiul ABC și pentru $\| MA_1 \|$ în

triunghiul MBC, relația precedentă se transformă în cea din enunț. Comentarii: 1) Din demonstrație se vede că relația rămîne valabilă pentru orice punct din spațiu; 2) Dacă M coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului, atunci relația devine $\| GO \|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$.

3.5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Deoarece $m(\widehat{GAC}) = m(\widehat{GC'A'})$ și $m(\widehat{GCA}) = m(\widehat{GA'C'})$, rezultă că triunghiurile AGC și $C'GA'$ sînt asemenea. Deducem, ținînd seama că $\| AG \| = \frac{2}{3} m_a$, $\frac{2m_a}{3 \| GC' \|} = \frac{b}{b'}$ (1). Notînd C_1 mijlocul laturii $| AB |$, folosind puterea punctului C_1 față de cercul circumscris, obținem $\| C_1C' \| \cdot \| C_1C \| = \frac{c^2}{4}$, de unde $\| C_1C' \| = \frac{c^2}{4m_c}$ și deci $\| GC' \| = \frac{m_c}{3} + \frac{c^2}{4m_c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{bm_c}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\frac{b}{b'} = \frac{4m_a m_c}{a^2 + b^2 + c^2}$. Cu două relații analoage obținem: $\frac{am_b}{a'm_c} + \frac{bm_c}{b'm_a} + \frac{cm_a}{c'm_b} = \frac{4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = 3$. **3.6.** Fie E și F mijloacele segmentelor $| AC |$ și $| BD |$. Pentru un punct M oarecare din planul patrulaterului (din spațiu) avem $\| MA \|^2 + \| MC \|^2 = 2 \| ME \|^2 + \frac{1}{2} \| AC \|^2$ și $\| MB \|^2 + \| MD \|^2 = 2 \| MF \|^2 + \frac{1}{2} \| BD \|^2$ astfel că relația de condiție din enunț se transcrie în $\| ME \|^2 - \| MF \|^2 = \frac{1}{4}(\| BD \|^2 - \| AC \|^2)$. Presupunînd distincte punctele E și F, rezultă că locul geometric al punctelor M care satisface condiția dată este o dreaptă perpendiculară pe EF (în spațiu — un plan perpendicular pe EF). În ipoteza că E și F coincid, existența unor puncte care să satisfacă condiția implică $\| BD \| = \| AC \|$ și prin urmare patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi; în acest caz orice punct satisface condiția. **3.7.** Folosind relația medianei pentru $| EF |$ în triunghiul ACF și în triunghiurile ABD

Scanned with OKEN Scanner

și BCD pentru $|AF|$ și $|CF|$ obținem: $4\|EF\|^2 = 2(\|AF\|^2+\|FC\|^2) - \|AC\|^2 = 2\left[\frac{1}{2}(\|AB\|^2+\|AD\|^2) - \frac{1}{4}\|BD\|^2 + \frac{1}{2}(\|BC\|^2+\|CD\|^2) - \frac{1}{4}\|BD\|^2\right] - \|AC\|^2 = \|AB\|^2+\|AD\|^2+\|BC\|^2+\|CD\|^2 - \|AC\|^2 - \|BD\|^2$. Patrulaterul este paralelogram dacă și numai dacă E și F coincid, deci dacă și numai dacă are loc relația din enunț. **3.8.** Conform problemei 1.1, ED este paralelă cu BC și relația rezultă din teorema lui Tales. Altfel: cu notații curente, se obține $\|BD\| = c\cos\frac{B}{2}$, $\|CE\| = b\cos\frac{C}{2}$ de unde deducem că $\frac{\|BD\|}{\|CE\|} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$. Teorema sinusului aplicată în triunghiul BIC conduce la aceeași valoare pentru raportul $\frac{\|BI\|}{\|CI\|}$. **3.9.** Fie k^2 puterea punctului O față de cele două cercuri. Atunci $\frac{\|OA\|\cdot\|OD\|}{\|OB\|\cdot\|OC\|} = \frac{\|OA\|k^2\|OA\|}{\|OC\|k\|OC\|} = \frac{\|OA\|^2}{\|OC\|^2}$ deoarece $\|OA\|\cdot\|OB\| = \|OC\|\cdot\|OD\| = k^2$; apoi $\frac{\|AD\|^2}{\|BC\|^2} = \frac{(\|OA\|+\|OD\|)^2}{(\|OB\|+\|OC\|)^2} = \frac{\left(\|OA\|+\frac{k^2}{\|OC\|}\right)^2}{(\|OC\|+k^2/\|OA\|)^2} = \frac{\|OA\|^2}{\|OC\|^2}$. **3.10.** Fie M mijlocul ipotenuzei $|AB|$. Atunci, pentru orice punct P din spațiu, are loc $\|PM\|^2 = \frac{1}{2}(\|PA\|^2+\|PB\|^2) - \frac{1}{4}\|AB\|^2 = \frac{1}{2}(\|PA\|^2+\|PB\|^2) - 2\|CM\|^2$. P satisface condiția din enunț dacă și numai dacă $\|PC\|^2 = \|PM\|^2 + 2\|CM\|^2$ din care deducem că P este în mod necesar simetricul lui C față de M. Evident că acest punct satisface condiția.

Scanned with OKEN Scanner

3.11. Notînd $\| BD \| = \| DC \| = a$, $\| AD \| = h$ rezultă $\| EC \| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\| AE \| = \frac{h^2}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\| DE \| = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\| EF \| = \frac{ah}{2\sqrt{a^2+h^2}}$. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului ADC tăiat de transversala BE obținem $\| AG \| = \frac{2h^3}{a^2+2h^2}$, $\| GD \| = \frac{a^2h}{a^2+2h^2}$ unde G este intersecția dreptelor AD și BE. Folosind aceeași teoremă pentru triunghiul AFD tăiat de transversala GE, deducem $\frac{\| AH \|}{\| HF \|} = \frac{4h^2}{a^2}$ unde H este intersecția dreptelor AF și BE. Prin urmare $\frac{\| AH \|}{\| HF \|} = \frac{\| AE \|^2}{\| EF \|^2}$. Deoarece într-un triunghi dreptunghic există un singur punct pe ipotenuză care o împarte într-un raport egal cu pătratul raportului lungimilor catetelor (anume piciorul înălțimii) concluzia se impune. **3.12.** Fiind dată constanta k, există două puncte M_1 și M_2 pe dreapta AB astfel încît $\frac{\| M_2A \|}{\| M_2B \|} = k = \frac{\| M_2A \|}{\| M_2B \|}$. Dacă M este un punct din plan astfel încît $\frac{\| MA \|}{\| MB \|} = k$ avem $\frac{\| MA \|}{\| MB \|} = \frac{\| M_1A \|}{\| M_1B \|} = \frac{\| M_2A \|}{\| M_2B \|}$ ceea ce arată că M_1 și M_2 sînt picioarele bisectoarelor unghiului AMB (reciproca teoremei bisectoarei), deci unghiul $\widehat{M_2MM_1}$ este drept, ceea ce arată că punctul M se află pe cercul de diametru $| M_1M_2 |$. Un raționament simplu arată că orice punct de pe acest cerc are proprietatea din enunț. *Observație.* Locul geometric al punctelor din spațiu cu proprietatea formulată este sfera de diametru $| M_1M_2 |$. **3.13.** a) Fie M_0 un punct astfel ca $\| M_0A_1 \|^2 + \| M_0A_2 \|^2 = k^2$. Notînd O mijlocul segmentului $| A_1A_2 |$ avem $\| M_0O \|^2 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\| A_1A_2 \|^2$, de unde rezultă că o condiție necesară pentru existența unui punct cu proprietatea cerută este $2k^2 \geqslant \| A_1A_2 \|^2$. Presupunînd această

condiție îndeplinită, rezultă că M_0 se află pe cercul de centru O și de rază $\sqrt{\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{4}\|A_1A_2\|^2}$. Este clar că orice punct de pe acest cerc satisface proprietatea. *Observație.* Locul geometric al punctelor din spațiu care satisface relația este o sferă. b) Fie A_1 și A_2 două puncte fixe, α_1, α_2 numere pozitive. Determinăm locul geometric al punctelor M pentru care $\alpha_1 \| MA_1 \|^2 + \alpha_2 \| MA_2 \|^2 = k^2$. Fie O punctul situat pe segmentul $|A_1A_2|$ astfel încît $\frac{\|OA_1\|}{\|OA_2\|} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Dacă M este cu proprietatea dorită, aplicînd relația lui Stewart în triunghiul MA_1A_2 obținem $\| MO \|^2 = \frac{k^2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}\|A_1A_2\|^2$. În condiția necesară $k^2 \geqslant \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\|A_1A_2\|^2$, locul geometric este un cerc de centru O. Pentru cazul a trei puncte A_1 A_2, A_3 notînd O_1 mijlocul segmentului A_1A_2, problema se reduce la găsirea locului geometric al punctelor M pentru care $2\| MO_1 \|^2 + \| MA_3 \|^2 = k^2 - \frac{1}{2}\| A_1A_2 \|^2$, deci, conform celor de mai sus, acest loc este un cerc. (Acest caz se poate rezolva direct, folosind relația lui Leibniz). „Reducînd" succesiv cîte un punct, problema generală se arată a fi echivalentă cu o problemă cuprinzînd o proprietate de forma $\alpha_1\| MB_1\|^2 + \alpha_2 \| MB_2 \|^2 = k_1^2$. **3.14.** Avem $\| AM \|^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$, $\| OM \|^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2$ de unde $\| AM \|^2 + \| OM \|^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + R^2 =$ constant. Rezultă că M descrie un cerc avînd centrul în mijlocul segmentului $|AO|$ și raza $\frac{1}{2}\sqrt{k^2 + R^2}$. b) Fie D mijlocul segmentului $|AO|$. Observînd că $\| DA_1 \| = \| DM \|$, deducem că piciorul A_1 al înălțimii din A descrie același cerc ca și mijlocul M al laturii $|BC|$. **3.15.** Paralela prin C la AB intersectează pe AN în D, iar paralela prin B la AC intersectează pe AM în E. Din

Scanned with OKEN Scanner

asemănarea triunghiurilor CND și ABN rezultă $\frac{\|CN\|}{\|BN\|} = \frac{\|CD\|}{\|AB\|}$, iar din asemănarea triunghiurilor BEM și CMA avem $\frac{\|CM\|}{\|BM\|} = \frac{\|AC\|}{\|BE\|}$. Deoarece triunghiurile ABE și ACD sînt asemenea deducem $\frac{\|CD\|}{\|BE\|} = \frac{\|AC\|}{\|AB\|}$. Din cele trei proporții obținem relația din enunț. **3.16.** Dacă $|AN|$ este simediana din A, este suficient să arătăm că $\frac{\|CN\|}{\|BN\|} = \frac{\|NF\|}{\|NE\|}$ E și F fiind proiecțiile lui N pe AB, respectiv $AC (N \in BC)$. Evident $\frac{\sigma[ANC]}{\sigma[ANB]} = \frac{\|CN\|}{\|BN\|} = \frac{\|AC\| \cdot \|NF\|}{\|AB\| \cdot \|NE\|}$ și utilizînd relația din problema precedentă, prima concluzie se impune. Fie M mijlocul laturii $|BC|$, C' simetricul punctului C, B' simetricul punctului B, M' simetricul punctului M față de bisectoarea din A. (evident $B' \in AC$, $C' \in AB$, punctele B', M', C' sînt coliniare). Atunci $B'C'$ și BC sînt antiparalele și M' este mijlocul segmentului $|B'C'|$. **3.17.** a) Dacă perpendicularele în A_1 pe BC etc., sînt concurente în punctul O, să zicem, atunci $\|A_1B\|^2 = \|OB\|^2 - \|OA_1\|^2$ etc. și relația se verifică. Suficiența se demonstrează astfel: Fie O intersecția perpendicularelor în A_1 pe BC și în B_1 pe AC, iar C' proiecția lui O pe AB. Atunci are loc: $\|A_1B\|^2 - \|A_1C\|^2 + \|B_1C\|^2 - \|B_1A\|^2 + \|C'B\|^2 - \|C_1A\|^2 = 0$ care împreună cu ipoteza conduce la $C' \equiv C_1$. b) Fie M, N, P proiecțiile punctelor A', B', C' pe dreptele BC, CA, AB. Condiția $\|BM\|^2 - \|CM\|^2 + \|CN\|^2 - \|NA\|^2 + \|PA\|^2 - \|PB\|^2 = 0$ se transcrie în $\|A'B\|^2 - \|A'C\|^2 + \|B'C\|^2 - \|B'A\|^2 + \|C'A\|^2 - \|C'B\|^2 = 0$, care exprimă o condiție necesară și suficientă ca perpendicularele în A' pe BC, în B' pe CA, în C' pe AB să fie concurente. Această relație fiind simetrică în tripletele (A, B, C) și (A', B', C') este echivalentă cu afirmația „perpendicularele din A pe $B'C'$, din B pe $C'A'$, din C pe $A'B'$ sînt concurente". c) Se aplică b). d) Deoarece $\|A_1B\| = \frac{ac}{b+c}$ etc., condiția de la a) se scrie $k(b-c)(c-a)(a-b)=0$,

Scanned with OKEN Scanner

k fiind un factor constant nenul, ceea ce impune concluzia.

3.18. Să observăm la început că, în baza problemei precedente, notînd prin A_2, B_2, C_2 simetricele picioarelor înălțimilor triunghiului ABC față de mijloacele laturilor respective, perpendicularele în A_2 pe BC etc. sînt concurente. Acum rămîne de a vedea că, în cadrul enunțului, aceasta este situația!

3.19. Alegînd punctul M pe arcul $\overset{\frown}{AC}$, notînd $m(\overset{\frown}{MC}) = 2\alpha$ și R raza cercului circumscris triunghiului ABC, găsim $\|MA\| = 2R \sin(B-\alpha)$, $\|MB\| = 2R \sin(A+\alpha)$ $\|MC = 2R \sin\alpha$ ceea ce conduce la $d_a = 2R \sin\alpha \sin(A+\alpha)$, $d_b = 2R \sin\alpha \sin(B-\alpha)$, $d_c = 2R \sin(A+\alpha) \sin(B-\alpha)$, $d_a' = 2R \sin^2(B-\alpha)$, $d_b' = 2R \sin^2(A+\alpha)$, $d_c' = 2R \sin^2\alpha$ și relația se verifică.

3.20. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC, I_c centrul cercului exînscris tangent laturii $|AB|$, C_1 și C_2 contactele acestor cercuri cu $|AB|$. Atunci $\|AC_1\| = \|BC_2\|$. Prin urmare $\dfrac{r}{\rho} = \dfrac{\|AC_1\| \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\|BC_2\| \operatorname{tg}\frac{\pi - B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Aplicînd acest rezultat triunghiurilor AMC și BMC deducem $\dfrac{r_1}{\rho_1} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{AMC}}{2}$ și $\dfrac{r}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{BMC}}{2}$ și deoarece $m(\widehat{AMC}) + m(\widehat{BMC}) = \pi$, rezultă relația din enunț. Din demonstrație se vede că problema poate fi generalizată: Fie M_i, $i=1, 2, \ldots, n$, puncte pe latura $|AB|$ a triunghiului ABC, r_i lungimea razei cercului înscris triunghiului $CM_{i-1}M_i$ și ρ_i lungimea razei cercului exînscris tangent laturii $|M_{i-1}M_i|$, cu $M_{n+1} \equiv B$, $M_0 \equiv A$. Atunci $\dfrac{r_1 r_2 \ldots r_{n+1}}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n+1}} = \dfrac{r}{\rho}$.

3.21. Fie $ABCD$ patrulater convex înscris în cerc și M un punct pe arcul $\overset{\frown}{BC}$, d_1, d_2, d_3, d_4 distanțele la laturile $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$ și δ_1, δ_2 distanțele la diagonalele AC și BD. Rezultă $\dfrac{\text{Aria}(MBC)}{\text{Aria}(MAC)} = \dfrac{\|BM\| \cdot \|BC\|}{\|AM\| \cdot \|AC\|} = \dfrac{d_2 \cdot \|BC\|}{\delta_1 \cdot \|AC\|}$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $\frac{\|BM\|}{\|AM\|} = \frac{d_2}{\delta_1}$ (1) și $\frac{\text{Aria}\,(MBD)}{\text{Aria}\,(MAD)} = \frac{\|BM\| \cdot \|BD\|}{\|MA\| \cdot \|AD\|} =$ $= \frac{\|BD\| \cdot \delta_2}{\|AD\| \cdot d_4}$ de unde $\frac{\|BM\|}{\|MA\|} = \frac{\delta_2}{d_4}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\delta_1 \cdot \delta_2 = d_2 d_4$. *Soluția II*: Fie M_1, M_2, M_3, M_4 proiecțiile punctului M pe AB. BC, CD, DA. Se observă că triunghiurile M_1MM_2 și M_4MM_3 sînt asemenea, de unde se obține $d_1 d_3 = d_2 d_4$. **3.22.** Fie E punctul de pe arcul $\overset{\frown}{ABC}$ astfel încît $\|AE\| = \|BC\|$. Atunci BE este paralelă cu AC și triunghiurile AEC și ABC au aceeași arie. Deci aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu aria lui $AECD$. Notînd cu α măsura unghiului diagonalelor AC și BD rezultă aria $[ABCD] =$ $= \frac{\|AC\| \cdot \|BD\| \sin\alpha}{2}$. Pe de altă parte, aria $(AECD) =$

$$= \text{aria}\,(EAD) + \text{aria}\,(ECD) = \frac{\|AE\| \cdot \|AD\| \sin \widehat{EAD}}{2} +$$

$$+ \frac{\|EC\| \cdot \|CD\| \sin \widehat{ECD}}{2} = \left(\frac{\|BC\| \cdot \|AD\| + \|AB\| \cdot \|CD\|}{2}\right) \sin\alpha$$

deoarece unghiurile $\widehat{EAD}$ și $\widehat{ECD}$ sînt suplementare și unul din ele are măsura α. *Soluția II*: Fie o inversiune de centru (pol) D și putere k^2 care transformă cercul într-o dreaptă pe care se află transformatele punctelor A, B, C fie ele A', B', C'. Atunci $\|A'C'\| = \|A'B'\| + \|B'C'\|$ (1). Din asemănarea triunghiurilor DAB și $DB'A'$ obținem $\|A'B'\| = \frac{\|AB\| \|DA'\|}{\|DB\|}$ și cum $\|DA\| \cdot \|DA'\| = k^2$ găsim $\|A'B'\| = \frac{k^2 \cdot \|AB\|}{\|DB\| \cdot \|DA\|}$.

Analog $\|B'C'\| = \frac{k^2 \cdot \|BC\|}{\|DB\| \cdot \|DC\|}$ și $\|A'C'\| = \frac{k^2 \cdot \|AC\|}{\|DA\| \cdot \|DC\|}$.

Înlocuind în (1) obținem relația lui Ptolemeu. *Observație*: Condiția din enunț este necesară și suficientă pentru ca patrulaterul să fie inscriptibil. Dacă patrulaterul convex $ABCD$ nu este inscriptibi latunci are loc $\|AB\| \cdot \|CD\| + \|BC\| \cdot$ $\cdot \|DA\| > \|AC\| \cdot \|BD\|$. **3.23.** Folosind notațiile din soluția a doua a problemei precedente și aplicînd relația lui Stewart în triunghiul $DA'C'$ avem $\|DA'\|^2 \cdot \|B'C'\| + \|DC'\|^2 \cdot \|A'B'\| =$ $= \|DB'\|^2 \cdot \|A'C'\| + \|A'B'\| \cdot \|B'C'\| \cdot \|A'C'\|$, care capătă

Scanned with OKEN Scanner

forma $\frac{k^6\|BC\|}{\|DA\|\cdot\|DB\|\cdot\|DC\|}+\frac{k^6\cdot\|AB\|}{\|DC\|\cdot\|DA\|\cdot\|DB\|}=$
$=\frac{k^6\|AC\|}{\|DB\|\cdot\|DA\|\cdot\|DC\|}+\frac{k^6\cdot\|AB\|\cdot\|BC\|\cdot\|AC\|}{\|DA\|\cdot\|DB\|\cdot\|DC\|}$ de unde după simplificări evidente se obține relația din enunț. **3.24.** Afirmația a) implică afirmațiile b), c) deoarece în ipoteza a) rapoartele respective au valoarea 2. Pentru a, b, c numere pozitive au loc inegalitățile $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geqslant 6$, $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$, egalitățile având loc dacă și numai dacă $a=b=c$. Observînd că $\frac{\|AI\|}{\|IA_1\|}=\frac{b+c}{a}$ etc., rezultă că fiecare din afirmațiile b), c) implică afirmația a). **3.25.** a) Folosind relația lui Stewart, cu notații frecvente avem: $\|AD\|^2=(1-k)b^2+$ $+kc^2-k(1-k)a^2$ și inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $(1-k)b^2+kc^2-k(1-k)a^2<b^2(1-k)^2+$ $+k^2c^2+2k(1-k)bc$ care după calcule simple se transformă în inegalitatea echivalentă $b^2+c^2-a^2-2bc<0$, care este adevărată în orice triunghi. b) Dacă $|AD|$ este bisectoare, atunci $k=\frac{b}{b+c}$ și conform a) $\|AD\|<\frac{2bc}{b+c}$ care este echivalentă cu inegalitatea cerută. **3.26.** Fie B_1 proiecția lui B pe tangenta în C' și C_1 proiecția lui C pe tangenta în B'. Din trapezele $BB_1C'C$ și $CC_1B'B$ deducem $\|DE\|=\frac{\|BB_1\|\cdot b+\|CC'\|\cdot c}{b+c}$, $\|DF\|=\frac{\|CC_1\|\cdot c+\|BB'\|\cdot b}{b+c}$ de unde $\frac{\|DE\|}{\|DF\|}=\frac{\|BB_1\|\cdot b+2Rc}{\|CC_1\|\cdot c+2Rb}$. Dar $\|B'C\|=\operatorname{actg}A$ și din triunghiurile congruente BB_1C' și CC_1B' deducem $\|BB_1\|=\|CC_1\|=\frac{a\cos^2A}{\sin A}$. Prin urmare $\frac{\|DE\|}{\|DF\|}=$
$=\frac{ab\cos^2A+ac}{ac\cos^2A+ab}=\frac{b\cos^2A+c}{c\cos^2A+b}$. **3.27.** a) Se observă că $\frac{\text{aria}[BPC]}{\text{aria}[BAC]}=\alpha$ și încă două relații analoage, care prin adunare impun concluzia. b) Notînd $\frac{\|BA_1\|}{\|CA_1\|}=x$, teorema

Scanned with OKEN Scanner

lui Menelaus aplicată triunghiului AA_1C tăiat de transversala BPB_1 conduce la $\frac{x}{x+1} \cdot y \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} = 1$. Cu notații evidente obținem și egalitățile $\frac{y}{y+1} \cdot z \cdot \frac{1-\beta}{\beta} = 1$, $\frac{z}{z+1} \cdot x \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} = 1$. Sistemul constituit are soluția $x = \frac{\gamma}{\beta}$, $y = \frac{\alpha}{\gamma}$, $z = \frac{\beta}{\alpha}$. c) Ținînd seama de rezultatele de la a) și b), aplicînd relația lui Stewart în triunghiul MAA_1 obținem: $\|MP\|^2 = \alpha\|MA\|^2 + (1-\alpha)\|MA_1\|^2 - \alpha(1-\alpha)\cdot\|AA_1\|^2$; aceeași relație aplicată în triunghiul ABC pentru AA_1 conduce la $\|AA_1\|^2 = \frac{\gamma}{1-\alpha}\|AC\|^2 + \frac{\beta}{1-\alpha}\|AB\|^2 - \frac{\beta\gamma}{(1-\alpha)^2}\|BC\|^2$, iar în triunghiul MBC pentru MA_1 ne dă $\|MA_1\|^2 = \frac{\gamma}{1-\alpha}\|MC\|^2 + \frac{\beta}{1-\alpha}\|MB\|^2 - \frac{\beta\gamma}{(1-\alpha)^2}\|BC\|^2$. Din aceste trei relații se obține egalitatea din enunț. **3.28.** Presupunem că proiecțiile punctelor D și C pe baza AB, fie ele D' și C' sînt în interiorul segmentului $|AB|$. Notînd $\|DC\| = a$, $\|AD'\| = u$, $\|C'B\| = v$; utilizînd teorema lui Pitagora obținem $\frac{\|AC\|^2 - \|BD\|^2}{\|AD\|^2 - \|BC\|^2} = \frac{u+v+2a}{u+v}$ care este și valoarea raportului $\frac{\|AB\| + \|CD\|}{\|AB\| - \|CD\|}$. Pentru cei doi membri ai celeilalte egalități propuse se găsește aceeași expresie $2a^2 + 2h^2 + 2au + 2av + u^2 + v^2$. **3.29.** Fie A' proiecția lui A pe baza BC, D' proiecția lui D pe aceasta. Patrulaterul $BA'FA$ este înscris în cercul de diametru $|AB|$, iar patrulaterul $BD'ED$ este înscris în cercul de diametru $|BD|$. Scriind puterea punctului C față de aceste cercuri găsim $\|CF\|\|CA\| = \|CA'\|\|CB\|$ și $\|CE\|\|CD\| = \|CD'\|\|CD\|$ din care, prin scădere, se obține relația dorită, deoarece $\|AD\| = \|A'D'\|$. **3.30.** a) În triunghiul ACM, mediana $|CB|$ are lungimea jumătate din lungimea laturii corespunzătoare $|AM|$; rezultă că triunghiul este dreptunghic în C și relația este impusă de teorema lui Pitagora. b) Unghiurile triunghiului APC au măsurile 30°, 105° și res-

Scanned with OKEN Scanner

pectiv 45°. Aplicînd relaţia sinusurilor găsim $\| CP \| = \frac{a}{2} \sin 75°$, $\| AP \| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sin 75°$ şi observînd că $\|PB\| = \| PC \|$ afirmaţia se verifică. c) Cu formula $S = pr$ (notaţii obişnuite) rezultă $r = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$. d) Se observă că $\|NB\| = \|NC\| = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, iar $AN = a(1 + \sqrt{3})$ şi relaţia se verifică, ultima afirmaţie din enunţ fiind evidentă (şi folosită deja). **3.31.** a) Se foloseşte relaţia lui Stewart cu observaţia că $\| BP \| = \frac{k}{k+1} a$, $\| PC \| = \frac{1}{k+1} a$. b) Dacă $|AP|$ este înălţimea din A avem $\| BP \|^2 - \| PC \|^2 = c^2 - b^2$ şi cu expresiile anterioare se deduce $k = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2}$. c) Pentru mediană $k = 1$, iar pentru bisectoare $k = \frac{c}{b}$. **3.32.** a) Folosind faptul că înălţimile triunghiului ABC sînt bisectoare ale unghiurilor triunghiului ortic $A'B'C'$, deducem că triunghiul $A'B'B''$ este isoscel şi de aici concluzia. b) Perimetrul triunghiului $A'B'C'$ este, ţinînd seama de a), egal cu lungimea segmentului $\| B''C'' \|$, în vreme ce perimetrul triunghiului $A'MN$ este lungimea liniei frînte $C''MNB''$. c) Constatăm cu uşurinţă că patrulaterele $AB'A'C''$ şi $AA'C'B''$ sînt inscriptibile. Scriind puterea punctului I faţă de cercurile circumscrise acestora obţinem egalităţile din enunţ. **3.33.** a) Patrulaterele $APMC$ şi $BPMD$ sînt inscriptibile. Ţinînd seama că $\mathrm{m}(\widehat{PAM}) + \mathrm{m}(\widehat{PBM}) = 90°$, obţinem că triunghiul DPC este dreptunghic în P. Rămîne să aplicăm teorema înălţimii. b) Tangentele dintr-un punct exterior unui cerc la acesta au aceeaşi lungime şi concluzia este o consecinţă. c) Deoarece $\frac{\| MC' \|}{\| MD' \|} = \frac{\| AC' \|}{\| BD' \|}$; rezultă că MN (care este paralelă la bazele trapezului $ABD'C'$) trece prin intersecţia diagonalelor $| AD' |$ şi $| BC' |$ şi proprietatea este cunoscută (vedeţi 1.6.). **3.34.** a) $|AD|$ fiind înălţime în triunghiul dreptunghic MAB, deducem $\widehat{AMB} \equiv \widehat{PAB}$, iar din patrulaterul inscrip-

Scanned with OKEN Scanner

tibil $APBQ$ obținem $\widehat{PAB} \equiv \widehat{PQB}$. b) $m(\widehat{PMA}) + m(\widehat{NQP}) = 180°$. c) Puterea punctului M față de cercul dat este $\|MA\|^2 = \|MP\| \|MB\|$, iar puterea punctului N este $\|NA\|^2 = \|NQ\| \|NB\|$ și deci $\|MP\| \|MB\| - \|NQ\| \|NB\| = \|MA\|^2 - \|NA\|^2 = (\|MB\|^2 - \|AB\|^2) - (\|NB\|^2 - \|AB\|^2) = \|MB\|^2 - \|NB\|^2$. **3.35.** a) Patrulaterul $CIMA'$ este inscriptibil, deoarece $\widehat{MA'I} \equiv \widehat{MCI}$; rezultă $\widehat{MIA'} \equiv \widehat{MCA'}$ și cum $\widehat{MCA'} \equiv \widehat{BAA'}$ deducem $\widehat{MIA'} \equiv \widehat{BAA'}$, ceea ce arată că IM este paralelă cu AB. Consultînd patrulaterul $CB'QI$, deducem la fel că IQ este paralelă cu AB, astfel că MQ trece prin I. Analog, NR și PS trec prin I. b) Să remarcăm, la început că AA' și $B'C'$ sînt perpendiculare și la fel $A'B'$ și CC', respectiv BB' și $A'C'$. Cum, de exemplu $A'B'$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AA'C}$, rezultă $\|A'B\| = \|A'I\| = \|A'C\|$ și analoagele, precum și $\|IM\| = \|BM\|$, $\|IN\| = \|CN\|$ și analoagele. Deoarece patrulaterul $BA'NI$ este inscriptibil, aplicînd relația lui Ptolemeu obținem $\|IA'\| \|BN\| = \|IN\| \|BA'\| + \|IB\| \|A'N\|$, iar din patrulaterul $CIMA'$ deducem $\|IA'\| \cdot \|CM\| = \|IM\| \|A'C\| + \|IC\| \cdot \|MA'\|$, relații care prin adunare, ținînd seama de egalitățile menționate mai sus, conduc la: $\|BA'\| (\|BN\| + \|CM\|) = \|BA'\| (\|IM\| + \|IN\|) + \|IB\| \|A'N\| + \|IC\| \|MA'\|$. Din asemănarea triunghiurilor $NA'C$ și ABI, respectiv MBA' și ACI obținem $\|A'N\| = \dfrac{\|IB\| \|A'B\|}{\|AB\|}$ și respectiv $\|MA'\| = \dfrac{\|A'B\| \|IC\|}{\|AC\|}$ care înlocuite în egalitatea de mai sus conduc la $\|BN\| + \|CM\| = \|IM\| + \|IN\| + \dfrac{\|IB\|^2}{\|AB\|} + \dfrac{\|IC\|^2}{\|AC\|}$ din care se obține relația din enunț, deoarece $\|IM\| = \|BM\|$ și $\|IN\| = \|NC\|$. **3.36.** Fie $ABCD$ patrulaterul convex pentru care segmentul $|MN|$, M și N fiind miiloacele laturilor $|AB|$ și $|CD|$, are ca lungime semisuma lungimilor laturilor $|AD|$ și $|BC|$. Paralela prin M la BC intersectează diagonala $|AC|$ în mijlocul acesteia, P. Atunci $|PN|$ este linie

mijlocie în triunghiul ACD. Rezultă $\|MP\| + \|PN\| = \frac{1}{2}(\|AD\| + \|BC\|) = \|MN\|$, ceea ce arată că punctele M, N, P sînt coliniare și deci MN este paralelă cu BC și atunci și cu AD. **3.37.** Exprimînd puterea punctului A' față de cercul circumscris triunghiului ABC, avem $m_a\|A'A''\| = \frac{a^2}{4}$ deci $d_a = m_a + \frac{a^2}{4m_a}$ și prin urmare $m_a d_a = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$ și relația se justifică, ținînd seama că $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. **3.38.** Presupunem că P se află pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ pe care nu se află D. Dacă M este mijlocul laturii $|BC|$, formula medianei în triunghiul BPC furnizează relația $4\|PM\|^2 = 2(\|PB\|^2 + \|PC\|^2) - a^2$, iar aplicată în triunghiul DPA conduce la $4\|PM\|^2 = 2(\|PA\|^2 + \|PD\|^2) - 3a^2$. Prin urmare are loc $\|PA\|^2 = \|PB\|^2 + \|PC\|^2 - \|PD\|^2 + a^2$ și a doua relație din enunț devine echivalentă cu $\|PB\| + \|PC\| = \|PD\|$ care este adevărată (vedeți 1.27). **3.39.** a) Unghiurile $\widehat{FGC}$ și $\widehat{FBC}$ sînt congruente, fiecare fiind congruent cu unghiul $\widehat{ECA}$. b) Triunghiul GAC este isoscel, $\|BA\| = \|CA\|$ și în definitiv au loc egalitățile $\|AG\| = \|AB\| = \|AC\| = \|AF\|$, ceea ce arată că punctele C și B se află pe cercul de diametru $|FG|$. c) Triunghiurile AME și CMA sînt asemenea, de unde rezultă $\|AM\|^2 = \|ME\|\|MC\|$. Pe de altă parte are loc $\|MB\|^2 = \|ME\| \cdot \|MC\|$, astfel că M este mijlocul segmentului $|AB|$. Acum relațiile cerute se demonstrează fără dificultate. **3.40.** Cercul de diametru $|A_1A_2|$ conține punctele care au raportul distanțelor la punctele B, C egal cu $\frac{c}{b}$, prin urmare dacă cercurile de diametre $|A_1A_2|$ și $|B_1B_2|$ au punctul comun P, atunci $\frac{\|PB\|}{\|PC\|} = \frac{c}{b}$ și $\frac{\|PC\|}{\|PA\|} = \frac{a}{c}$ din care rezultă $\frac{\|PB\|}{\|PA\|} = \frac{a}{b}$ care arată că punctul P se află pe cercul de diametru $|C_1C_2|$. Deoarece cele trei cercuri au o coardă comună rezultă că centrele lor sînt coliniare. **3.41.** a) Din ipoteză

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $\frac{\|MP\|}{\|AB\|}=\frac{\|MC\|}{\|AC\|}$ deci $\|MP\|^2=\frac{\|MC\|^2}{\|AC\|^2}\|AB\|^2$, $\frac{\|MQ\|}{\|DC\|}=\frac{\|AM\|}{\|AC\|}=\frac{\|AC\|-\|MC\|}{\|AC\|}$ de unde $\|MQ\|^2=$ $=\frac{(\|AC\|-\|MC\|)^2}{\|AC\|^2}\|DC\|^2$ și prin urmare $\|MP\|^2+\|MQ\|^2=$ $=\frac{\|MC\|^2}{\|AC\|^2}(\|AB\|^2+\|DC\|^2)-2\frac{\|MC\|}{\|AC\|}\cdot\|DC\|^2+\|DC\|^2$. Notînd $\frac{\|MC\|}{\|AC\|}=y$, rezultă $\|MP\|^2+\|MQ\|^2=y^2(\|AB\|^2+$ $+\|DC\|^2)-2y\cdot\|DC\|^2+\|DC\|^2$. Minimul expresiei, evaluat după cunoștințele asupra trinomului de gradul al doilea, se dovedește a fi $\frac{\|AB\|^2\cdot\|AC\|^2}{\|AB\|^2+\|DC\|^2}$ realizat pentru $\|MC\|=\frac{\|DC\|^2\|AC\|}{\|AB\|^2+\|DC\|^2}$. b) Fie N mijlocul segmentului $|PQ|$. Cînd M coincide cu C, punctul N coincide cu mijlocul E al segmentului $|DC|$, iar cînd M coincide cu A, N coincide cu mijlocul F al segmentului $|AB|$. Fie S și R mijloacele segmentelor $|QB|$ și, respectiv, $|QC|\cdot$ $\cdot|NR|$ și $|NS|$ sînt linii mijlocii în triunghiurile PQC și BQP, deci S, N, R sînt coliniare. $|FS|$ și $|ER|$ sînt linii mijlocii în triunghiurile ABQ și DCQ. Cu acestea deducem $\frac{\|RE\|}{\|RN\|}=\frac{\|QD\|}{\|PC\|}$; $\frac{\|FS\|}{\|SN\|}=\frac{\|AQ\|}{\|BP\|}$ și cum $\frac{\|BP\|}{\|PC\|}=\frac{\|AM\|}{\|MC\|}$, $\frac{\|AM\|}{\|MC\|}=\frac{\|AQ\|}{\|QD\|}$ deducem $\frac{\|RE\|}{\|RN\|}=\frac{\|FS\|}{\|SN\|}$ care, vizavi de congruența $\widehat{NRE}\equiv\widehat{NSF}$, arată că triunghiurile NRE și NSF sînt asemenea, prin urmare $\widehat{RNE}\equiv\widehat{SNF}$. Rezultă că punctele F, N, E, sînt coliniare, așadar locul geometric al punctului N este segmentul $|FE|$. **3.47.** a) Teorema bisectoarei se scrie $\frac{\|AD\|}{\|DC\|}=\frac{\|AB\|}{\|BC\|}=\frac{\|AB\|}{\|CE\|}$ rezultă $\triangle ADB\sim\triangle DCE$ deci $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{EDC})$ (fig. 3.47).

Scanned with OKEN Scanner

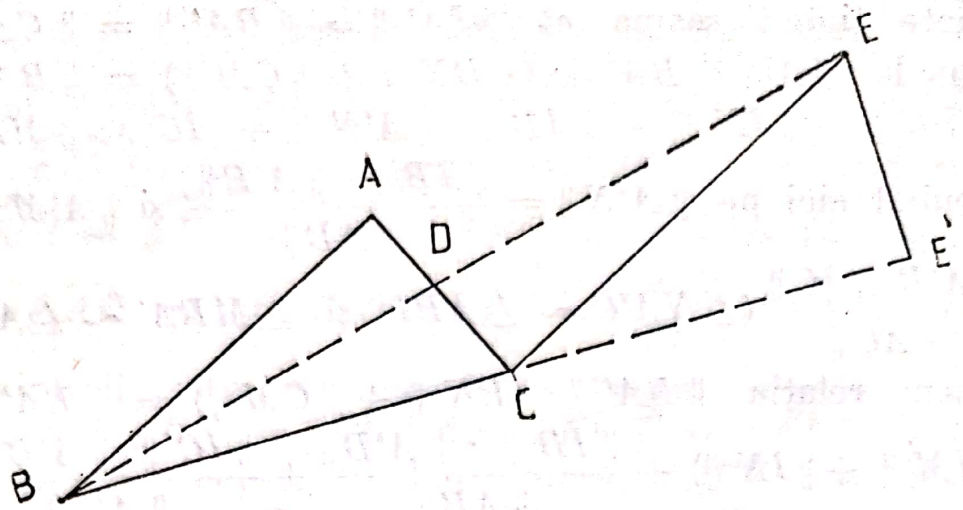


Fig. 3.47

b) $\|CE\|=\|BC\|$ și $m(\widehat{ECE'})=m(\widehat{ABC})$ deci $\triangle CEE'\equiv\triangle ABC$. c) Se ridică la pătrat rapoartele din teorema bisectoarei și se scrie și teorema lui Pitagora. d) $\|AE\|^2 = \|AC\|^2 + \|CE\|^2 = \|AC\|^2 + \|BC\|^2 + 2\|AC\|^2 + \|AB\|^2$. **3.48.** Din $\|AA_1\|^2 + \|BB_1\|^2 + \|CC_1\|^2 = \text{const.}$ rezultă $\|AB\|^2 + \|BC\|^2 + \|CA\|^2 = \text{const.}$ deci $\|AB\|^2 + \|CA\|^2 = \text{const.}$ Fie M proiecția lui H pe AA_1 și A', B' și C' picioarele înălțimilor. $\triangle AMB \sim \triangle ACA_1$ de unde $\dfrac{\|AM\|}{\|AC\|} = \dfrac{\|AB'\|}{\|AA_1\|}$ deci $\|AM\| \cdot \|AA_1\| = \|AC\| \cdot \|AB'\| =$

$= \|AA_1\|^2 - \dfrac{\|BC\|^2}{4}$, $\|AM\| = \|AA_1\| - \dfrac{\|BC\|^2}{4\|AA_1\|} = \text{const.}$

deci $\|A_1M\| = \text{const.}$ Locul geometric este un cerc cu centrul în A_1. **3.49.** a) Punctele M, I, Q sînt coliniare. Într-adevăr observăm că patrulaterul $CB'AI$ este inscriptibil, $m(\widehat{QB'I}) =$ $= m(\widehat{QCI})$ $(\widehat{AC'} \equiv \widehat{BC'})$ și $|IQ| \| |AB|$. Patrulaterul $CIMA'$ este inscriptibil $m(\widehat{A'MC}) = m(\widehat{A'IC})$, $m(\widehat{IA'C}) = m(\widehat{ABC})$, $|IM| \| |AB|$ (2). Deci (1) și (2) rezultă că I, M, Q sînt concurente. Analog pentru N, I, R și P, I, S deci MQ, NR și PS sînt concurente în I. b) Patrulaterele $BA'NI$ și $CIMA'$ sînt inscriptibile, $m(\widehat{BIA'}) = m(\widehat{BNA'})$, $m(\widehat{A'MC}) = m(\widehat{A'IC})$. Teorema lui Ptolemeu ne dă $\|IA'\| \cdot \|BN\| = \|IN\| \cdot \|BA'\| + \|IB\| \cdot \|A'N\|$ și $\|IA'\| \cdot \|CM\| = \|IM\| \cdot \|A'C\| + \|IC\| \cdot \|MA'\|$ care

adunate ținînd seama că $\| IA' \| = \| BA' \| = \| CA'' \|$ conduc la relația $\| BA' \| \cdot (\| BN \| + \| CM \|) = \| BA \| \cdot (\| IM \| + \| IN \|) + \| IB \| \cdot \| A'N \| + \| IC \| \cdot \| MA \|$. Înlocuind aici pe $\| A'N \| = \frac{\| IB \| \cdot \| A'B \|}{\| AB \|}$ și $\| A'M \| = \frac{\| A'B \| \| IC \|}{\| AC \|}$ ($\triangle NA'C \sim \triangle ABI$ și $\triangle MBA' \sim \triangle ACI$) obținem relația $\| BA' \| \cdot (BN \| + \| CM \|) = \| BA' \| \cdot (\| IM \| + \| IN \|) + \frac{\| IB \|^2 \cdot \| A'B \|}{\| AB \|} + \frac{\| IC \|^2 \| A'B \|}{\| AC \|}$.

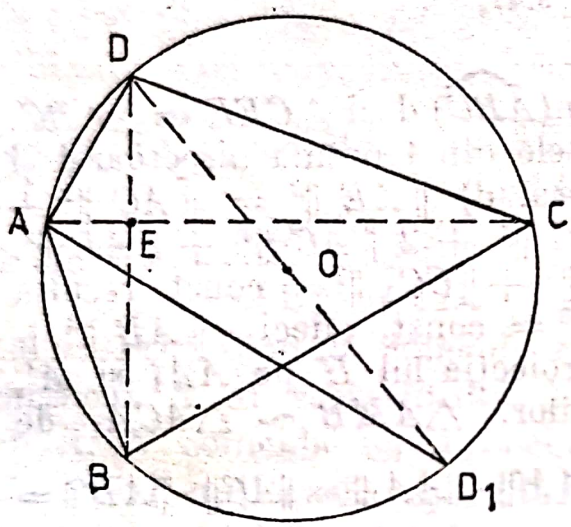


Fig. 3.50

Dar $\| IM \| = \| BM \|$ și $\| IN \| = \| NC \|$ de unde relația din enunț. **3.50.** Fie E punctul de intersecție al diagonalelor și D_1 punctul diametral opus lui D (fig. 3.50) $\triangle CED \sim \triangle DAD_1$ deci $\frac{\| DE \|}{\| AD \|} = \frac{\| DC \|}{\| DD_1 \|}$ de unde $\| AD \| \cdot \| DC \| = 2R \| DE \|$. Analog găsim că $\| AB \| \| BC \| = 2R \| EB \|$. Relația din enunț se scrie $\| AB \| \cdot \| BC \| - \| AB \| \| CD \| - \| AD \| \cdot \| BC \| + \| AD \| \| CD \| = 2R \| DB \| - (\| AB \| \cdot \| CD \| + \| BC \| \cdot \| AD \|) = 2R \| BD \| - \| AC \| \cdot \| BD \|$ conform teoremei lui Ptolemeu. **3.51.** a) Din triunghiurile dreptunghice PBC, PCA, PBD și PAD rezultă prima egalitate. $EGFN$ paralelogram și într-un paralelogram suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor, de unde și egalitatea a doua. b) Dacă notăm prin I mijlocul diagonalei $|AC|$, din triunghiul dreptunghic GIH, ținînd seama că $\| GI \| = \frac{1}{2} \| AB \|$ și $\| IN \| = \frac{1}{2} \| CD \|$ rezultă relația cerută. c) Din teorema lui Ptolemeu avem $\| AC \| \cdot \| BD \| = \| AB \| \cdot \| CD \| + \| AD \| \cdot \| BC \|$. Ținînd seama de această teoremă, efectuînd calculele în primul

Scanned with OKEN Scanner

membru se ajunge la egalitatea cerută. **3.52.** a) Fie F punctul în care cercul circumscris triunghiului DAE retaie dreapta DC. Avem $\widehat{EAD} \equiv \widehat{EFC}$ și $m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{EBC}) = 180°$ deci patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil. b) $\widehat{AOI} \equiv \widehat{AEI} \equiv \widehat{BJC} \equiv \widehat{BEC}$ și $\widehat{AID} \equiv \widehat{CFJ} \equiv \widehat{JBC}$ deci $\triangle ADI \sim \triangle CJB$ și $\frac{\|AD\|}{\|CJ\|} = \frac{\|AI\|}{\|BC\|}$. Dar un trapez inscriptibil este cu necesitate trapez isoscel, rezultă $\|AD\| = \|EF\| = \|BC\|$ deci $\|EF\|^2 = \|AI\| \cdot \|CJ\| = \|AD\|^2 = \text{const.}$ c) Patrulaterul $IDEF$ este inscriptibil deci $m(\widehat{DIE}) = m(\widehat{DFE}) = m(\widehat{DAB}) = \text{const.}$ și $m(\widehat{BJF}) = m(\widehat{BCD}) = \text{const.}$ Deci I descrie un arc din cercul ce trece prin C și D capabil de unghiul de măsură egală cu măsura unghiului DAB, iar J descrie un arc din cercul ce trece prin A și B și capabil de un unghi de aceeași măsură. **3.53.** a) Fie A' și B' proiecțiile lui A și B pe $|CD|$. Avem $\|AC^2\| = \|CE\|^2 + \|EA\|^2 = (\|DC\| - \|DE\|)^2 + \|AD\|^2 - \|DE\|^2 = \|DC\|^2 + \|AD\|^2 - 2\|DC\| \cdot \|ED\|$ și $\|BD\|^2 = \|DF\|^2 + \|BF\|^2 = (\|DC\| - \|DF\|)^2 - \|CF\|^2 = \|DC\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|DC\| \cdot \|CF\|$ de unde relația din enunț. b) $h^2 = \|BD\|^2 - \|DF\|^2 = \|BD\|^2 - \frac{1}{4}\|AB\|^2$, $\|BC\|^2 = \|CF\|^2 + h^2$ deci $2h^2 = \|BD\|^2 + \|BC\|^2 - \|CF\|^2 - \frac{1}{4}\|AB\|^2 = \|BD\|^2 + \|BC\|^2 - \frac{5}{2}\|AB\|^2$. c) Fie A' și D' proiecțiile lui A și D pe diagonala BC. Avem $S_{ABC} = \frac{\|BC\| \|AA'\|}{2} = \frac{\|AB\| h}{2}$ și $S_{BCD} = \frac{\|BC\| \cdot \|DD'\|}{2} = \frac{\|CD\| h}{2}$ de unde $\frac{\|DD'\|}{\|AA'\|} = \frac{S_{BCD}}{S_{ABC}} = \frac{\|CD\|}{\|AB\|}$. **3.54.** a) $\triangle AOD \sim \triangle BOC$ deci $\frac{\|OA\|}{\|OC\|} = \frac{\|OD\|}{\|OB\|}$ sau $\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OD\|}{\|BD\|}$ și $\frac{\|OC\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}$

Scanned with OKEN Scanner

şi de asemenea $\frac{\|OA\|}{\|AD\|}=\frac{\|OB\|}{\|BC\|}$, $\frac{\|OD\|}{\|AD\|}=\frac{\|OC\|}{\|BC\|}$ care înmulţite conduc la rezultat. b) Avem aria $ABCD=\frac{(\|AD\|+\|BC\|)d}{2}$ = aria ABD + aria $BCD=\frac{\|BD\|\|AO\|}{2}+\frac{\|BD\|\|OC\|}{2}=\frac{\|BD\|\|AC\|}{2}$ de unde $d=\frac{\|BD\|\|AC\|}{\|AD\|+\|BC\|}$ (1). Fie $|EF|$ linia mijlocie a trapezului şi G mijlocul lui $|BC|$. Avem $|EG|\parallel|AC|$, $|GF|\parallel|BD|$ deci $\triangle EGF$ este dreptunghic şi $\|EF\|^2=\|EG\|^2+\|GF\|^2=\frac{1}{4}\|AC\|^2+\frac{1}{4}\|BD\|^2$. Ţinînd seama de (1) relaţia din enunţ se reduce la $\|BD\|^2+\|AC\|^2=(\|AD\|+\|BC\|)^2=4\|EF\|^2$.

3.55. a) $\triangle FAB\sim\triangle FDC$, $\frac{\|FB\|}{\|FC\|}=\frac{\|AB\|}{\|DC\|}$; $\frac{\|FB_1\|}{\|FC_1\|}=\frac{\|AB\|+\|BB_1\|}{\|DC\|+\|CC_1\|}=\frac{\|AB\|}{\|DC\|}$ deci $\frac{\|FB\|}{\|FC\|}=\frac{\|FB_1\|}{\|FC_1\|}$. b) Fie M punctul de intersecţie al dreptelor AD şi BC, iar M_1 punctul de intersecţie al dreptelor AD cu B_1C_1. Din $\triangle MAB\sim\triangle MDC$ avem $\frac{\|MA\|}{\|MD\|}=\frac{\|AB\|}{\|DC\|}$ iar din $\triangle M_1AB_1\sim M_1DC_1$ $\frac{\|M_1A\|}{\|M_1D\|}=\frac{\|AB_1\|}{\|DC_1\|}=\frac{\|AB\|(1+k)}{\|DC\|(1+k)}=\frac{\|AB\|}{\|DC\|}$ deci $M\equiv M_1$. c) Din triunghiurile asemenea $\triangle ADC\sim\triangle AEF$ şi $\triangle DAB\sim\triangle DFE$ rezultă $\|EF\|=\frac{\|AB\|\|CD\|}{\|AB\|+\|CD\|}$, $\|E_1F\|=\frac{\|AB_1\|\|DC_1\|}{\|AB_1\|+\|DC_1\|}=\frac{\|AB\|\|DC\|(1+k)}{\|AB\|+\|DC\|}$ de unde $\|EE_1\|=\|E_1F\|-\|EF\|=K\frac{\|AB\|\|DC\|}{\|AB\|+\|DC\|}$. d) EE_1 este bisectoarea unghiului BFC deci centrul cercului înscris în $\triangle BFC$ se află pe EF.

FE_1 este bisectoarea unghiului B_1FC_1 deci pe ea se găsește centrul cercului înscris în $\triangle FB_1C_1$. **3.56.** a) Fie E mijlocul lui $|AB|$, $|EP| \perp |OO_1|$, $|EQ| \perp |AB|$, P și Q fiind pe $|OO_1|$, $|OM| \parallel |AB|$, $M \in |O_1B|$. $\triangle EPQ \sim \triangle OO_1M$. Din asemănare și din $\|EQ\| = \frac{1}{2}(R + R_1)$ rezultă $\|EP\| = \frac{R + R_1}{d} \cdot \frac{\|AB\|}{2}$. Dar $R + R_1 < d$ deci $|OO_1|$ intersectează cercul (E). Cercul (E) este tangent la $|OO_1|$ dacă $\|EP\| = \frac{1}{2}\|AB\|$ adică $R + R_1 = d$ deci (O) și (O_1) sînt tangente. b) Relațiile din enunț exprimă puterile lui O și O_1 față de cercul (E). **3.57.** Fie Q intersecția axei radicale cu $|O_1O_2|$. Puterea lui M față de (O_1) este $p_1 = \|MO_1\|^2 - R_1^2$, iar față de (O_2), $p_2 = \|MO_2\|^2 - R_2^2$ deci $p_1 - p_2 = \|MO_1\|^2 - \|MO_2\|^2 - R_1^2 + R_2^2$; $\|MO_1^2\| = \|O_1N\|^2 + \|MN\|^2$, $\|MO_2\|^2 = \|NO_2\|^2 + \|MN\|^2$ (fig. 3.57), deci $p_1 - p_2 = \|O_1O_2\|(\|NO_2\| + \|NO_2\|) + R_2^2 - R_1^2$. Punctul Q este

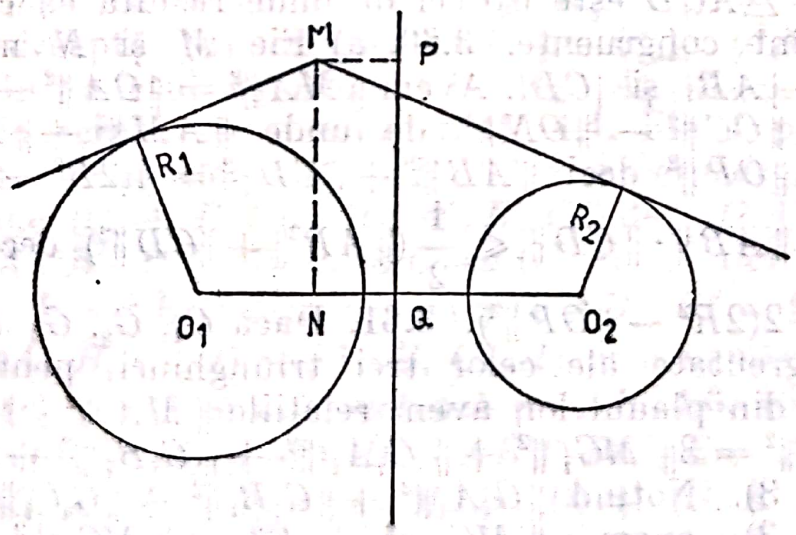


Fig. 3.57

pe axa radicală deci $\|QO_2\|^2 - \|QO_1\|^2 = R_2^2 - R_1^2$ deci $p_1 - p_2 = \|O_1O_2\|(\|NO_1\| + \|NO_2\|) - \|O_1O_2\|(\|QO_1\| + \|QO_2\|) = 2\|O_1O_2\| \cdot \|NQ\| = 2\|O_1O_2\|\|MP\|$. **3.58** Avem $\|OA\| \cdot \|OP\| = R^2 = \|OM\|^2 \cdot \triangle OAM \sim \triangle OMP$ deci $m(\widehat{OAM}) = m(\widehat{OMP})$. Notînd cu M' simetricul lui M față

Scanned with OKEN Scanner

de (d) avem $\triangle OPM \sim \triangle MPM'$ deci $\frac{\|MP\|}{\|OP\|} = \frac{\|MM'\|}{\|MP\|} =$ $= \frac{2\|MN\|}{\|MP\|}$ deci $\frac{MP\|^2\|}{\|MN\|} = 2\|OP\| = \text{const.}$ **3.59.** a) $m(\widehat{BAC}) =$ $= m(\widehat{BDA})$ și $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BAD})$ deci $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ și $\frac{\|AC\|}{\|AD\|} = \frac{\|AB\|}{\|BD\|} = \frac{\|BC\|}{\|AB\|}$ de unde $\|AB\| = \frac{\|AC\| \cdot \|BD\|}{\|AD\|} =$ $= \frac{\|BC\| \cdot \|AD\|}{\|AC\|}$ de unde relația din enunț. b) Dacă cercurile sînt congruente atunci $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ deci $\triangle ACD$ este isoscel ($\|AC\| = \|AD\|$) și $|AB|$ este bisectoare și înălțime. Dacă cercurile sînt ortogonale $|AC|$ și $|AD|$ sînt diametre, punctele C, B, D sînt coliniare și $|AB| \perp |CD|$. Dacă punctele C, B, D sînt coliniare rezultă că $m(\widehat{ABC}) =$ $= m(\widehat{ABD}) = 90°$, atunci $|AC|$ și $|AD|$ sînt diametre în cele două cercuri și perpendiculare, deci cercurile sînt ortogonale. Dacă punctele C, B, D nu sînt coliniare în $\triangle CBD$ înălțimea $|AB|$ este și bisectoare deci $\triangle CBD$ este isoscel și deci și $\triangle ACD$ este isoscel de unde rezultă că cele două cercuri sînt congruente. **3.60.** a) Fie M și N mijloacele coardelor $|AB|$ și $|CD|$. Avem $\|MA\|^2 = \|OA\|^2 - \|OM\|^2$, $\|NC\|^2 = \|OC\|^2 - \|ON\|^2$ de unde $\|AM\|^2 + \|NC\|^2 =$ $= 2R^2 - \|OP\|^2$ deci $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 = 4(2R^2 - \|OP\|^2)$. b) Avem $\|AB\| \cdot \|CD\| \leqslant \frac{1}{2}(\|AB^2\| + \|CD\|^2)$ deci $\|AB\| \cdot$ $\cdot \|CD\| \leqslant 2(2R^2 - \|OP\|^2)$. **3.61.** Dacă G_1, G_2, G_3 sînt centrele de greutate ale celor trei triunghiuri, pentru orice punct M din planul lor avem relațiile $\|MA_i\|^2 + \|MB_i\|^2 +$ $+ \|MC_i\|^2 = 3\|MG_i\|^2 + \|G_iA_i\|^2 + \|G_iB_i\|^2 + \|G_iC_i\|^2$, $(i = 1, 2, 3)$. Notînd $\|G_iA_i\|^2 + \|G_iB_i\|^2 + \|G_iC_i\|^2 = 3K_i^2$, $(i = 1, 2, 3)$ avem $\|MG_1\|^2 + K_1^2 = \|MG_2\|^2 + K_2^2 =$ $= \|MG_3\|^2 + K_3^2$ relația care ne arată că M este la intersecția locurilor geometrice definite de egalitățile $\|MG_1\|^2 - \|MG_2\|^2 = K_2^2 - K_1^2$, $\|MG_1\|^2 - \|MG_3\|^2 =$ $= K_3^2 - K_1^2$ deci la intersecția a două drepte perpendiculare pe dreptele G_1G_2 și G_1G_3. Prin M trece și locul definit de $\|MG_2\|^2 - \|MG_3\|^2 = K_3^2 - K_2^2$, deci M este unic. Dacă G_1, G_2, G_3 nu sînt coliniare ele formează un triunghi și pro-

Scanned with OKEN Scanner

blema are soluție unică. Dacă G_1, G_2, G_3 sînt coliniare punctul M nu există — cele două perpendiculare care îl definesc sînt paralele —; dacă aceste paralele se confundă, orice punct de pe această dreaptă este soluție. Dacă două din punctele $G_i (i = 1, 2, 3)$ se confundă M nu există decît dacă $K_1^2 = K_2^2$ $(G_1 \equiv G_2)$ și avem în acest caz o infinitate de soluții situate pe o perpendiculară pe G_1G_3. Dacă cele trei puncte G_i sînt confundate, M nu există decît în cazul în care $K_1^2 = K_2^2 = K_3^2$ și în acest caz orice punct al planului răspunde problemei.

Capitolul 4

4.1. Toate afirmațiile se verifică prin calcul, ținînd seama că schimbarea reperului se concretizează în multiplicarea lui $\overline{AB}$ cu un număr real (independent de punctele A, B). **4.2.** Notînd α_{ij} $i = 3, 4$, $j = 1, 2$ măsura unghiului dreptelor (d_i) și (d_j) se obține, utilizînd teorema sinusurilor, $(A_1. A_2. A_3. A_4) = \dfrac{\sin \alpha_{31}}{\sin \alpha_{32}} : \dfrac{\sin \alpha_{41}}{\sin \alpha_{42}}$ ceea ce demonstrează afirmația. **4.3.** Fie d_0 o poziție fixată oarecare și punctul A_4^0 pe (d_0) astfel încît $(A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0) = k$. Atunci, dacă o dreaptă (d) intersectează pe (d_1), (d_2), (d_3), și pe OA_4^0 în punctul A_4 avem $(A_1, A_2, A_3, A_4) = k$. Locul geometric cerut este dreapta OA_4^0. **4.4.** Fie I punctul de intersecție a dreptelor AA' și BB', C'' intersecția dreptelor IC și (d'). Atunci $(O, A, B, C) = (O, A', B', C'')$ deci $(O, A', B', C') =$ $= (O, A', B', C'')$. Rezultă $C' \equiv C''$ și de aici concluzia. **4.5.** Fie $I = AB \cap (d)$, $C' = (c) \cap AB$, $C'' = (c') \cap AB$. Atunci $(A, B, C', I) = (A, B, C'', I)$ prin urmare $C' \equiv C''$ și deci (c) și (c') se intersectează pe AB. **4.6.** Fie O intersecția dreptelor (d) și (d'), $D = AB' \cap BC'$, $E = AC' \cap B'C$. Atunci $(O, A', B', C') = (A, M, B', D)$ și $(O, A', B', C') =$ $= (A, N, E, C')$. Conform problemei 4.4, rezultă că dreptele MN, $B'E$, DC' sînt concurente, deci MN trece prin punctul de intersecție al dreptelor $B'E$ și DC' care este P. **4.7.** Să considerăm fasciculele (AB, AD, AN, AB') și (BA, BD, BN, BB') care au latură comună AB și celelalte perechi concurente în trei puncte coliniare: D, N, B'. Rezultă, conform 4.1, că rapoartele anarmonice ale celor două fascicule sînt

egale. Fie $L = CC' \cap AD$, $G = C'D \cap BN$. Rezultă $(C', L, N, C) = (C', D, G, M)$. Conform problemei 4.4, deducem că dreptele LD $(\equiv AD)$, $NG(\equiv BN)$, CM sînt concurente. **4.8.** Fie E intersecţia dreptelor AB şi CD. Atunci $A(P, \alpha, \beta, \gamma) = A(E, C, N, M) = B(P, C, \gamma', \beta')$ adică $(P, \alpha, \beta, \gamma) = (P, C, \gamma', \beta')$ de unde rezultă că dreptele $\alpha C(\equiv AC)$, $\beta\gamma'$, $\beta'\gamma$ sînt concurente. Analog, $B(P, \alpha', \beta', \gamma') = B(E, D, M, N) = A(E, D, M, N) = A(P, D, \gamma, \beta)$ de unde rezultă că dreptele $\alpha' D(\equiv BD)$, $\beta'\gamma$, $\beta\gamma')$ sînt concurente. **4.9.** Fie $A_1 = BC \cap B'C'$, $B_1 = AC \cap A'C'$, $C_1 = AB \cap A'B'$ şi D, D' intersecţiile dreptei a cu dreptele BC şi $B'C'$. Avem $(A, B, C, D) = (A, B', C', D')$. Conform proprietăţii din problema 4.6, rezultă că perechile de drepte $(AB, A'B')$, $(AC, A'C')$ $(AA_1, A'A_1)$ se taie în trei puncte coliniare, q.e.d. Teorema poate fi formulată şi astfel: Dacă două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ au vîrfurile A şi A', B şi B', C şi C' pe trei drepte concurente în O, atunci laturile AB şi $A'B'$, BC şi $B'C'$, CA şi $C'A'$ se intersectează în trei puncte coliniare. Astfel de triunghiuri se numesc triunghiuri ortologice, O se numeşte centru de ortologie, iar dreapta rezultată — axă de ortologie. **4.10.** Fie $E = BB' \cap A'C'$, $F = BB' \cap AC$, $D = BB' \cap A_1B_1$, unde $A_1 = BC \cap B'C'$ etc. Atunci $(C_1, D, A_1, B_1) = (A', E, C', B_1) = (A, F', C', B_1) = (A, F, C, B_1)$. Ultima egalitate arată că dreptele AA', FE, CC' sînt concurente. **4.11.** Triunghiurile AC_1N şi $A_1C'P$ au proprietatea că perechile de laturi (NC_1, PC'), (AN, PA_1), (AC_1, A_1C') se taie în puncte coliniare. Conform teoremei reciproce a lui Desargues (4.10), rezultă că A, α, A_1 sînt coliniare. Analog pentru celelalte triplete. **4.12.** Dacă $(A, B, C, D) = -1$ atunci, conform 4.1., rezultă $(B, A, C, D) = -1$ şi deci $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)$. Reciproc, dacă $(A, B, C, D) = (B, A, C, D)$, rezultă că $(A, B, C, D)^2 = 1$ şi deci $(A, B, C, D) = -1$. **4.13.** Fie $D = B'C' \cap AM$. Avem $(A', B, A_1, C) = (A', C', D, B') = (A', C, A_1, B)$. Aşadar (A', B, A_1, C) este invariant la o transpoziţie a două puncte, ceea ce arată că punctele A' şi A_1 sînt conjugate armonic faţă de B, C. **4.14.** Conform 4.3., cu notaţiile din enunţ, deoarece $(P, Q, X, Y) = -1$, rezultă că Q descrie o dreaptă cînd dreapta prin P este variabilă. Fie PXY şi PX_1Y_1 două secante prin P, X, X_1 fiind pe Ox, iar Y, Y_1 pe Oy. Dreptele XY_1 şi X_1Y se taie în R, OR taie pe X_1Y_1 în Q_1 care este conjugatul lui P faţă de X_1Y_1; OR este polara lui P faţă

Scanned with OKEN Scanner

de unghiul xOy. *Observație.* Fie Q un punct pe polara p a punctului P (față de unghiul xOy). Evident, polara lui Q (față de xOy) trece prin P. Așadar, dacă Q descrie polara lui P, atunci polara q a lui Q trece prin punctul fix P. De aceea P se numește polul dreptei p. Prin urmare, fiind dat un unghi, polara unui punct P variabil pe o dreaptă q trece printr-un punct fix Q — polul dreptei q; dacă dreapta p este variabilă prin punctul fix Q, atunci polul ei, P, descrie polara q a lui Q. **4.15.** Fie $EF \cap AC = G$. Din problema precedentă, rezultă că BD este polara punctului G față de unghiul dreptelor AB și CB, deci conjugatul lui G față de A și C este intersecția dreptelor BD și AC. **4.16.** a) Fie O centrul cercului, A, B intersecția dreptei PO cu cercul, A între P și O. Fie Q_0 conjugatul lui P în raport cu A și B; fie X, Y intersecțiile unei drepte oarecare prin P cu cercul și $C = AX \cap BY$. Dacă Q este conjugatul lui P față de X, Y, atunci punctele C, Q, Q_0 sînt coliniare. În plus, CQ_0 trece prin intersecția dreptelor AY și BX. Rezultă că CQ_0 este perpendiculară pe AB în punctul Q_0. Cînd dreapta prin P devine tangentă cercului (dacă P este exterior) punctele X, Q, Y coincid cu punctul de tangență. Așadar, în acest caz, locul geometric este segmentul determinat de punctele de tangență. b) Fie q o dreaptă, P_0 piciorul perpendicularei din O pe q și Q conjugatul armonic al lui P_0 față de diametrul AB, care trece prin P. Atunci q este polara punctului Q, deci dacă P este un punct al dreptei q, diviziunea (P, Q, X, Y) este armonică, adică polara lui P trece prin Q. **4.18.** Se aplică reciproca teoremei lui Ceva. **4.19.** Dreptele AA', BB', CC' sînt concurente dacă și numai dacă $\frac{\| A'B \|}{\| A'C \|} \cdot \frac{\| B'C \|}{\| B'A \|} \cdot \frac{\| C'A \|}{\| C'B \|} = 1$ relație echivalentă, în condițiile enunțului, cu $\frac{\| A''B \|}{\| A''C \|} \cdot \frac{\| B''C \|}{\| B''A \|} \cdot \frac{\| C''A \|}{\| C''B \|} = 1$, echivalentă cu concurența dreptelor AA'', BB'', CC''. **4.20.** a) Dacă I_a este intersecția bisectoarelor exterioare ale unghiurilor B, C, atunci el este egal depărtat de dreptele AB și AC, situat în interiorul unghiului BAC, deci se află pe bisectoarea interioară acestuia. b) Perpendicularele în A pe I_bI_c, în B pe I_aI_c, în C pe I_aI_b sînt AI_a, BI_b, CI_c, concurente în I și afirmația rezultă din

Scanned with OKEN Scanner

3.17. c) Cu notații obișnuite, avem $\|BA'\| = \|CA''\| = p - b$. d) Dreptele AA'', BB'', CC'' sînt izotomicele dreptelor concurente AA', BB', CC' deci sînt concurente (vedeți 3.18). **4.21.** Luînd reperul cu originea în O avem $x_B = -x_A$ și atunci condiția din definiția raportului armonic este echivalentă cu $x_A^2 = x_C x_D$ ceea ce arată că punctele C și D sînt de aceeași parte față de O și deci $x_C x_D = \|OC\| \cdot \|OD\|$. **4.22.** a) Dacă cercurile sînt ortogonale, atunci $\|O_2T\|^2 = \|O_2B_1\| \cdot \|O_2A_1\|$ adică $\|O_2A_2\|^2 = \|O_2B_1\| \cdot \|O_2A_1\|$ și deci diviziunea (A_1, B_1, A_2, B_2) este armonică (T este unul din punctele comune cercurilor). b) Dacă pentru o anumită dreaptă care trece prin O_2 avem diviziunea armonică (A_1, B_1, A_2, B_2), atunci $\|O_2A_2\|^2 = \|O_2B_1\| \cdot \|O_2A_1\|$, de unde rezultă că lungimea tangentei din O_2 la cercul Γ_1 este egală cu raza cercului O_2 și deci cercurile Γ_1 și Γ_2 sînt ortogonale. **4.23.** Fasciculul de drepte (AB, AF, AE, AD) are același raport anarmonic cu fasciculul (CB, CF, CE, CD). Notînd $I = EF \cap CD$ și $J = AF \cap DE$, rezultă $(L, J, E, D) = (M, F, E, I)$. Rezultă că dreptele LM, JF și DI sînt concurente, adică JF și DI se taie pe LM. **4.24.** Fie A', B', C', D', E', F', punctele de tangență cu cercul ale dreptelor AB, BC, CD, DE, EF, FA. Perechile de drepte $(F'A', C'D')$, $(A'B', D'E')$, $(B'C', F'A')$ se intersectează în trei puncte coliniare L, M, N. Polul dreptei $F'A'$ este A, iar polul dreptei $D'C'$ este D. Rezultă că AD este polara lui L. La fel BE este polara lui M și CF este polara lui N. Cum L, M, N sînt coliniare, rezultă că AD, BE, CF sînt concurente. **4.25.** Relația este evidentă dacă dreapta MNP este paralelă cu BC. Să presupunem contrariul și fie Q intersecția celor două drepte. Atunci au loc relațiile $\frac{\|QB\|}{\|QA\|} \cdot \frac{\|A_1P\|}{\|PA\|} \cdot \frac{\|AM\|}{\|MB\|} = 1$ $\frac{\|QA\|}{\|QC\|} \cdot \frac{\|CN\|}{\|NA\|} \cdot \frac{\|AP\|}{\|PA_1\|} = 1$, $\|QB\| + \|QC\| = 2 \cdot \|QA_1\|$. Eliminînd pe $\|QB\|$ și $\|QC\|$ între aceste relații se obține relația din enunț. **4.26.** Rezultă din problema precedentă prin particularizare. Soluție „în examen". Paralela prin A la BC taie pe QP în D, fie $E = QP \cap BC$. Atunci $\frac{\|CP\|}{\|PA\|} = \frac{\|CE\|}{\|AD\|}$, $\frac{\|BQ\|}{\|QA\|} = \frac{\|EB\|}{\|AD\|}$, $\|EA_1\| = \frac{1}{2}\|AD\|$, $\|EA_1\| = \frac{1}{2}(\|EB\| + \|EC\|)$, de unde se obține

relația din enunț. **4.27.** Se aplică relația lui Menelaus triunghiului ABC tăiat de transversala QP. **4.28.** Fie la început $k = 0$. Presupunînd $\|AB\| < \|AC\|$, fie punctele P și Q ca în problema precedentă. Atunci dreapta PQ trece prin mijloacele segmentelor $|MN|$ și $|BC|$. Locul geometric al mijlocului segmentului $|MN|$ este segmentul $|PR|$, R fiind mijlocul lui $|BC|$. Cazul $k \neq 0$ se reduce la acesta considerînd punctele B_1 pe $[AB$ și C_1 pe $[AC$ astfel încît $\|BB_1\| = k$ și $\|CC_1\| = k$, cu B_1 între A și B, respectiv C între A și C_1. **4.29.** Fie patrulaterul complet $ABCDEF$ cu diagonalele AC, BD și EF, L, M, N mijloacele acestor diagonale, iar G, H, K mijloacele segmentelor BE, EC, CB. Evident, N se află pe dreapta HG, L pe HK și M pe GK. Avem $\frac{\|NH\|}{\|NG\|} \cdot \frac{\|GM\|}{\|MK\|} \cdot \frac{\|KL\|}{\|LH\|} = \frac{\|FC\|}{\|FB\|} \frac{\|ED\|}{\|DC\|} \cdot \frac{\|AB\|}{\|EA\|} = 1$, de unde, aplicînd reciproca teoremei lui Menelaus triunghiului GHK pentru punctele N, L, M deducem că acestea sînt coliniare. **4.30.** Fie O_1 și O_2 centrele celor două cercuri fixe și O centrul unui cerc variabil care este tangent exterior (sau interior) ambelor cercuri date în punctele P și Q. Fie R_1 punctul în care dreapta PQ intersectează dreapta O_1O_2. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului OO_1O_2 tăiat de transversala PQR_1 obținem $\frac{\|R_1O_1\|}{\|R_1O_2\|} = \frac{r_1}{r_2}$, r_1 și r_2 fiind razele cercurilor date. Rezultă că punctul R_1 este punct fix. Dacă O este centrul unui cerc tangent exterior unuia din cele două cercuri și interior celuilalt, iar R_2 este punctul în care dreapta PQ intersectează pe O_1O_2 (R_2 este situat pe segmentul $|O_1O_2|$) se obține $\frac{\|O_1R_2\|}{\|R_2O_1\|} = \frac{r_1}{r_2}$ și, prin urmare, R_2 este fix. **4.31.** Fie pe cercul circumscris triunghiului ABC punctele A', B', C'. Considerînd hexagonul $AA'CC'B'B$, deducem că perechile de drepte $(AA', B'C')$, $(A'C, BB')$, (CC', AB) se taie în puncte coliniare. Cînd A' tinde către A, B' tinde către B și C' tinde către C, AA' devine tangentă în A la cerc, BB' devine tangentă în B la cerc, CC' devine tangentă în C la cerc, rezultatul obținîndu-se din 4.23. **4.32.** Triunghiurile MAQ și NCP au vîrfurile M și N, A și C, P și Q situate pe trei drepte

Scanned with OKEN Scanner

concurente. Cu teorema lui Desargues, rezultă că intersecțiile dreptelor AM și NC, AQ și PC, MQ și PN sînt coliniare. Deducem că locul geometric al intersecției dreptelor MQ și PN este dreapta BD. **4.33.** Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului ABC tăiat de transversala EMO obținem $\frac{\|EC\|}{\|EA\|}\cdot\frac{\|BM\|}{\|MC\|}=1$. Analog se obțin relațiile $\frac{\|EB\|}{\|ED\|}\cdot\frac{\|DN\|}{\|NA\|}=1$, $\frac{\|FB\|}{\|FC\|}\cdot\frac{\|CP\|}{\|PA\|}=1$, $\frac{\|FD\|}{\|FA\|}\cdot\frac{\|BR\|}{\|RD\|}=1$. Folosind triunghiurile asemenea ECB și FDB, respectiv ACF și ADE obținem $\frac{\|EC\|}{\|BC\|}=\frac{\|DF\|}{\|BD\|}$ și $\frac{\|FC\|}{\|ED\|}=\frac{\|AC\|}{\|AD\|}$. Din aceste relații se obține $\frac{\|DN\|}{\|NA\|}\cdot\frac{\|BR\|}{\|RD\|}=\frac{\|CP\|}{\|PA\|}\cdot\frac{\|BM\|}{\|MC\|}$. (*) Fie $X=DS\cap AB$, $Y=CT\cap AB$. Cu teorema lui Ceva obținem $\frac{\|CP\|}{\|CA\|}\cdot\frac{\|AY\|}{\|YB\|}\cdot\frac{\|BM\|}{\|MC\|}=1$, $\frac{\|DN\|}{\|NA\|}\cdot\frac{\|AX\|}{\|XB\|}\cdot\frac{\|BR\|}{\|RD\|}=1$, care împreună cu relația (*) conduc la faptul că X coincide cu Y. **4.34.** și **4.35.** Fie $R=IM\cap AD$ și $O=BC\cap AD$. Folosind patrulaterul complet $MPIQAD$, deducem că diviziunea (R, S, I, M) este armonică. Deoarece I este fix, rezultă că S descrie o dreaptă care trece prin O (paralelă cu bazele trapezului în cazul 4.34). **4.36.** În baza teoremei 4.4, dreptele EF, GH, AC sînt concurente. Fie Ω punctul lor comun. Considerînd triunghiurile LHC și PGH dreptele PL, GH, AC fiind concurente în Ω, deducem, folosind teorema lui Desargues că punctele de intersecție ale dreptelor LC și PA, LH și PG, CH și AG sînt coliniare. **4.37.** Se folosește caracterizarea unui punct situat pe mediana unui triunghi: distanțele sale la laturile unghiului sînt invers proporționale cu lungimile acestora. Astfel dacă mediana din A a triunghiului ADK și mediana din B a triunghiului BEF se intersectează în P, notînd α, β, γ distanțele lui P la laturile $|BC|$, $|CA|$ și $|AB|$ ale triunghiului dat, trebuie să avem $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\|AK\|}{\|AD\|}$, $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\|BE\|}{\|BF\|}$ din care, folosind ipotezele, deducem $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\|CG\|}{\|CH\|}$ care arată că P se află și pe mediana din C a triunghiului CHG. **4.38.** Se constată că triunghiurile AA_1C și analoagele sînt echilaterale și atunci congruența

segmentelor în discuție rezultă considerînd congruența triunghiurilor ABA_1 și ACB_1 etc. Tot din acestea se deduce concurența celor trei segmente în punctul T care are proprietatea că din el segmentele $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ sînt privite sub unghiuri de 120° (punctul T este punctul Toricelli al triunghiului dat). **4.39.** Probabil cea mai simplă demonstrație a afirmației este: fie N și P intersecțiile paralelelor prin C' și B' la AM cu latura BC. Din asemănarea triunghiurilor (sau din teorema lui Tales) deducem $\frac{\|AC'\|}{\|AB\|} = \frac{\|NM\|}{\|BM\|}$, $\frac{\|AB'\|}{\|AC\|} = \frac{\|MP\|}{\|MC\|}$ și deoarece $\|NM\| = \|MP\|$, egalitatea din enunț se impune. Fie, acum A_1, B_1 și C_1 punctele în care dreptele ce trec prin A și mijlocul segmentului $|B'C'|$, prin B și mijlocul lui $|C'A'|$. prin C și mijlocul lui $|A'B'|$ intersectează pe BC, CA respectiv AB. Ținînd seama de $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1$ și de $\frac{\|A_1C\|}{\|A_1B\|} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\|AC'\|}{\|AB'\|}$ și încă două similare, deducem $\frac{\|A_1B\|}{\|A_1C\|} \cdot \frac{\|B_1C\|}{\|B_1A\|} \cdot \frac{\|C_1A\|}{\|C_1B\|} = 1$ care impune concluzia. **4.40.** Dreptele invocate în enunț sînt diagonalele unui trapez și dreapta care trece prin mijlocul bazei $|OD|$ și prin intersecția dreptelor suport pentru laturile neparalele ale trapezului. **4.41.** Fie A', B', C' intersecțiile tangentelor în vîrfurile triunghiului la cercul circumscris acestuia. Atunci perpendicularele din A' pe BC, din B' pe CA și din C' pe AB sînt bisectoarele interioare ale triunghiului $A'B'C'$, deci concurente. Rămîne să aplicăm 3.17. **4.42.** Fie A' punctul în care diametrul prin A intersectează pe $|BC|$, B' mijlocul lui $|AC|$, C' piciorul bisectoarei din C. Atunci $m(\widehat{CAA'}) = 90° - m(\hat{B})$, $m(\widehat{BAA'}) = 90° - m(\hat{C})$. Cu teorema sinusurilor în triunghiul CAA' și BAA', avem $\|A'C\| = \frac{b \cos B}{\cos(B-C)}$, $\|A'B\| = \frac{c \cos C}{\cos(B-C)}$. Astfel $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1$, ținînd seama de ipoteza. Conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB', CC' sînt concurente. **4.43.** Notăm k valoarea comună a rapoartelor din enunț și O fie mijlocul segmentului $|MN|$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului CMN tăiat de transversala AOR ne oferă $\frac{\| CR \|}{\| RM \|} = k + 1$, R fiind intersecția dreptelor AQ și BC. Deoarece $\| CM \| = \frac{a}{k+1}$ obținem $\| CR \| = \frac{a}{k+2}$. Pe de altă parte, folosind paralelismul dreptelor AC și MQ, din asemănarea triunghiurilor MRQ și CAR găsim $\frac{\| QR \|}{\| AR \|} = \frac{\| MQ \|}{\| AC \|} = \frac{\| AN \|}{\| AC \|} = \frac{1}{k+1}$ și deci $\frac{\| QR \|}{\| QA \|} = \frac{1}{k+2}$. Cum $\| DR \| = \frac{a}{2} - \frac{a}{k+2} = \frac{ka}{2(k+2)}$ relația $\frac{\| QR \|}{\| QA \|} \cdot \frac{\| AP \|}{\| PB \|} \cdot \frac{\| BD \|}{\| DR \|} = 1$ se verifică, ceea ce impune concluzia. **4.44.** Fie O centrul cercului circumscris, M, N, P, Q, E, F mijloacele segmentelor $| AB |$, $| BC |$, $| CD |$, $| DA |$, $| AC |$ și $| BD |$. Deoarece $MNPQ$, $QFEN$, $PEMF$ sînt paralelograme, rezultă că $| EF |$, $| MP |$, $| QN |$ sînt concurente într-un punct I, mijloc al fiecăruia. De aici rezultă că cele șase drepte din enunț trec prin simetricul lui O față de I. **4.45.** Fie A_1 intersecția dreptelor AE și BC, B_1, C_1 analoagele lui A_1. Punctele E, F, G sînt mijloacele segmentelor AA_1, BB_1, CC_1. Fie A_2 simetricul lui A_1 față de A', B_2 simetricul lui B_1 față de B' și C_2 simetricul lui C_1 față de C', iar E' intersecția dreptelor AA_2 și $B'C'$, F' intersecția dreptelor BB_2 și $A'C'$, G' intersecția dreptelor CC_2 și $A'B'$. Evident, punctele E, E' sînt isotomice pe $| B'C' |$, F, F' sînt isotomice pe $| C'A' |$, iar G, G' sînt isotomice pe $| A'B' |$. Conform rezultatului din 4.19., dreptele $A'E'$, $B'E'$, $C'G'$ sînt concurente. Pe de altă parte $\frac{\| B'E' \|}{\| E'C' \|} = \frac{\| CA_2 \|}{\| BA_2 \|}$ și încă două similare. Deoarece $\frac{\| B'E' \|}{\| E'C' \|} \cdot \frac{\| C'F' \|}{\| F'A' \|} \cdot \frac{\| A'G' \|}{\| G'B' \|} = 1$, deducem $\frac{\| CA_2 \|}{\| BA_2 \|} \cdot \frac{\| BC_2 \|}{\| AC_2 \|} \cdot \frac{\| AB_2 \|}{\| CB_2 \|} = 1$ ceea ce arată că dreptele AA_2, BB_2 și CC_2 sînt concurente și, folosind încă odată 4.19, obținem concurența dreptelor AA_1, BB_1, CC_1. Comparați rezultatele problemelor 4.39 și 4.45.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

5.1. Notînd cu N' și C' proiecțiile punctelor N și C pe dreapta AB avem $\frac{\|NN'\|}{\|CC'\|} = n$ de unde rezultă că raportul ariilor triunghiurilor AMN și ABC este $\frac{m}{n}$. Rezultatul, simplu cum este, trebuie reținut! **5.2.** Fie $O = |MN| \cap \cap |AD|$. În trapezul $AMDN$, aria $[AON]$ = aria $[MOD]$, prin urmare, aria $[ABMN]$ = aria $[ABD] = \frac{1}{2}$ aria $[ABC]$.

5.3. Egalitatea din enunț este echivalentă cu egalitatea aria $[BEC]$ = aria $[MED]$. Fie CN paralelă cu AM, $N \in |AD|$. Distanțele de la B la AM și de la D la CN sînt egale. Rezultă că distanța de la B la AM este diferența distanțelor de la D și C la AM și atunci concluzia se impune. b) Din observația de la a) rezultă că pentru ca aria $[DEM]$ să fie constantă este necesar și suficient ca aria $[BEC]$ să fie constantă. Cum $\|BC\|$ este constantă, rezultă că, în condiția dată, E descrie un segment paralel cu BC cuprins între paralelele AB și CD. c) În condiția dată raportul $\frac{\|ME\|}{\|MA\|}$ este constant, deci $\frac{\|EQ\|}{\|AD\|}$ este constant, deci $\|EQ\|$ este constant. **5.4.** Se vede că $\frac{S}{\sigma} = \frac{\|OB\|}{\|OD\|}$ și $\frac{s}{\sigma} = \frac{\|OC\|}{\|OA\|}$ și cum $\frac{\|OB\|}{\|OD\|} = \frac{\|OA\|}{\|OC\|}$ relația se impune. **5.5.** Este clar că punctele de intersecție a celor patru cercuri sînt vîrfurile unui pătrat, fie ele M, N, P, Q. Notînd cu a lungimea laturii pătratului, deoarece $m(\widehat{MN}) = 30$, rezultă $\|MN\| = 2a \sin 15° = \frac{a}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; prin urmare aria $MNPQ$ este $a^2(2-\sqrt{3})$. Aria sectorului AMN (fig. 5.5) este $\frac{\pi a^2}{12}$, iar aria triunghiului AMN

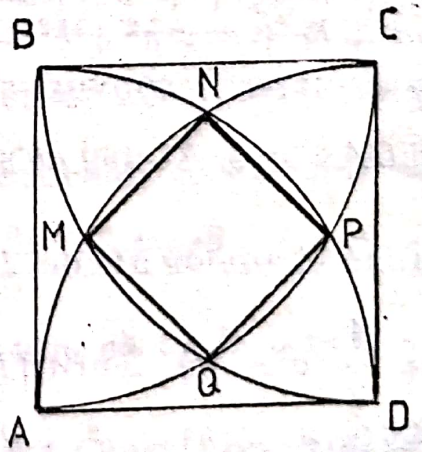


Fig. 5.5.

este $\frac{a^2}{4}$, deci aria segmentului avînd coarda MN este $\frac{a^2(\pi-3)}{12}$. Aria comună celor patru cercuri este deci, $\frac{a^2}{4}(5+\pi-4\sqrt{3})$.

5.6. a) Notînd $\frac{\|BA'\|}{\|BC\|}=k$, rezultă aria$[BA'C']=k^2$ aria$[ABC]$, aria$[A'B'C]=(1-k)^2$ aria $[ABC]$ și deci aria $[A'B'C'A]=$ $=2k(1-k)$ aria $[ABC]=2\sqrt{\text{aria }[BA'C']\cdot\text{aria }[A'B'C]}$. b) Din relația de la a) deducem că maximul ariei paralelogramului $A'B'AC'$ se realizează pentru $k=\frac{1}{2}$, deci atunci cînd A' este mijlocul laturii $|BC|$. **5.7.** Rezolvăm la început o problemă care are un interes de sine stătător: Fie ABC un triunghi oarecare, P un punct pe latura $|BC|$ și PR paralelă cu AC, PQ paralelă cu AB, $R\in|AB|$ și $Q\in|AC|$. Notînd cu S, S', S'' ariile triunghiurilor ABC, BRP și CQP are loc relația $\sqrt{S'}+\sqrt{S''}=\sqrt{S}$. În adevăr, avem $\frac{S'}{S}=$ $=\frac{\|BP\|^2}{\|BC\|^2}$ și $\frac{S''}{S}=\frac{\|PC\|^2}{\|BC\|^2}$ de unde se obține concluzia. Să notăm acum prin S_a aria triunghiului format de paralelele prin M la BC cu laturile $|AB|$ și $|AC|$. Atunci $S_a=S_2+S_3+2\sqrt{S_2S_3}$. Cu notații evidente avem și $S_b=S_1+S_3+2\sqrt{S_1S_3}$, $S_c=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$ de unde rezultă că $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. Astfel, inegalitatea din enunț este echivalentă cu $S_1+S_2+S_3\geqslant\sqrt{S_1S_2}+$ $+\sqrt{S_2S_3}+\sqrt{S_3S_1}$ care se obține din inegalitatea cunoscută $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$ în mod evident. **5.8.** Fie $ABCD$ patrulaterul convex și $\|AB\|=a$, $\|BC\|=b$, $\|CD\|=c$, $\|DA\|=d$. Atunci $ab\sin B=2$ aria$[ABC]\leqslant ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$. În mod analog avem: 2 aria$[BCD]\leqslant\frac{1}{2}(b^2+c^2)$, 2aria$[CDA]\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{2}(c^2+d^2)$, 2 aria$[DAB]\leqslant\frac{1}{2}(d^2+a^2)$. Cu acestea, rezultă $4S\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2$. Egalitatea se realizează dacă și numai dacă $ABCD$ este un pătrat. **5.9.** Este suficient să se

observe că $\frac{\text{aria}[MBC]}{\text{aria}[ABC]} = \frac{\|MA_1\|}{\|AA_1\|}$ etc. Relația a doua este consecință a primei relații. **5.10.** Dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci relația este evidentă. Presupunînd relația adevărată, obținem: $\frac{\|AA_1\|}{\|MA_1\|} + \frac{\|BB_1\|}{\|MB_1\|} + \frac{\|CC_1\|}{\|MC_1\|} = 9$. Notînd $\frac{\|MA_1\|}{\|AA_1\|} = \alpha$, $\frac{\|MB_1\|}{\|BB_1\|} = \beta$, $\frac{\|MC_1\|}{\|CC_1\|} = \gamma$ avem $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Pe de altă parte $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geqslant \frac{9}{\alpha+\beta+\gamma} = 9$ egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă $\alpha = \beta = \gamma = \left(\frac{1}{3}\right)$ [vedeți 4 ex. 2.12.] și concluzia se impune. **5.11.** Mediana unui triunghi este caracterizată ca mulțimea punctelor din planul triunghiului ale căror distanțe la laturile care concură în vîrful respectiv sînt invers proporționale cu lungimile acestor laturi. Fie P intersecția medianelor din enunțul problemei, h_1 distanța de la P la Ox, h_2 distanța la Oy și l distanța la dreapta AA_1; rezultă $h_1 \cdot \|AB\| = l \cdot \|AC\|$, $h_2 \cdot \|A_1B_1\| = l \cdot \|A_1C_1\|$. Din condițiile impuse rezultă $h_1 = h_2$, q.e.d. **5.12.** Avem $\frac{\|BA_1\|}{\|BC\|} = \frac{\rho_a}{\rho_a+1}$, $\frac{\|BC_1\|}{\|AB\|} = \frac{1}{\rho_c+1}$, prin urmare aria $[BA_1C_1] = \frac{\rho_a}{(\rho_a+1)(\rho_c+1)}$ aria ABC. Cu încă două relații obținute prin simetrie, rezultă aria $[A_1B_1C_1] = \left(1 - \frac{\rho_a}{(\rho_a+1)(\rho_c+1)} - \frac{\rho_b}{(\rho_b+1)(\rho_a+1)} - \frac{\rho_c}{(\rho_c+1)(\rho_b+1)}\right)$ aria $[ABC] = \frac{1+\rho_a\rho_b\rho_c}{(1+\rho_a)(1+\rho_b)(1+\rho_c)}$ aria $[ABC]$. **5.13.** a) Se utilizează rezultatul problemei precedente, observînd că $\rho_a = \frac{c}{b}$, $\rho_b = \frac{a}{c}$, $\rho_c = \frac{b}{a}$. b) Se observă că $\rho_a = \frac{c}{b} \cdot \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$ etc. și se ține seama că $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{\sin A}{\cos B \cos C}$. **5.14.** Patrulaterul $ABA'C$ este inscriptibil,

deci hexagonul $AC'BA'CB'$ este inscriptibil în cercul circumscris triunghiului ABC. Folosind formula: aria $[ABC] = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ (notații curente), obținem aria$[A'BC = 2R^2 \sin A \cos B \cos C$ și încă două relații similare. Afirmația este, acum consecință a identității 12.135c, **5.15.** Condiția este necesară. Presupunînd punctele A', B', C' coliniare avem: aria $[B'DC'] =$ aria $[B'DA'] +$ aria $[A'DC']$ (1). Dar $\dfrac{\text{aria}\,[B'DC']}{\text{aria}\,[BDC]} = \dfrac{\|B'D\|\,\|C'D\|}{\|BD\|\,\|CD\|}$ și încă două astfel de relații.

Introducînd în (1) obținem $\dfrac{\|AD\|}{\|A'D\|}\,\text{aria}\,[BDC] = \dfrac{\|DB\|}{\|DB'\|}$ aria $[CDA] + \dfrac{\|DC\|}{\|DC'\|}$ aria$[ADB]$ (2). Pe de altă parte, folosind congruențele $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CBD}$, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BCD}$ deducem $\dfrac{\text{aria}\,[CDA]}{\text{aria}\,[BDC]} = \dfrac{\|CA\| \cdot \|AD\|}{\|CB\| \cdot \|BD\|}$, $\dfrac{\text{aria}\,[ADB]}{\text{aria}\,[BDC]} = \dfrac{\|BA\| \cdot \|AD\|}{\|BC\| \cdot \|CD\|}$ care utilizate în (2) conduc la egalitatea din enunț. Condiția este suficientă. Presupunem relația din enunț adevărată și fie A'' intersecția semidreptei $[DA$ cu dreapta $B'C'$. Rezultă $\dfrac{\|BC\|}{\|A''D\|} = \dfrac{\|CA\|}{\|B'D\|} + \dfrac{\|AB\|}{\|C'D\|}$ care comparată cu cea dată conduce la $A'' \equiv A'$, deci punctele A', B', C' sînt coliniare.

Generalizare. Fie D în interiorul unghiului $\widehat{BAC}$. Dacă punctele $A' \in [DA$, $B' \in [DB$, $C' \in [DC$ sînt coliniare atunci avem relațiile (1) și (2) de mai sus. Notînd R_a, R_b, R_c razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BDC, ADC, BDA avem: aria $[BDC] = \dfrac{\|BD\| \cdot \|BC\| \cdot \|CD\|}{4R_a}$ etc. și din (2) deducem $\dfrac{\|BC\|}{\|DA'\| \cdot R_a} = \dfrac{\|CA\|}{\|DB\| \cdot R_b} + \dfrac{\|AB\|}{\|DC\| \cdot R_c}$.

Suficiența se demonstrează ca în primul caz. **5.16.** Notînd S aria triunghiului ABC avem $2S = \|BC\| \cdot \|PA_1\| + \|CA\| \cdot \|PB_1\| + \|AB\| \cdot \|PC_1\|$. Cu notațiile $\|BC\| = a$ etc., $\|PA_1\| = x$, $\|PB_1\| = y$, $\|PC_1\| = z$ să punem în inegalitatea $(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 \leqslant (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$, $\alpha^2 = ax$, $\beta^2 = by$, $\gamma^2 = cz$, $\alpha'^2 = \dfrac{a}{x}$, $\beta'^2 = \dfrac{b}{y}$, $\gamma'^2 = \dfrac{c}{z}$;

Scanned with OKEN Scanner

obținem: $(a+b+c)^2 \leqslant (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$ egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $x=y=z$. Prin urmare $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2S}$, egalitatea pentru $x=y=z$. Minimul sumei din enunț se realizează cînd P este centrul cercului înscris. **5.17.** A' este mijlocul arcului $\overset{\frown}{BC}$ al cercului circumscris. Notînd A_1 mijlocul laturii $|BC|$, triunghiul $A'A_1C$ este dreptunghic în A_1, prin urmare $\|A'A_1\| = d_a = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Cercul exînscris corespunzător laturii $|BC|$ are punctele de tangență în punctele B_a, C_a la dreptele AB, AC. Folosind faptul că tangentele dintr-un punct la un cerc sînt congruente, deducem $\|AB_a\| = \|AC_a\| = p$ — semiperimetrul triunghiului ABC. Rezultă $r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, deci $\frac{d}{r_a} = \frac{a}{2p}$ și de aici concluzia. **5.18.** Din egalitatea ariilor triunghiurilor $AB'C_1$ și $A_1B_1C_1$ rezultă că AA_1 este paralelă cu $B'B_1$; analog BB_1 este paralelă cu $C'C_1$. CC_1 este paralelă cu $A'A_1$. De aceea, BB_1 trece prin mijlocul segmentului $|A_1A'|$; prin urmare, triunghiurile BA_1B_1 și $BA'B_1$ sînt echivalente, ceea ce implică echivalența triunghiurilor $BC'B_1$ și BB_1C. Rezultă că B_1 este mijlocul segmentului $|CC'|$; analog, C_1 este mijlocul segmentului $|AA'|$, A_1 este mijlocul segmentului $|BB'|$. Obținem că triunghiurile $AC'B_1$ și AB_1C sînt echivalente, ceea ce implică egalitatea ariilor patrulaterelor AC_1A_1C' și CB_1C_1B'. Acum, deoarece triunghiurile $AA'C$, $CC'B$, $BB'A$ sînt echivalente deducem că $\frac{\|AB'\|}{\|CB'\|} = \frac{\|CA'\|}{\|BA'\|} = \frac{\|BC'\|}{\|AC'\|} = k$. Notînd σ aria triunghiului BB_1A' (echivalent cu BA_1B_1, CB_1C_1, CC_1B') avem $\frac{a}{\sigma} = k$. Teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABA' tăiat de transversala CB_1C' ne dă $\frac{k^2\|AB_1\|}{(k+1)\|B_1A'\|} = 1$; dar $\frac{\|AB_1\|}{\|B_1A'\|} = \frac{a+2\sigma}{a} = \frac{k+2}{k}$, prin urmare $\frac{k(k+2)}{k+1} = 1$

de unde obținem $k = (\sqrt{5} - 1)/2$. Deducem $\sigma = \frac{a}{k} = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$ și atunci aria triunghiului ABC este $4a + 6\sigma = a(\sqrt{5}+7)$. **5.19.** Fie P un punct în interiorul triunghiului ABC, $\alpha = m(\widehat{BPC})$, $\beta = m(\widehat{APC})$, $\gamma = m(\widehat{APB})$. Atunci aria triunghiului ABC este $\frac{d_A d_B \sin\gamma + d_B d_C \sin\alpha + d_C d_A \sin\beta}{2}$ unde d_A, d_B, d_C sînt distanțele punctului P la vîrfurile A, B, C; inegalitatea de demonstrat este consecință a inegalității cunoscute $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqslant 0$. **5.20.** Medianele triunghiului au proprietatea cerută de enunț. G fiind centrul de greutate al triunghiului, fie $M \in |AB|$ și $N \in |AC|$ astfel ca $G \in |MN|$. Dacă aria triunghiului AMN este egală cu aria patrulaterului $MBCN$, atunci aria $[BMG]$ = aria $[GNB_1]$, B_1 fiind piciorul medianei din B, ceea ce ar implica $\|GN\| = 2 \cdot \|MG\|$. Dar, notînd prin P intersecția paralelei prin C la AB cu MN, N este situat între G și P și avem $\|GP\| = 2 \cdot \|MG\|$, ceea ce implică $\|GN\| < 2\|MG\|$. Rezultă că singurele drepte cu proprietatea din enunț sînt medianele triunghiului. **5.21.** Observînd că $\|AM_a\| = \|AN_a\| - \|M_aN_a\|$ și celelalte similare, relația din enunț este echivalentă cu $\frac{\|M_aN_a\|}{\|AN_a\|} + \frac{\|M_bN_b\|}{\|BN_b\|} + \frac{\|M_cN_c\|}{\|CN_c\|} = 1$. Deoarece triunghiurile MBC și M_aBC sînt echivalente, deducem că $\frac{\|M_aN_a\|}{\|AN_a\|} = \frac{\text{aria}\,[M_aBC]}{\text{aria}\,[ABC]} = \frac{\text{aria}\,[BMC]}{\text{aria}\,[BAC]}$. În mod analog, $\frac{\|M_bN_b\|}{\|BN_b\|} = \frac{\text{aria}\,[AMB]}{\text{aria}\,[ABC]}$ și $\frac{\|M_cN_c\|}{\|CN_c\|} = \frac{\text{aria}\,[AMC]}{\text{aria}\,[ABC]}$ relații din care se obține prin adunare egalitatea dorită. *Comentarii:* 1) Problema are un echivalent spațial. Fie $ABCD$ un tetraedru și M, N puncte în interiorul tetraedrului, $N_a = |AN \cap (BCD)$, N_b și N_c analoagele lui N_a; M_a intersecția planului paralel la planul (BCD) prin M cu segmentul AN_a, M_b, M_c, M_d analoagele lui M_a. Atunci are loc relația

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{\|AM_a\|}{\|AN_a\|}+\frac{\|BM_b\|}{\|BN_b\|}+\frac{\|CM_c\|}{\|CN_c\|}+\frac{\|DM_d\|}{\|DN_d\|}=3$. Pentru demonstrație se observă că $\frac{\|AM_a\|}{\|AN_a\|}=\frac{\text{vol}\,[MBCD]}{\text{vol}\,[ABCD]}$ etc. 2) Condiția ca triunghiul să fie ascuțitunghic nu este necesară. **5.22.** a) Fie M un punct oarecare în interiorul poligonului convex $A_1A_2...A_n$ și M_i mijlocul laturii $|A_iA_{i+1}|$. Atunci distanța d_i de la M la dreapta A_iA_{i+1} are proprietatea $d_i \leqslant \|MM_i\|$ pentru fiecare $i=1, 2, ..., n$. Rezultă $2\,\text{aria}\,[A_iMA_{i+1}]\leqslant\|MM_i\|\cdot\|A_iA_{i+1}\|$ de unde $2\,\text{aria}\,[A_1A_2\ldots A_n]\leqslant\sum\|MM_i\|\cdot\|A_iA_{i+1}\|$ egalitatea avînd loc dacă și numai dacă M este astfel încît $d_i=\|MM_i\|$ pentru fiecare $i=1, 2, ..., n$. Egalitatea $d_i=\|MM_i\|$ are loc dacă și numai dacă M se află pe mediatoarea segmentului $|A_iA_{i+1}|$. Rezultă că egalitatea din enunț are loc dacă și numai dacă mediatoarele tuturor laturilor poligonului $A_1A_2\ldots A_n$ sînt concurente, deci dacă și numai dacă poligonul este inscriptibil, în care caz M este în mod necesar centrul cercului circumscris (și prin urmare unic). b) Ca în soluția punctului precedent, rezultă că punctul de tangență al laturii $|A_iA_{i+1}|$ la cercul înscris este mijlocul M_i. Observînd că $\|M_{i-1}A_i\|=\|A_iM_i\|$, rezultă că laturile poligonului sînt congruente, deci poligonul este regulat. **5.23.** Fie A', B', C' proiecțiile punctului M pe QR, RP, PQ. Atunci aria $[ABC]=4$ aria $A'B'C'$. Notînd $\|MA'\|=x$, $\|MB'\|=y$, $\|MC'\|=z$, avem aria $[A'B'C']=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$ și $x+y+z=\sqrt{\text{aria}\,[PQR]\sqrt{3}}$. Dar $xy+yz+zx\leqslant\frac{(x+y+z)^3}{3}$ egalitatea avînd loc exact pentru $x=y=z$. Deci $\frac{4\,\text{aria}\,[A'B'C']}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{\text{aria}\,[PQR]\cdot\sqrt{3}}{3}$ adică aria $[ABC]\leqslant$ aria $[PQR]$, egalitatea avînd loc dacă și numai dacă M este centrul triunghiului PQR, caz în care triunghiul ABC este simetricul triunghiului PQR față de centrul lui. **5.24.** Fie A', B', C' mijloacele segmentelor $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$ RQ trece prin A' și este perpendicular pe AM etc. Triunghiul PQR este echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

a) aria $[BMC] = yz \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ etc., deci $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zy)$.
b) Avem $a^2 = y^2 + z^2 + yz$ etc., de unde $2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx = a^2 + b^2 + c^2$, deci $a^2 + b^2 + c^2 = 2[(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)] + (xy + yz + zx)$ și ținînd seama de a) obținem b). c) Se ține seama de inegalitatea $(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + yz + zx)$. d) Vedeți problema precedentă. **5.25.** Notînd $\frac{\| BA' \|}{\| A'C \|} = x$, $\frac{\| CB' \|}{\| B'A \|} = y$, $\frac{\| AC' \|}{\| C'B \|} = z$, conform 5.12., avem aria $[A'B'C'] = \frac{1 + xyz}{(1 + x)(1 + y)(1 + z)} \cdot$ aria $[ABC]$. Pe de altă parte, utilizînd 3.17. deducem $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{3}{2}$ ceea ce antrenează și egalitatea $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = \frac{3}{2}$. Folosind inegalitatea mediilor, deducem că $\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \leqslant \frac{1}{8}$, $\frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \leqslant \frac{1}{8}$, egalitățile realizîndu-se dacă și numai dacă $x = y = z = \frac{1}{2}$. Rezultă că aria triunghiului $A'B'C'$ este maximă dacă și numai dacă M este centrul triunghiului ABC. **5.26.** Paralela prin D la AC intersectează pe $|AB|$ în F. Deoarece triunghiurile ADC și AFC sînt echivalente, condiția din enunț arată că aria $[BCE] =$ aria $[BFC]$, deci EF este paralelă cu BC. Rezultă că mijlocul lui $|DE|$ este mijlocul lui $|CF|$ care se află pe linia mijlocie $|A_1B_1|$ a triunghiului CAB. Se verifică ușor că orice punct de pe $|A_1B_1|$ este mijloc al unui segment „$|EF|$". Minimul $\| EF \| = \| A_1B_1 \|$ **5.27.** Presupunem că dreptele AB și CD se intersectează în O și fie ordinile A, B, O și C, D, O. Fie $P \in |OA$ astfel ca $\| OP \| = \| BA \|$ și $N \in |OC$ astfel ca $\| ON \| = \| CD \|$. Dacă M_0 este mijlocul segmentului PN, atunci triunghiurile OM_0P și OM_0N sînt echivalente, deci triunghiurile M_0AB și M_0CD sînt echivalente. Deducem cu ușurință că orice punct M de pe dreapta OM_0 satisface

aria $[MAB]$ = aria $[MCD]$. Dacă Q este simetricul lui P față de O și M_1 este mijlocul segmentului $|QN|$, atunci orice punct M de pe dreapta OM_1 are proprietatea aria $[MAB]$ = aria $[MCD]$. Locul geometric cerut este format din dreptele OM_0 și OM_1. **5.28.** Fie M un punct cu proprietatea din enunț. Din echivalența triunghiurilor MAB și MBC, rezultă că M se află pe mediana (ca dreaptă) din B a triunghiului ABC. Analog, M trebuie să se afle pe mediana din D a triunghiului ADC și pe medianele din A și C ale triunghiurilor BAD și BCD. Deci M trebuie să fie simultan mijloacele segmentelor $|BD|$ și $|AC|$ și de aci concluzia: $ABCD$ este paralelogram. În orice paralelogram există puncte cu proprietatea cerută — centrul paralelogramului. **5.29.** Triunghiurile MAB, MBC, MCA au arii egale dacă și numai dacă M este centrul de greutate al triunghiului. Cealaltă condiție devine $a + \frac{2}{3}(m_b + m_c) = b + \frac{2}{3}(m_c + m_a) = c + \frac{2}{3}(m_a + m_b)$ de unde se deduce că $a = b = c$. **5.30.** Deoarece $\frac{s_1}{s_2} = \frac{\|BA'\|}{\|CA'\|}$ etc., folosind teorema lui Ceva, avem $\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6} = 1$. Folosind teorema mediilor, obținem $\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6} \leqslant \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6}\right)}$ egalitatea avînd loc exact pentru $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{S_5}{S_6}$, deci $3 \leqslant \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6}$ egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{S_5}{S_6} = 1$, adică dacă și numai dacă M este centrul de greutate. **5.31.** Utilizînd problema 3.17 avem $x^2 - (a-x)^2 + y^2 - (b-y)^2 + z^2 - (c-z)^2 = 0$, adică $ax + by + cz = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Pe de altă parte $ad_a + bd_b + cd_c = 2$ aria $[ABC]$. Conform inegalității mediilor avem $(ax + by + cz)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$, egalitatea

realizîndu-se exact pentru $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Obținem $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4(x^2 + y^2 + z^2)$ cu egalitate în cazul menționat. La fel, $(ad_a + bd_b + cd_c)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$ adică $4 \cdot (\text{aria}\,[ABC])^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$ cu egalitate numai cînd M este centrul de greutate al triunghiului. Rezultă $(\text{aria}\,[ABC])^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$, egalitatea realizîndu-se numai în cazul triunghiului echilateral și atunci pentru centrul acestuia.

Capitolul 6

6.1. Toate afirmațiile sînt imediate. Ele trebuie reținute. **6.2.** a) Rezultă din 6.1. ținînd seama că un cerc este determinat de trei puncte. b) Se ține seama că simetricele ortocentrului față de laturi se află pe cercul circumscris. **6.3.** Fie B' simetricul lui B față de bisectoarea unghiului BAC, C' simetricul lui C față de aceasta. Este clar că $B' \in AC$ și $C' \in AB$. Triunghiurile $AB'C'$ și ABC sînt congruente deci $B'C'$ este antiparalelă cu BC. Fie M mijlocul lui $|BC|$. Atunci simetricul lui față de bisectoarea unghiului BAC se află pe simediana din A, dar în același timp este și mijlocul lui $|B'C'|$. **6.4.** Fie C si metricul lui $B \in (d_1)$ față de (d_2). Atunci $\|AM\| + \|MB\| \geqslant \|AC\|$, egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă A, M, C sînt coliniare. Problema revine la a preciza punctul C astfel încît $\|AC\|$ să fie minimă. Punctul C se află pe simetrica (d) a dreptei (d_1) față de (d_2) și $\|AC\|$ este minimă cînd C_0 este piciorul perpendicularei din A pe (d); M este intersecția lui AC_0 cu (d_2), iar B_0 este simetricul lui C_0 față de (d_2). **6.5.** Afirmațiile sînt imediate. **6.6.** Să presupunem că cercurile sînt tagente exterior în A și fie B_1, B_2 diametral-opusele lui A în cercurile date. Fie P_1 simetricul lui M_1 față de M_2; perpendiculara în P_1 pe M_1M_2 taie dreapta BC în punctul C_1. Deoarece $\|M_1M_2\| = \|M_2P_1\|$ rezultă $\|B_1B_2\| = \|B_2C_1\|$, deci C_1 este fix. În consecință, locul lui P_1 este cercul de diametru $|B_2C_1|$. Simetricul lui M_2 față de M_1 descrie cercul simetric celui de mai sus față de punctul A. Aceste cercuri sînt tangente în A cercurilor date, unuia interior, celuilalt exterior. Să presupunem că cercurile sînt tangente interior și că B_1 este între A

Scanned with OKEN Scanner

și B_2. Păstrînd notațiile, rezultă că C_1 este fix și deci P_1 descrie cercul de diametru $|AC_1|$, tangent celor două cercuri date și pe care le conține în interior. Fie P_2 simetricul lui M_2 față de M_1 și C_2 intersecția perpendicularei în P_2 pe M_1M_2 cu dreapta B_1B_2. Atunci C_2 este fix și deci P_2 descrie cercul de diametru $|AC_2|$, care este tangent exterior cercurilor date în punctul A. **6.7.** a) Patrulaterele $AMCB'$, $BMCA'$, $AMBC'$ sînt paralelograme. Deducem că $BC'B'C$ este paralelogram, de aceea $|BB'|$ și $|CC'|$ se taie în mijlocul lor. La fel $|AA'|$ și $|BB'|$ se taie la mijloc, deci cele trei segmente au același mijloc M'. b) În triunghiul AMA', $|MM'|$ este mediană. Deoarece mediana $|AA_1|$ a acestui triunghi este fixă, rezultă că $|MM'|$ trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC. **6.8.** Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$. Patrulaterul $B_1C_1B'C'$ este paralelogram, deci $|B_1B'|$ și $|C_1C'|$ se taie la mijlocul fiecăruia, fie el O. O este și mijlocul lui $|A_1A'|$. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$ sînt deci simetrice față de O. Rezultă că paralela prin A' la MA este simetrica față de O a lui AM etc. Cele trei paraiele din enunț sînt concurente în simetricul lui M față de O. **6.9.** Deoarece simetricul lui H față de BC se află pe cercul circumscris, cercul circumscris triunghiului BHC este simetricul cercului circumscris triunghiului ABC față de BC, centrul acestuia fiind deci simetricul lui O față de BC.

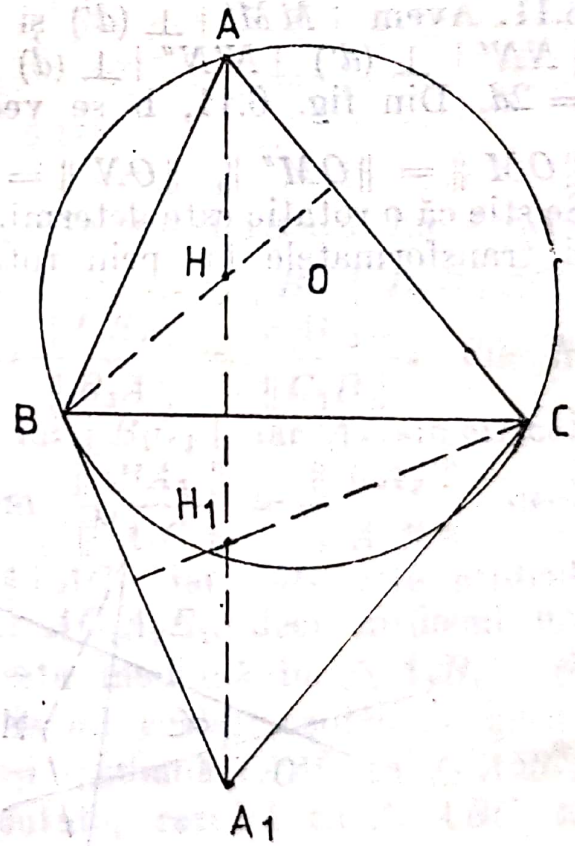


Fig. 6.9

Deoarece $m(\widehat{BOC}) = 120° = m(\widehat{BMC})$, M fiind mijlocul arcului mic $\widehat{BC}$, rezultă că M este simetricul lui O față de BC. Concluzia este clară! **6.10.** Fie (π_1) și (π_2) cele două plane de simetrie perpendiculare ale figurii F, și pe XX' intersecția lor. Dacă M este un punct al figurii atunci simetricul său M_1

Scanned with OKEN Scanner

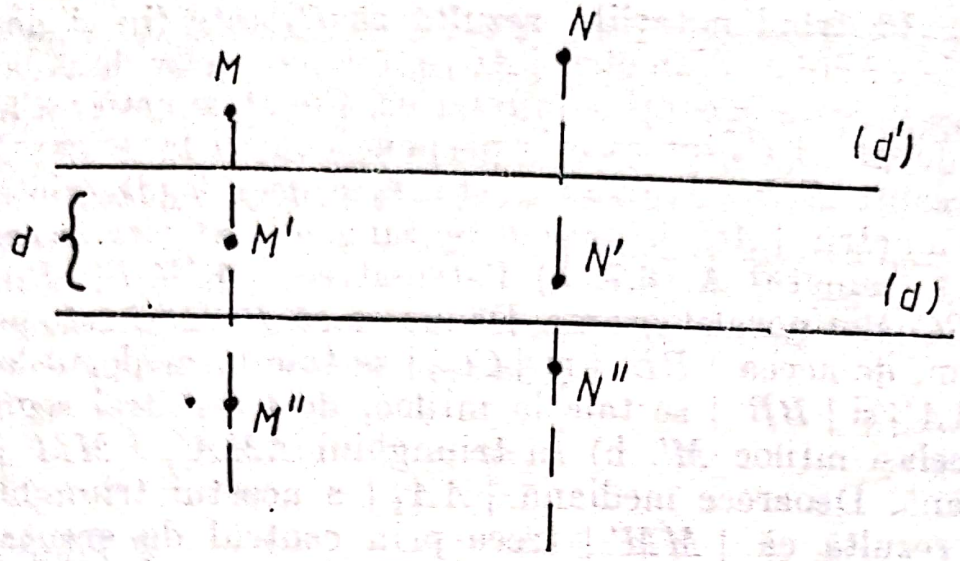


Fig. 6.11, a

față de (π_1) aparține figurii, iar simetricul lui M_1 față de (π_2), M_2, aparține figurii. Dar M_2 este simetricul lui M față de XX'.

6.11. Avem $|MM'| \perp (d')$ și $|M'M''| \perp (d)$ (fig. 6.11, a) $|NN'| \perp (d')$ $|N'N''| \perp (d)$ și $\|MM''\| = \|NN''\| = 2d$. Din fig. 6.11, b se vede că $|MM''| \parallel |NN''|$ și $\|OM\| = \|OM''\|$, $\|ON\| = \|ON''\|$ și $m(\widehat{MOM''}) = 2\alpha$. Se știe că o rotație este determinată dacă se dau două puncte și transformatele lor prin rotație (cu păstrarea distanței

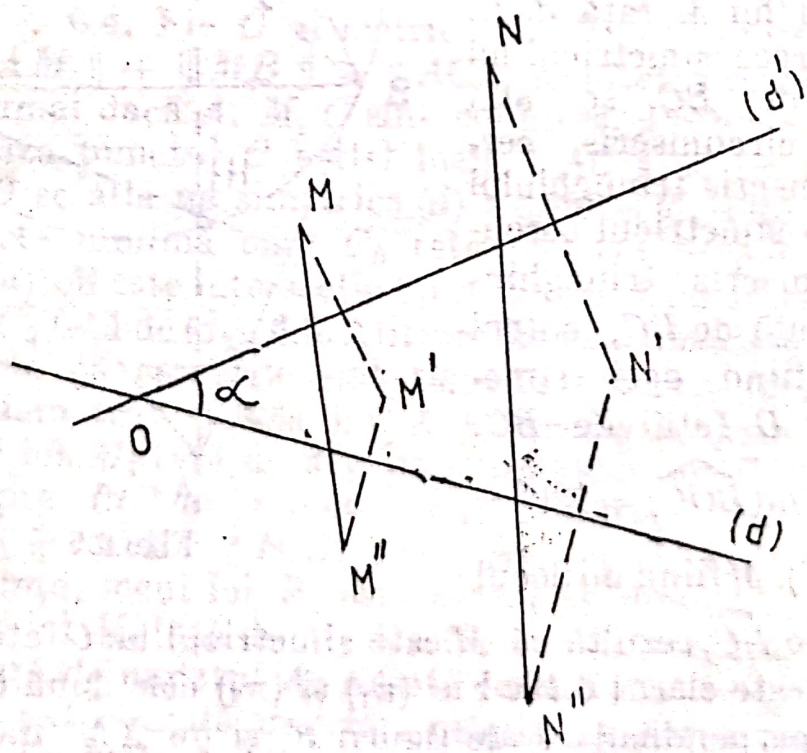


Fig. 6.11, b

dintre puncte). Aici unghiul de rotație este 2α. **6.12.** Fie O_1 și O_2 centrele de simetrie și A un punct oarecare din plan. Dacă A_1 este transformatul lui A prin simetria de centru O_1 și A_2 transformatul lui A_1 prin simetria de centru O_2 (fig. 6.12) rezultă că în $\triangle AA_1A_2$, O_1O_2 este linie mijlocie și

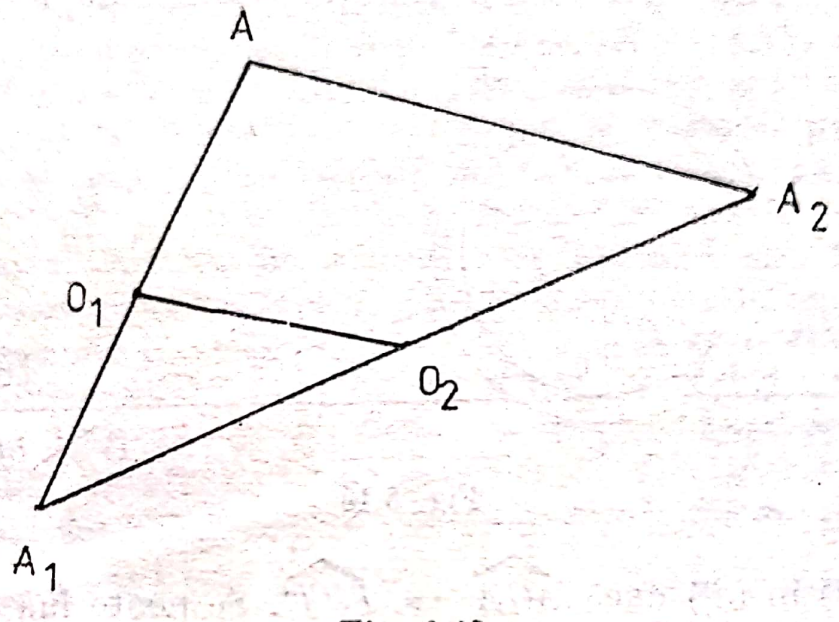


Fig. 6.12

$\| AA_2 \| = 2 \| O_1O_2 \|$ deci A_2 este transformatul lui A prin translația de vector $\overrightarrow{O_1O_2}$. **6.13.** Avem $A_1 \in | BC |$, $B_1 \in | AC |$ și $C_1 \in | AB |$ și $\frac{\| BA_1 \|}{\| A_1C \|} = \frac{\| CB_1 \|}{\| B_1A \|} = \frac{\| AC_1 \|}{\| C_1B \|}$. Fie N mijlocul lui $| BC |$ și M_1 al lui $| B_1C_1 |$, iar A_2 simetricul lui A_1 față de M; avem $\frac{\| BA_1 \|}{\| A_1C \|} = \frac{\| CA_2 \|}{\| A_2B \|}$ deci $| A_2B_1 | \| | AB |$ și $| A_2C_1 | \| | AC |$ iar, M_1 este centrul de simetrie în paralelogramul $AC_1A_2B_1$, deci mijlocul lui $| AA_2 |$. Rezultă că $| A_1M_1 |$ este mediană în $\triangle A_1B_1C_1$ și în $\triangle AA_1A_2$, deci triunghiurile au același centru de greutate. Dar $\triangle AA_1A_2$ are aceeași mediană $|AM|$ ca $\triangle ABC$, deci au același centru de greutate, rezultă că $\triangle ABC$ și $\triangle A_1B_1C_1$ au același centru de greutate. **6.14.** Fie segmentele $| AB |$ și $| BC |$ din figura (F) și $| A'B' |$, $B'C' |$ simetricele lor față de punctul O Avem $| AB | \| | A'B' |$, $| BC | \| | B'C' |$, $\| AB \| = \| A'B' \|$, $\| BC \| = \| B'C' \|$. și $m(\widehat{BOB'}) = 180°$. Deci unghiul de rotație este de $180°$

Scanned with OKEN Scanner

6.15. Fie P punctul de intersecție a dreptelor (d) și (d'). Dreptele date sînt tangente unui cerc cu centrul în centru de rotație O. Unghiul de rotație care transformă pe A în A' este $\widehat{AOA'}$, iar unghiul de rotație care transformă pe (d) în (d') este $\widehat{TOT'}$ (fig. 6.15). Rotația transformă pe A în A'

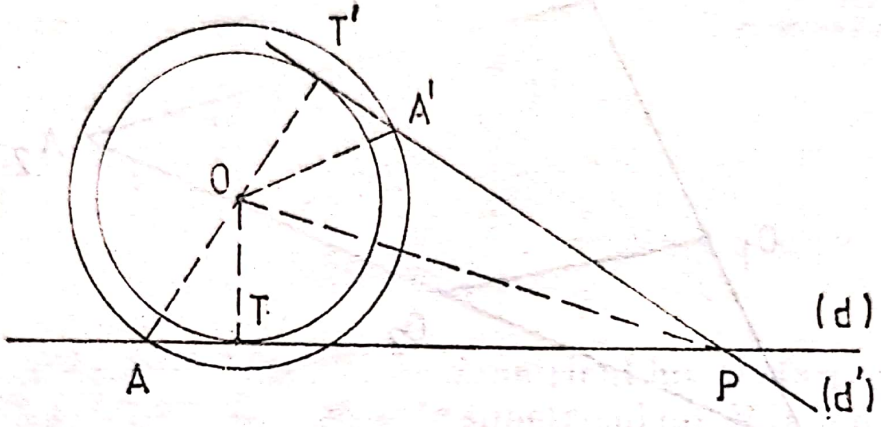


Fig. 6.15

și pe (d) în (d') dacă $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{TOT'}$. Se poate lua și o altă rotație care satisface acestor condiții, luînd centrul de rotație la intersecția mediatoarei segmentului $|AA'|$ cu a doua bisectoare a unghiului dreptelor (d) și (d'). **6.16.** Fie triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ invers egale (fig. 6.16) și fie O

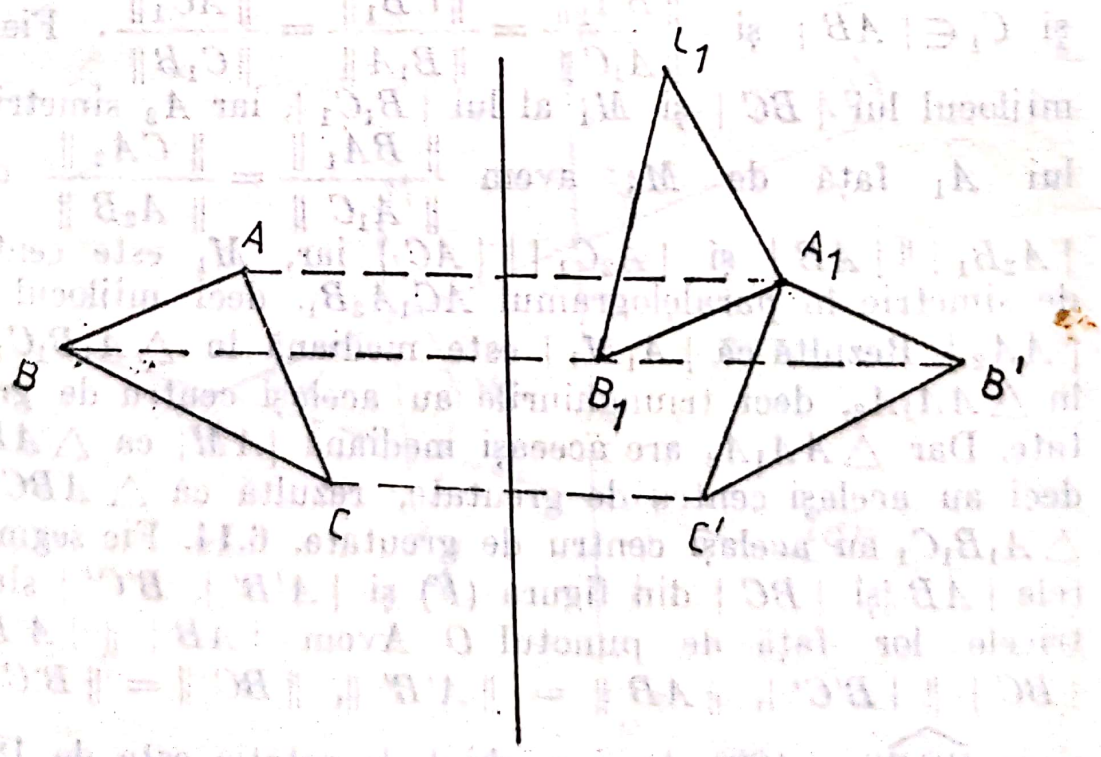


Fig. 6.16

mijlocul segmentului determinat de două puncte corespunzătoare A, A_1 ale celor două triunghiuri. Ducem prin O axa XX' perpendiculară pe AA_1. Prin simetria (S) de axă XX' triunghiului ABC se transformă în triunghiul $A_1B'C'$, iar $A_1B'C'$ se transformă în $A_1B_1C_1$ printr-o rotație (R) de centru A_1 și unghi $C'A_1C_1$. Rezultă că ABC se transformă în $A_1B_1C_1$ prin produsul de transformări $(R.S.)$. **6.17.** Demonstrăm ultima afirmație. Fie C centrul unui cerc și C' omoteticul lui C, iar M' omoteticul unui punct M, variabil pe cercul dat. Atunci, triunghiurile $OC'M'$ și OCM sînt asemenea și prin urmare $\| C'M' \| = \| k \cdot \| CM \|$, astfel că M' se află pe cercul de centru C' și rază kr, r fiind raza cercului dat. Se vede ușor că orice punct de pe cercul de centru C' este omoteticul unui punct de pe cercul dat. **6.19.** a) Fie $Q = PB \cap AD$. Din asemănarea triunghiurilor PNM și PAD deducem $\| AQ \| = \| QB \|$, deci Q este fix. Rezultă că locul geometric al punctului P este semidreapta $[QB$. b) Notînd $\| AQ \| = l$, deducem, din asemănarea triunghiurilor PNB și PAQ, $\| AP \| = k \cdot \| AN \|$, unde $k = \dfrac{l}{l - x}$. Dacă x este constant, atunci N descrie o dreaptă Δ, paralelă cu AB. În acest caz k este constant și urmează că P descrie omotetica dreptei Δ în omotetia de centru A și raport k. **6.20.** Mijlocul A' al segmentului $|BC|$ descrie o circumferință concentrică celei date, deoarece BC este constant. Atunci centrul de greutate al triunghiului BAC descrie o circumferință, omotetică celei descrise de A' în omotetia de centru A și raport $\dfrac{2}{3}$.

Notînd H ortocentrul triunghiului BAC și O centrul circumferinței, punctele O, H, G sînt coliniare (dreapta Euler) și $\| OH \| = 3 \| OG \|$, prin urmare H descrie o circumferință, omotetica celei descrise de G în omotetia de centru O și raport 3. **6.21.** Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Atunci triunghiurile $G_1G_2G_3$ și $M_1M_2M_3$ sînt omotetice în omotetia de centru M și raport $\dfrac{2}{3}$. Rezultă

$$\text{aria } [G_1G_2G_3] = \frac{4}{9} \text{ aria } [M_1M_2M_3] = \frac{1}{9} \text{ aria } [ABC].$$

6.22. a) Evident, punctul M descrie cercul de diametru $|AB|$; deoarece B este fix și $\| BP \| = 2 \cdot \| BM \|$, rezultă că P descrie omoteticul cercului descris de M în omotetia de

centru B și raport 2. b) În triunghiul $P'PQ$, A fiind mijlocul laturii $|PP'|$, rezultă că paralela prin A la PQ este linie mijlocie. Deoarece $\|PQ\| = \|AB\| = 2\|AO\|$, rezultă că $O \in |P'Q|$, deci $P'Q$ trece prin punctul fix O, mijlocul lui $|AB|$. c) Fie $R = P'Q \cap MB \cdot R$ este centrul de greutate al triunghiului ABQ, deci $\|BR\| = \frac{2}{3}\|BM\|$; rezultă că R descrie un cerc, omoteticul cercului de diametru $|AB|$ în omotetia de centru B și raport $\frac{2}{3}$; d) $|P'M|$ și $|AO|$ sînt mediane în triunghiul $AP'Q$. Rezultă că $P'M$ trece prin punctul fix S situat pe AO astfel încît $\|AS\| = 2 \cdot \|SO\|$. **6.23.** Triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sînt omologice (intersecțiile laturilor cîte două sînt coliniare), deci dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sînt concurente (teorema lui Desargues). Deducem că triunghiurile sînt omotetice în omotetia de centru O și raport egal cu raportul de asemănare. **6.24.** Fie O_1 O_2, O_3 centrele celor trei cercuri și A_1, A_2, A_3 vîrfurile triunghiului astfel că O_i este pe bisectoarea unghiului din A_i. Deoarece O_1O_3 este paralelă cu A_1A_3 etc., deducem că triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $O_1O_2O_3$ sînt omotetice, centrul de omotetie fiind intersecția dreptelor A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3 adică centrul I al cercului înscris în triunghiul $A_1A_2A_3$. Deoarece $\|PC_1\| = \|PC_2\| = \|PC_3\|$, rezultă că P este centrul cercului circumscris triunghiului $C_1C_2C_3$. Omoteticul lui trebuie să fie centrul O al cercului circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$, în particular rezultă că I, P, O sînt coliniare. **6.25.** a) Evident. b) Din $\|OA\| \cdot \|OA'\| = \|OB\| \cdot \|OB'\|$ deducem că triunghiurile OAB și $OB'A'$ sînt asemenea, deci $\widehat{OA'B'} \equiv \widehat{OBA}$; analog $\widehat{OC'B'} \equiv \widehat{OBC}$, de unde rezultă că patrulaterul $OA'B'C'$ este inscriptibil. Altfel, fie D piciorul perpendicularei din O pe (d) și $D' = \mathcal{J}(D)$. Pentru $A \in (d)$, ca mai sus, deducem $m(\widehat{OA'D'}) = 90°$, deci A' se află pe cercul de diametru $|OD'|$. Reciproc, pentru orice punct B' situat pe cercul de diametru $|OD'|$, dreapta OB' intersectează pe (d) într-un punct B și din asemănarea triunghiurilor ODB și $OB'D'$ rezultă că B' este transformatul lui B. c) Rezultă cu observația $\mathcal{J}(\mathcal{J}(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$ pentru orice mulțime $\mathcal{M}$. **6.26.** Fie $|AB|$ diametrul ce trece prin O al cercului dat și A', B' transforma-

Scanned with OKEN Scanner

tele punctelor A și B. Fie M un punct variabil pe cercul de diametru $|AB|$ și M' inversul lui M. Atunci $m(\widehat{B'M'A'}) = 90°$ și deci M' se află pe cercul de diametru $|A'B'|$. Deoarece $\mathcal{J}$ este idempotentă, rezultă că transformatul cercului de diametru $|AB|$ este exact cercul de diametru $|A'B'|$. **6.27.** a) Evident. Cercul de inversiune este cea mai mare mulțume invariantă punct cu punct. b) Din $\mathcal{J}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ rezultă $\mathcal{J}(\mathcal{J}(\mathcal{M})) \subset \mathcal{J}(\mathrm{M})$ deci $\mathcal{J}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. c) Inversul unui punct din interiorul (exteriorul) cercului de inversiune este situat în exteriorul (interiorul) acestuia. Deci dacă un cerc este invariant la inversiunea $\mathcal{J}$, atunci el taie cercul de inversiune. Fie (O', r) un astfel de cerc și fie A, B punctele de intersecție cu cercul de inversiune, iar $|CD|$ diametrul lui care trece prin O. Atunci $\|OA\|^2 = \|OC\| \cdot \|OD\|$, ceea ce arată că OA este tangenta în A la cercul (O', r) și deci cercurile sînt ortogonale. Reciproc, dacă cercurile sînt ortogonale, atunci $\|OA\|^2 = \|OC\| \cdot \|OD\|$, deci punctele C și D sînt inverse, de unde rezultă că cercul (O', r) este invariant (dar nu punct cu punct). **6.28.** Să considerăm inversiunea în care cercul circumscris hexagonului este cerc de inversiune. Inversul mijlocului A' al segmentului $|AB|$ este intersecția tangentelor în A și B la cercul circumscris, A_1 etc. Rezultă că transformatul cercului ce trece prin A', O și D' este dreapta A_1D_1 etc. Conform teoremei lui Brianchon, dreptele A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 sînt concurente, ceea ce arată că inversele lor, adică cercurile din enunț au un al doilea punct comun. **6.29.** Să considerăm inversiunea de pol A și putere oarecare $k > 0$ și fie B', A_i', C' inversele punctelor B, A_i, C situate pe cerc. Din ipoteză avem $\|B'A_1'\| = \|A_1'A_2'\| = \ldots = \|A_{n-1}'C\|$. Ținînd seama că $\|B'A_1'\| = \dfrac{k\,\|BA_1\|}{\|AB\|\,\|AA_1\|}$ etc., după simplificare cu k obținem relația din enunț. **6.30.** Cu notații obișnuite, dacă B_1 este piciorul înălțimii din B, avem $\|BH\| = \dfrac{c\cos B}{\sin C}$, $\|HB_1\| = c\cos A\,\mathrm{ctg}\,C$ de unde rezultă $\dfrac{\|HB'\|}{\|HB_1\|} = \dfrac{1}{4\cos A\cos B\cos C}$, care, din simetrie, este și valoarea rapoartelor $\dfrac{\|HA'\|}{\|HA_1\|}$ și $\dfrac{\|HC'\|}{\|HC_1\|}$, deci triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A'B'C'$ sînt omotetice. Rezultă că $A'H$. $B'H$, $C'H$ sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$. Triun-

ghiurile AB_1C_1 și ABC sînt asemenea și cum $\| AB_1 \| = c \cos A$, deducem $\| B_1C_1 \| = a \cos A$, $\| A_1C_1 \| = b \cos B$, $\| A_1B_1 \| = c \cos C$. Deoarece triunghiul ortic și triunghiul median sînt înscrise în același cerc, de rază $\frac{R}{2}$ rezultă că raza r' a cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$ este $r' = \frac{abc \cos A \cos B \cos C}{R(a \cos A + b \cos B + c \cos C)} = 2R \cos A \cos B \cos C$, deoarece $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$; din asemănarea triunghiurilor $A'B'C'$ și $A_1B_1C_1$ deducem raza cercului înscris în $A'B'C'$, $\rho = \frac{R}{2}$. **6.31.** Considerăm inversiunea de centru O și de putere R^2, adică aceea în care cercul de inversiune este cercul ABC, deci invariant punct cu punct. În această inversiune, transformatul punctului A' este punctul de intersecție al tangentelor în punctele C și B la cercul ABC, fie acesta A_1. Transformatele punctelor B' și C' sînt analoagele punctului A_1. Prin urmare inversul cercului AOA' este dreapta AA_1, inversul cercului BOB' este dreapta BB_1, iar inversul cercului COC' este dreapta CC_1. Observăm că triunghiului $A_1B_1C_1$ are drept cerc înscris cercul circumscris triunghiului ABC, prin urmare dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente în punctul Gergonne al triunghiului $A_1B_1C_1$, fie el J. Deducem că cercurile AOA', BOB', COC' au un al doilea punct comun, anume inversul punctului J în inversiunea considerată. **6.32.** O inversiune cu centrul O și putere R^2 invariază cercul circumscris triunghiului ABC, punct cu punct, transformă cercurile circumscrise triunghiurilor OAB, OBC, OCA în dreptele AB, BC și respectiv CA (verificați afirmația!); dreapta (d) este transformată în ea însăși, inversul punctului C' este intersecția dreptelor (d) și AB, C_1, al punctului A' este punctul A_1 intersecția dreptelor (d) și BC, iar al punctului B' este intersecția B_1 a dreptelor (d) și AC. Deoarece $\| OA' \| = \frac{R^2}{\| OA_1 \|}$ și încă două analoage, cu observația $\| AB \|^2 = 3R^2$, relația de demonstrat este echivalentă cu $\frac{1}{\| OA_1 \|^2} + \frac{1}{\| OB_1 \|^2} + \frac{1}{\| OC_1 \|^2} = \frac{6}{R^2}$. Notînd prin α măsura

Scanned with OKEN Scanner

unghiului dreptelor (d) şi BC (presupunem că (d) intersectează laturile $|AB|$ şi $|AC|$ în interior) avem $\|OA_1\| = \frac{R}{2\sin\alpha}$; $\|OB_1\| = \frac{R}{2\sin(60+\alpha)}$; $\|OC_1\| = \frac{R}{2\sin(60-\alpha)}$ şi relaţia de mai se verifică cu uşurinţă. **6.33.** Într-o inversiune de pol P enunţul se transformă în afirmaţia problemei 1.98. **6.34.** Fie Ω centrul cercului tangent cercului circumscris triunghiului ABC şi laturilor $|AB|$ şi $|AC|$ şi T punctul de tangentă a celor două cercuri. Din simetria figurii faţă de înălţimea din A a triunghiului dat, rezultă că punctele A, Ω, M, T sînt coliniare, M fiind mijlocul laturii BC. Să considerăm omotetia de centru A şi care transformă punctul T în M. Deoarece omotetia este o transformare conformă care transformă cercuri în cercuri, rezultă că cercul de centru Ω se transformă într-un cerc care este tangent dreptelor AB şi AC şi care trece prin M (transformatul lui T), deci în cercul înscris triunghiului ABC şi, cum centrele se păstrează în transformarea prin omotetie, omoteticul lui Ω este centrul cercului înscris; fie I intersecţia dreptelor AT şi PQ. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ACT şi $A\,\Omega\,Q$ deducem $\frac{\|A\Omega\|}{\|AI\|} = \frac{\|AT\|}{\|AM\|}$ astfel că I este transformatul în omotetia aleasă a punctului Ω, ceea ce demonstrează afirmaţia. **6.35.** Considerăm inversiunea în care cercul dat este cerc de inversiune. Atunci transformatul cercului AOA' este dreapta AA', cercurile BOB' şi COC' se transformă în dreptele BB' şi respectiv CC'. Fie P' punctul comun acestor drepte şi P inversul lui P'. Deoarece inversiunea este o transformare idempotentă, rezultă că punctul P este comun cercurilor AOA', BOB', COC'. **6.36.** Începem cu observaţia următoare: Fie ABC un triunghi oarecare A_1 mijlocul laturii $|BC|$, T_a punctul de tangenţă al cercului înscris cu latura $|BC|$, A' simetricul lui T_a faţă de A_1; atunci dreptele AA', BB' şi CC' sînt concurente şi anume în centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$, I_1 şi, în plus, AA' înjumătăţeşte perimetrul triunghiului ABC. Acum rămîne doar să observăm încă odată că triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi ABC sînt omotetice în omotetia de centru G (intersecţia dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 — important fapt!) şi de raport -2 şi rezultatul se impune.

Scanned with OKEN Scanner

7.1. a) Diagonalele paralelogramului sînt date de vectorii $\vec{a}+\vec{b}=4\vec{c}+\vec{j}+2\vec{k}$ și $\vec{a}-\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ iar unghiul dintre ele este de $\sin(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=\dfrac{|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}$.

Avem $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&1&2\\3&2&-4\end{vmatrix}=-10\vec{c}+20\vec{j}+10\vec{k}$ și $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}|)=10\sqrt{6}$, $|\vec{a}+\vec{b})=\sqrt{21}$, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{29}$ deci $\sin(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=10\sqrt{\dfrac{2}{203}}$. b) $\vec{b}\times\vec{c}=9\vec{j}+3\vec{k}$, iar $\mathrm{pr}_{\vec{b}\times\vec{c}}\vec{a}=\dfrac{(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **7.3.** Un punct oarecare de pe bisectoarea unghiului O are vectorul de poziție $\vec{r}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\|OB\|}+\dfrac{\overrightarrow{OC}}{\|OC\|}\right)=\lambda\vec{a}$. Perpendiculara coborîtă din mijlocul lui $|BC|$ pe bisectoarea unghiului O are ecuația $\left(\vec{r}-\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)\cdot\vec{a}=0$. Punctul ei M de intersecție cu latura $|AB|$ are vectorul de poziție $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OB}$ unde λ trebuie determinat. Avem $\vec{a}\cdot\left(\lambda\overrightarrow{OB}-\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)=0$, $\lambda\,\overrightarrow{OB}\cdot\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\vec{a}$, $\lambda=\dfrac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\vec{a}}{\overrightarrow{OB}\cdot\vec{a}}$ deci

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\vec{a}}{\overrightarrow{OB}\cdot\vec{a}}\cdot\overrightarrow{OB}\text{ și }\|\overrightarrow{OM}\|=\frac{1}{2}(\|OB\|+\|OC\|)$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog pentru segmentul determinat pe $|AC|$. **7.4.** Fie punctele fixe A şi B şi O originea axelor de coordonate din plan. Notăm $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Avem $\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{b} + \overrightarrow{BP}$ de unde rezultă $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BP} = \vec{r} - \vec{b}$. Ştim că $\frac{\| AP \|}{\| BP \|} = k$ deci $\frac{(\vec{r} - \vec{a})^2}{(\vec{r} - \vec{b})^2} = k^2$ sau $r^2(1 - k^2) - 2\vec{r}(\vec{a} - \vec{k^2 b}) = k^2 b^2 - a^2$ (1). Originea este arbitrară deci o putem alege aşa încît să avem $\vec{a} = k^2 \vec{b}$. Cu aceasta relaţia (1) devine $r^2 = \overrightarrow{OP}^2 = \frac{k^2 b^2 - a^2}{1 - k^2}$, dar $a^2 = k^4 b^2$ deci $\overrightarrow{OP}^2 = k^2 b^2$. Din $\vec{a} = k\vec{b}$ avem $\vec{ab} = k^2 b^2$ deci $\overrightarrow{OP}^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$ rezultă $\| OP \| =$ constant. P descrie un cerc de rază $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{b}}$. **7.5.** Fie patrulaterul $ABCD$ şi M, N mijloacele diagonalelor $|AC|$ respectiv $|BD|$. Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NB} = -\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ deci $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{MN}$. Ridicînd la pătrat aceste relaţii şi adunîndu-le obţinem: $\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CD \|^2 + \| DA \|^2 = \| AC \|^2 + \| BD \|^2 + 4 \| MN \|^2$. Rezultatul rămîne valabil şi în cazul unui patrulater strîmb. **7.6.** Avem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AM}$. Dar $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PA}$ de unde $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PA}^2$ şi $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PA}^2$. Scăzînd aceste relaţii obţinem $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$ deci $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. **7.7.** Trebuie arătat că $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$ unde N

Scanned with OKEN Scanner

este mijlocul lui $|MD|$. Avem $\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ deci $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HN} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AN}$. Din teorema medianei, ținînd seama de relația din enunț rezultă $\|AD\|^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = a^2$, deci $\|AN\| = \frac{3}{4}a$ și $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}a^2$. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = \|AH\| \operatorname{pr}_{|AH|} |AD| = \|AH\| \cdot \|AA'\|$, A' fiind piciorul înălțimii coborîte din A. Notînd prin O centrul cercului circumscris, ținînd seama de relația $\|AH\| = 2\|OD\| = 2R\cos A = R\frac{3a^2}{2bc}$ (ținînd seama de relația din enunț), iar $bc = 2R\|AA'\|$, deci $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{3a^2}{4}$ și $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HN} = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = 0$. **7.8.** a) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ deci $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG} \operatorname{pr}_{\overrightarrow{MG}} \overrightarrow{GA}$ și analog pentru celelalte, deci $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\operatorname{pr}_{\overrightarrow{MG}}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$, dar $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. b) Avem $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ deci $9\overrightarrow{OG}^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})$. Din $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$ rezultă $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - a^2$, $2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - c^2$, $2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - b^2$. Dar $\overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OB}^2 = \overrightarrow{OC}^2 = R^2$ deci $9\overrightarrow{OG}^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$. **7.9.** a) $2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ și $2\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. b) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$. c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ și $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$, $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB'}$ și $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC'}$

Scanned with OKEN Scanner

care adunate și ținînd seama de egalitatea anterioară conduc la rezultat. d) $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Analog pentru celelalte. Făcînd produsele scalare, însumarea lor conduce la rezultat. **7.10.** a) Fie M' proiecția lui M pe $|AB|$. Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM'} = \text{const.}$ deci $\overrightarrow{AM'} = \text{const.}$ Rezultă M' fix, deci orice punct M din plan se proiectează pe $|AB|$ în M'. Locul geometric al lui M este o dreaptă perpendiculară pe $|AB|$ în M'. b) Fie cercul (O) de diametru $|AB|$ și $\overrightarrow{MB'}$ proiecția vectorului $\overrightarrow{MB}$ pe direcția $\overrightarrow{MA}$ avem $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB'}$. Punctul B' aparține cercului de diametru $|AB'|$ deci $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}$ este puterea punctului M față de cercul (O). Dacă M este exterior cercului produsul scalar este pozitiv, dacă M este interior produsul scalar este negativ iar pentru M pe cerc avem $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$. Relația din enunț ne spune că M are puteri egale față de cercurile de diametre $|AB|$ și $|CD|$, deci se găsește pe axa lor radicală. **7.11.** a) Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = bc\cos A = bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{a}$. Analog pentru celelalte produse scalare. b) Dacă notăm prin A', B', C', mijloacele segmentelor $|BC|$, $|CA|$ și respectiv $|AB|$ avem $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

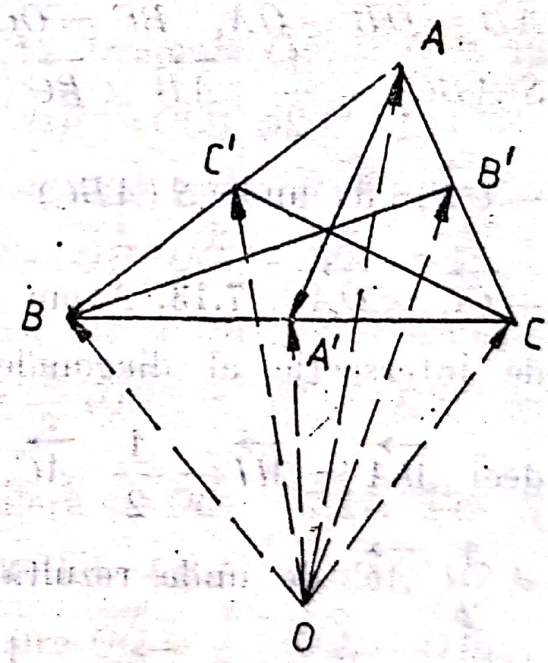


Fig. 7.11

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = 0$. c) Fie $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ vectorii de poziție ai vîrfurilor respectiv ai mijloacelor laturilor triunghiului (fig. 7.11).

Scanned with OKEN Scanner

Avem: $\overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2}$, $\overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ și $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$, iar $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{OA} = 2\left[\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} - \overrightarrow{AA'}\right]$ de unde $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Analog pentru ceilalți vectori. Obținem în felul acesta același vector de poziție pentru centrul de greutate. **7.12.** Știm că într-un triunghi avem relația $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$, de unde $\overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA} = 0$ sau $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$, iar din $\overrightarrow{BC} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0$ rezultă $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA}$. Notăm prin $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vectorii de poziție ai vîrfurilor. Avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ și $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$. $S(ABC) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})|$ de unde $S(ABC) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}|$. **7.13.** Avem $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ cu I punctul de intersecție al diagonalelor $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ deci $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ de unde rezultă prin ridicare la pătrat că $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2$. Analog obținem că $\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2$. **7.14.** Se știe că H, O', G, O sînt coliniare, O' este mijlocul lui $|HO|$ și $\|HG\| = \frac{2}{3}\|HO\|$. Avem $2\overrightarrow{IO'} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IO}$ de unde $4\|IO'\|^2 = \|IH\|^2 + \|IO\|^2 + 2\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IO}$. Din $3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IH} + 2\overrightarrow{IO}$

Scanned with OKEN Scanner

prin ridicare la pătrat avem $9 \| IG \|^2 = \| IH \|^2 + 4 \| IO \|^2 + 4 \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IO}$. **7.15.** Considerăm originea O a planului în punctul A şi fie B proiecţia punctului A pe dreapta (d). Avem $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = \| OM \| \cdot \| AB \| \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}) = \| AB \|^2$ deci ecuaţia dreptei (d) este $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB'} = \| AB \|^2$. Punctul curent P al locului geometric satisface condiţia $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{PO}$ sau $\overrightarrow{OM} = (1 + k)\overrightarrow{OP}$. Înlocuind pe $\overrightarrow{OM}$ în ecuaţia dreptei obţinem $(1 + k) \cdot \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \| AB \|^2$ sau $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{\| AB \|^2}{1 + k}$ Locul geometric este o dreaptă paralelă cu (d). **7.16.** Considerăm originea axelor de coordonate în O. Dacă notăm prin R şi R' razele celor două cercuri, ecuaţiile lor se scriu $(O) : \overrightarrow{OM}^2 = R^2$ şi $(O') : (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'})^2 = R'^2$, iar ecuaţia axei radicale este $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1/2(\overrightarrow{OO'}^2 - R'^2 + R^2)$ (1). Dreptele OP şi $O'P$ au ecuaţiile vectoriale: $(OP) : \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = O(2)$ şi $(O'P) : \overrightarrow{O'P} \cdot \overrightarrow{O'M} = 0$. Ecuaţia lui $(O'P)$ se mai scrie: $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}) \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}) = 0$ sau $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OO'}^2 = 0$ (3). Din relaţiile (1), (2) şi (3) găsim ecuaţia locului geometric: $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OO'}^2 - R^2 + R'^2)$ şi reprezintă o dreaptă perpendiculară pe $\overrightarrow{OO'}$. **7.17.** Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Atunci $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ şi prin urmare $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Fie acum M un punct oarecare astfel încît $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; rezultă $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG}$ şi deci $M \equiv G$. Luînd $O \equiv M$ obţinem a doua parte a enunţului. **7.18.** Verificare facilă. **7.19.** Dacă $ABCD$ este paralelogram atunci $O_1 \equiv O_2$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ şi relaţia se verifică. Reciproc, se observă că în general are loc $2\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, de unde, folosind

Scanned with OKEN Scanner

relaţia din enunţ rezultă $\overrightarrow{O_1O_2} = O$ (vectorul nul) şi de aci concluzia. **7.20.** Deoarece punctele A, M, B sînt coliniare avem $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM}$ şi la fel $\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DC} = q\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{ON} = r\overrightarrow{OM}$, de unde ţinînd seama că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{ON}$, rezultă $p\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DB} = m(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})$ şi $p\overrightarrow{AO} + q \cdot \overrightarrow{DB} = n(\overrightarrow{AO} + r\overrightarrow{OM})$. Eliminînd pe $\overrightarrow{DB}$, deducem $(p + mq - qp - n)\overrightarrow{AO} = (nr - mq)\overrightarrow{OM}$ şi deci $p + mq = pq + n$ şi $nr = mq$ care sînt tocmai relaţiile din enunţ. **7.21.** Notînd k valoarea comună a rapoartelor din enunţ, avem $\overrightarrow{OA'} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OC}$ şi încă două similare de unde găsim $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ceea ce arată, conform 7.17. că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate. **7.22.** Arătăm că punctele B' şi C' sînt egal depărtate de dreapta OA'. Fie B_1 şi C_1 proiecţiile acestor puncte pe OA' şi D piciorul înălţimii din A în triunghiul ABC. Atunci triunghiurile dreptunghice ADB, $C'C_1O$ sînt congruente, deci $\| C'C_1 \| = \| AD \|$. Analog $\| B'B_1 \| = \| AD \|$, astfel că $| OA' |$ este mediană şi prin urmare O este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. **7.23.** Fie O un punct în plan şi segmentele $| OA' |$, $| OB' |$, $| OC' |$ ca în problema precedentă. Atunci O este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ şi prin urmare $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = 0$. Deoarece $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA_1}$ etc., deducem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ şi cum $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{CC_1}$ rezultă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, ceea ce demonstrează afirmaţia. **7.24.** Fie punctele X, Y, U, V într-un plan şi Z, W mijloacele segmentelor $| XY |$, $| UV |$, iar O un punct oarecare. Atunci $\overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY})$, $\overrightarrow{OW} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV})$ de

Scanned with OKEN Scanner

unde $\overrightarrow{ZW} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XU} + \overrightarrow{YV})$. Cu aceste rezultate, avem $\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EC})$ și încă două similare cu $\overrightarrow{MQ}$ și $\overrightarrow{PS}$, de unde găsim $\overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS} = 0$, prin urmare $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{PS}$ și atunci $\| NR \|^2 = \| MQ \|^2 + \| RS \|^2 + 2\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{PS}$. Condiția din enunț este echivalentă, deci, cu $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$, care exprimă perpendicularitatea dreptelor MQ și PS. **7.25.** Notînd $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{z}$, avem $\overrightarrow{BC} = \vec{y} - \vec{x}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{z} - \vec{x}$. $\overrightarrow{DC} = \vec{y} - \vec{z}$ și condiția din enunț este echivalentă cu $\vec{x} = \vec{y} - \vec{z}$ care exprimă paralelismul dreptelor AD și CD și congruența $| AB | = | CD |$. b) Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor $| AB |$, $| BC |$, $| CD |$, $| DA |$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Atunci $MNPQ$ este paralelogram și avem $2(\| MP \|^2 + \| NQ \|^2) = \| AC \|^2 + \| BD \|^2$, ceea ce impune concluzia ținînd seama de a). **7.27.** Fie O un punct în planul triunghiului din care pleacă mobilul M și fie A_1, B_1 C_1 ..., A_n, B_n, C_n, ... punctele de schimbare a direcției la prima etapă, ..., la etapa a $n - a$. Avem $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB_1}$, ..., $\overrightarrow{OA_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC_n}$, $\overrightarrow{OB_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_{n+1}}$, $\overrightarrow{OC_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB_{n+1}}$. De aici deducem $\overrightarrow{OA_{n+1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OA_n}$, astfel că punctul A_n are ca limită punctul A_0 caracterizat de $\overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{7}(4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB})$. Analog punctele B_n și C_n au ca limite punctele B_0 și C_0 caracterizate de $\overrightarrow{OB_0} = \frac{1}{7}(4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ și $\overrightarrow{OC_0} = \frac{1}{7}(4\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA})$ și de aici concluzia. **7.28.** Fie O_1 și O_2 centrele celor două cercuri, T,

mijlocul segmentului $|O_1O_2|$ și pentru $M_1 \in \mathcal{C}_1$, $M_2 \in \mathcal{C}_2$ fie X mijlocul lui $|M_1M_2|$. Rezultă $\overrightarrow{TX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2})$ și deci TX este paralel cu cele două plane și cum T este fix, deducem că X se află în planul prin T paralel cu cele ale cercurilor. Pe de altă parte $\|TX\|^2 = (\|O_1M_1\|^2 + \|O_2M_2\|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{O_1M_1} \cdot \overrightarrow{O_2M_2})$ și cum $|\overrightarrow{O_1M_1} \cdot \overrightarrow{O_2M_2}| \leqslant \|O_1M_1\| \, \|O_2M_2\|$, deducem $\frac{1}{2}|R_1 - R_2| \leqslant \|TX\| \leqslant \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Locul geometric este coroana circulară astfel descrisă. **7.29.** Vectorul $\vec{a}$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii $\overrightarrow{MA}$ și $\overrightarrow{MB}$, el fiind constant, direcția sa (Δ) este fixă și sensul cunoscut deci planul (MAB) este determinat. Modulul vectorului $\vec{a}$ este egal cu de două ori aria triunghiului MAB și este constant. Punctele M care satisfac relația dată vor fi situate pe o dreaptă paralelă cu AB așa încît $S(MAB) = \frac{|\vec{a}|}{2}$. **7.30.** Fie O originea sistemului de coordonate din spațiul. Avem $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}$ și $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. Dacă $|AB| \perp |DC|$ și $|CB| \perp |DA|$ avem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ deci $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$. **7.31.** a) Fig. 7.31. Fie vectorul $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$, el este perpendicular pe planul $(CDEF) \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = \|BN\| \cdot \|AF\| \cdot \cos 45° - \|AM\| \cdot \|AD\| \cdot \cos 45° = 0$. b) Dacă notăm prin I mijlocul lui $|MN|$ și prin Q mijlocul lui $|AB|$, iar prin $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ versorii

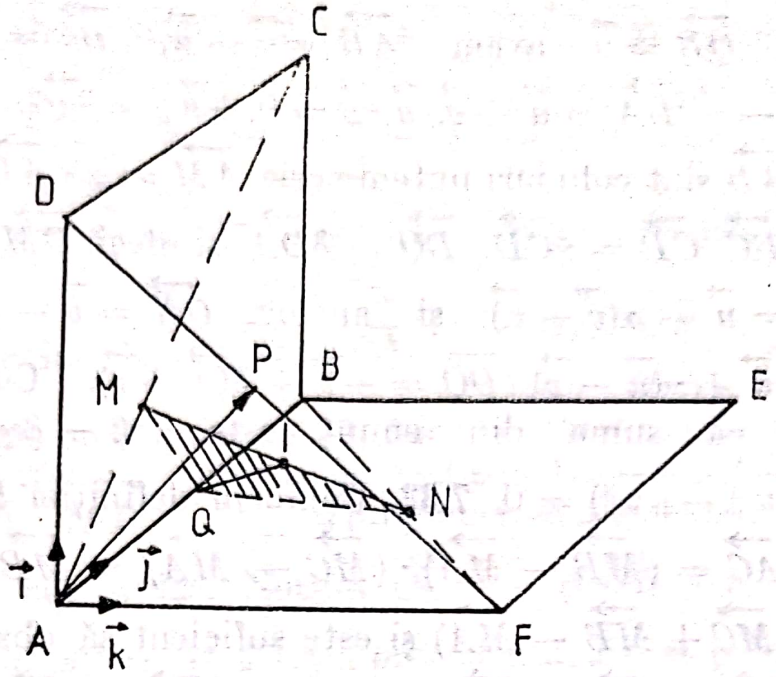


Fig. 7.31

direcțiilor $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$ avem $\overrightarrow{AD} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{AF} = a\vec{k}$ cu a latura pătratului. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})$. Luînd $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}$ avem $\overrightarrow{BN} = \lambda\overrightarrow{BF}$ deci $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}[\lambda a(\vec{i} + \vec{j}) + a\vec{j} + \lambda a(\vec{k} - \vec{j})] = \frac{a}{2}[\lambda\vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}]$. Deci I are coordonatele $\left(\frac{a\lambda}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\lambda}{2}\right)$, $x = \frac{a\lambda}{2}$ ne arată că I aparține planului mediator al segmentului $|AB|$, iar $y = \frac{a}{2}$ ne spune că I aparține planului bisector al diedrului cu muchia AB. Deci I descrie bisectoarea unghiului plan al unghiului diedru cu muchia AB cu vîrful în Q, mărginită de planul $(CDEF)$. c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = -a\lambda\vec{i} + (1 - 2\lambda)a\vec{j} + a\lambda\vec{k}$ și $\|MM\| = a\sqrt{6\lambda^2 - 4\lambda + 1}$. Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ avem $\|MN\|_{\min} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Avem $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = a(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ deci $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{MN}$. **7.32.** Notînd

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ avem $\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = -\vec{u} - \vec{v}$. $\overrightarrow{CD} = \vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Deoarece $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{AB}$ sînt coliniari putem scrie $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$; analog, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = \delta\overrightarrow{DA}$ și deci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \vec{u} + \alpha(\vec{v} - \vec{u})$ și analog $\overrightarrow{ON} = \vec{v} - \beta(\vec{u} + \vec{v})$, $\overrightarrow{OP} = -\vec{u} + \gamma(\vec{u} - \vec{v})$ $\overrightarrow{OQ} = -\vec{v} + \delta(\vec{u} + \vec{v})$. Cu aceasta, deducem că suma din enunț este $(\alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \alpha\delta)(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|) = 0$. **7.33.** Conform definiției $bc \cos \alpha = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$ și este suficient să observăm că $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$ deoarece $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB}$. **7.34.** Fiind dată o rotație de centru Ω și de unghi φ, $\vec{v}$ un vector cu originea în Ω, $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega M}$, notăm prin $\vec{v}_\varphi$ vectorul $\overrightarrow{\Omega M_\varphi}$ unde M_φ este transformatul în rotația considerată a punctului M. Evident, $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}_\varphi\|$ și pentru doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ cu originea în Ω are loc $\vec{u}_\varphi \cdot \vec{v}_\varphi = \vec{u} \cdot \vec{v}$ deoarece rotația păstrează unghiurile. Să remarcăm și faptul că putem presupune că triunghiurile echilaterale date pot fi presupuse de același centru, deoarece putem ajunge la această situație printr-o translație de vector $\overrightarrow{OO'}$, transformare care invariază distanțele (și unghiurile). Fie atunci $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{OA'} = \vec{v}$. Rezultă $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \vec{v} - \vec{u}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB} = \vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} - \vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}$ și $\overrightarrow{OP} = \vec{v}_{\frac{4\pi}{3}} - \vec{u}_{\frac{4\pi}{3}}$. Cu acestea deducem $\|OM\|^2 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|ON\|^2 = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{ON} = \|\vec{v}_{\frac{2\pi}{3}}\|^2 + \|\vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}\|^2 - 2\vec{u}_{\frac{2\pi}{3}} \cdot \vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = \|OM\|^2$, ținînd seama de afirmațiile de mai sus. Așadar $\|OM\| = \|ON\| = \|OP\|$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = (\vec{v} - \vec{u})(\vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} - \vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}) =$ $= \|\vec{v}\|^2 \cos\frac{2\pi}{3} + \|\vec{u}\|^2 \cos\frac{2\pi}{3} - \vec{u} \cdot \vec{v}_{\frac{2\pi}{3}} - \vec{v} \cdot \vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}$. Observînd că, în general $\vec{v}_\varphi \cdot \vec{u} + \vec{u}_\varphi \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{v} \cos\varphi$, rezultatele anterioare conduc la $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \dfrac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{\|OM\| \|ON\|} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$ și concluzia se impune. **7.35.** Fie O centrul paralelogramului $ABCD$ astfel că vîrfurile au ordinea trigonometrică A, B, C, D, și fie BED și ACF triunghiuri echilaterale cu ordinea vîrfurilor cea scrisă. Notînd $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$ și $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, obținem, utilizînd notațiile din soluția precedentă, $\overrightarrow{EF} = \sqrt{3}(\vec{v}_{\frac{\pi}{2}} - \vec{u}_{\frac{\pi}{2}})$ și $\overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$, ceea ce conduce la $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, folosind observația din finalul soluției precedente.

Capitolul 8

8.1. Dreptele date se intersectează în punctul $A\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. Celelalte laturi ale paralelogramului sînt paralele cu dreptele date deci au ecuațiile $y = -2xn_1$ respectiv $y = -\frac{1}{2}x + n_2$. Scriind că ele trebuie să treacă prin punctul A așa încît distanța de la C la centrul paralelogramului să fie egală cu distanța de la centru la punctul A, găsim $n_1 = 5$ și $n_2 = \frac{11}{2}$. **8.2.** Avem $y - 2 = m(x + 3)$. Scriind că distanța de la origine la dreaptă este egală cu 4 găsim $m = \frac{12}{7}$. **8.3.** a) Avem $A(3, 4)$, $B(1, 2)$, $C(2, 0)$. Fie $P(\alpha, \beta)$ punctul interior. Din $S_{APB} = S_{BPC} = S_{CPA}$ găsim $\alpha = 2$, $\beta = 2$, deci $P(2, 2)$. b) Notînd cu A', B', C' mijloacele laturilor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ avem $A'\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, $B'\left(\frac{5}{2}, 2\right)$,

Scanned with OKEN Scanner

$C'(2, 3)$, iar ecuațiile medianelor sînt $(AA') \equiv 2x + y - 2 = 0$, $(BB') \equiv y - 2 = 0$, $(CC') \equiv x - 2 = 0$. Înălțimile triunghiului au ecuațiile $(AA'') \equiv x - 2y + 5 = 0$, $(BB'') \equiv x + 4y - 10 = 0$ și $(CC'') \equiv x + y - 3 = 0$. **8.4.** Avem $\| AB \| = 3 = \| A'B' \|$, $\| AC \| = 4 = \| A'C' \|$ și $\| BC \| = 5 = \| B'C' \|$. Prin izometrie punctul $M(x, y)$, din plan este transformat în punctul $M'(x', y')$ unde $x' = ax + by + h$, $y' = cx + dy + k$, $a, b, c, d, h, k \in \mathbf{R}$. Din condițiile $A' = J(A)$, $B' = J(B)$, $C' = J(C)$ rezultă $a = \frac{-3}{5}$, $b = \frac{4}{5}$, $h = 3$, $c = \frac{4}{5}$, $d = \frac{3}{5}$, $k = -3$. Avem deci izometria dată de relațiile: $x' = \frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + 3$; $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3$. **8.5.** a) Fie A, B și C vîrfurile triunghiului unde $A\left(\frac{99}{25}, \frac{-11}{50}\right)$ se obține ca intersecție a dreptelor (d_1) și (d_2), $B\left(\frac{-15}{21}, \frac{23}{7}\right)$ ca intersecție a dreptelor (d_1) și (d_3), iar $C\left(-\frac{765}{253}, -\frac{571}{253}\right)$ ca intersecție a dreptelor (d_2) și (d_3). b) Exprimînd proprietatea punctelor bisectoarei, pentru bisectoarele unghiurilor din A avem ecuațiile $\frac{3x + 4y - 11}{\sqrt{9 + 16}} = \pm \frac{7x - 24y - 33}{\sqrt{49 + 576}}$ sau $\frac{3x + 4y - 11}{5} = \pm \frac{7x - 24y - 33}{25}$. Ecuațiile $E_1 \equiv 4x + 24y - 11 = 0$, $E_2 \equiv 11x - 2y - 44 = 0$ caracterizează cîte o bisectoare. Considerînd punctul $M_1\left(\frac{11}{3}, 0\right)$ și $M_2\left(\frac{33}{7}, 0\right)$, deoarece $E_1\left(\frac{11}{3}, 0\right) = \frac{44}{3} - 11 > 0$, $E_1\left(\frac{33}{7}, 0\right) = \frac{132}{7} - 11 > 0$, iar $E_2\left(\frac{11}{3}, 0\right) = \frac{12}{3} - 44 < 0$, $E_2\left(\frac{33}{7}, 0\right) = \frac{363}{7} - 44 > 0$ rezultă că bisectoarea interioară este $11x - 2y - 44 = 0$. Analog pentru unghiul din B găsim bi-

Scanned with OKEN Scanner

sectoarele $E_1' \equiv 21x - 77y + 268 = 0$ şi $E_2 \equiv 11x + 3y - 2 = 0$ dintre care bisectoarea interioară este $11x + 3y - 2 = 0$. Pentru unghiul din C găsim bisectoarele $209x + 187y + 1\,054 = 0$ şi $391x - 437y + 196 = 0$. c) Coeficienţii unghiulari ai dreptelor (d_1), (d_2) şi (d_3) sînt respectiv $m_1 = -\frac{3}{4}$, $m_2 = \frac{7}{24}$, $m_3 = \frac{12}{5}$, deci dreptele căutate sînt $y + \frac{11}{50} = \frac{12}{5}\left(x - \frac{99}{25}\right)$, $y - \frac{23}{7} = \frac{7}{24}\left(x + \frac{15}{21}\right)$, $y + \frac{571}{253} = -\frac{3}{4}\left(x + \frac{765}{253}\right)$. **8.6.** Fie vîrfurile triunghiului $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, d)$. Dacă unul din vîrfurile dreptunghiului înscris situat pe $|BC|$ are coordonatele $x = \alpha$, $y = \beta$ găsim pentru centrul dreptunghiului coordonatele $x = \frac{d(\alpha + a) + \beta(c - a)}{ad}$, $y = \frac{\beta}{2}$ şi $\frac{\alpha - b}{c - b} = \frac{\beta}{d}$. Eliminînd α şi β găsim la loc geometric dreapta $2dx + 2y(a + b - 2c) - d(b + a) = 0$. **8.7.** Luăm $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, b)$. Ecuaţia dreptei BC este $bx + ay - ab = 0$ deci $P(\alpha, \frac{b}{a}(a - \alpha))$. Rezultă $D\left(\alpha - \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha), 0\right)$, $E\left(0, b - \frac{\alpha(a^2 + b^2)}{ab}\right)$. Avem

$$(BE) \equiv \frac{x - a}{a} - \frac{y}{\frac{\alpha(a^2 + b^2)}{ab} - b} = 0 \; (CD) \equiv \frac{x}{\frac{b^2}{a^2}(a - \alpha) - \alpha} -$$

$$\frac{y - b}{b} = 0 \quad \text{deci} \quad F\left(\frac{\alpha^2 a(a^2 + b^2) - \alpha a^2 b}{\alpha^2(a^2 + b^2) - 2\alpha a b^2 + a^2 b^2}; \right.$$

$$\left. \frac{\alpha^2 b(a^2 + b^2) - \alpha b(2ab^2 + a^2) + a^2 b^3}{\alpha^2(a^2 + b^2) - 2\alpha a b^2 + a^2 b^2}\right).$$

Intersectînd dreapta $(CM) \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ cu $x = a$ obţinem $G\left(a, \frac{b(\alpha - a)}{a}\right)$, iar din intersecţia dreptelor $y = b$, cu $(BN) \equiv \frac{x}{a} + \frac{ay}{b(a - \alpha)} - 1 = 0$ rezultă $H\left(\frac{a\alpha}{\alpha - a}; b\right)$. Ecuaţia dreptei $(GH) \equiv y - \frac{b(\alpha - a)}{a\alpha} x = 0$ este verificată de A şi F. **8.8.** a) Avem

$M\left(x=\alpha,\ y=\frac{\beta}{2}\right)$ de unde $2y=kx$ deci locul geometric este o dreaptă ce trece prin origine. Pentru $N\left(\frac{\alpha}{2},\ \beta\right)$ găsim locul geometric, dreapta de ecuație $y=2kx$. b) $\|OM\|^2=$ $=\alpha^2+\frac{\beta^2}{4}$, $\|ON\|^2=\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2$ și $\|MN\|^2=\frac{5}{4}(\alpha^2+\beta^2)$.

c) $S_{OMN}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \alpha & \frac{\beta}{2} & 1\\ \frac{\alpha}{2} & \beta & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{8}\alpha\beta$. d) $(AC):5x+4y-$ $-20=0$. O dreaptă paralelă cu $|AC|$ este $y=-\frac{5}{4}x+n$, iar n se determină din condiția ca distanța de la P la această dreaptă să fie 4. Avem $d=\left|\frac{5\cdot 6+4\cdot(-3)-4n}{\sqrt{25+16}}\right|=4$, de unde $n_1=\frac{9}{2}-\sqrt{41}$, $n_2=\frac{9}{2}+\sqrt{41}$. **8.9.** a) O dreaptă oarecare care trece prin $A(3,-1)$, are ecuația $y+1=m(x-$ $-3)$. Ea face un unghi de 45° cu (d) dacă $\left|\frac{m+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right|=1$, de unde $m_1=\frac{1}{7}$; $m_2=-7$; obținem dreptele $(d_1)\equiv x-$ $-7y-10=0$ și $(d_2)\equiv 7x+y-20=0$ care fac fiecare cu (d) unghiuri de 45°. b) Dreapta (d) intersectează pe (d_1) în $B\left(\frac{82}{25},\ \frac{-24}{25}\right)$, iar pe (d_2) în $C\left(\frac{74}{25},\ \frac{332}{25}\right)$. Dreapta (d_3) care trece prin B și este paralelă cu (d_2) are ecuația $y+$ $+\frac{24}{25}=-7\left(x-\frac{82}{25}\right)$; iar dreapta (d_4) ce trece prin C și este paralelă cu (d_1) are ecuația $y-\frac{332}{25}=\frac{1}{7}\left(x-\frac{74}{25}\right)$. Dreptele (d_1), (d_2), (d_3) și (d_4) formează pătratul cerut.

Scanned with OKEN Scanner

8.10. Notăm $P(x_0, y_0)$, $A_1(\alpha_1, 0)$ $A_2(\alpha_2, 0)$, $B_1(0, \beta_1)$, $B_2(0, \beta_2)$. Ecuația dreptei (A_1, B_1) este $\frac{x}{\alpha_1} + \frac{y}{\beta_1} - 1 = 0$, iar a dreptei $(A_2B_2) \equiv \frac{x}{\alpha_2} + \frac{y}{\beta_2} - 1 = 0$, iar a dreptelor $(A_1B_2) \equiv \frac{x}{\alpha_1} + \frac{y}{\beta_2} - 1 = 0$ și $(A_2B_1) \equiv \frac{x}{\alpha_2} + \frac{y}{\beta_1} - 1 = 0$. Pentru determinarea locului geometric căutat se elimină parametrii $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ între aceste patru ecuații ținînd seama că P se află pe dreptele (A_1B_1) și (A_2B_2). Se obține $y_0x + x_0y = 0 (\alpha_1 \neq \alpha_2, \beta_1 \neq \beta_2)$ deci locul geometric este o dreaptă ce trece prin 0 și este conjugată armonic cu OP față de Ox și Oy. **8.11.** Fie (d_2) bisectoarea unghiului format de dreptele (d_1) și (d_3) și φ unghiul bisectoarei cu Ox și 2θ unghiul dreptelor (d_1) și (d_3). Avem: $(d_1) : y = \operatorname{tg}(\varphi - \theta)x$, $(d_2) : y = \operatorname{tg}\varphi \cdot x$ $(d_3) : y = \operatorname{tg}(\varphi + \theta)x$. Dacă m este coeficientul unghiular al uneia din cele trei drepte, avem $m^3 + 3\lambda m + 1 = 0$, o ecuație de gradul 3. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți se scriu

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} + \alpha + \dfrac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta} = 0 \\ \alpha\left(\dfrac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} + \dfrac{\alpha + \beta}{1 - \alpha\beta}\right) - \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{1 - \alpha^2\beta^2} = 3 \\ \dfrac{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{1 - x^2\beta^2} = -1, \end{cases}$$

unde $\alpha = \operatorname{tg}\varphi$ și $\beta = \operatorname{tg}\theta$. Rezultă de aici ecuația $\alpha^3 - 3\alpha - 2 = 0$ cu rădăcinile $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$. Pentru $\alpha = -1$ avem soluții imaginare în β, iar pentru $\alpha = 2$ găsim $\beta = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ și $\lambda = -\frac{3}{2}$. Cele trei drepte au ecuațiile $(d_1) : x - (2 + \sqrt{6})y = 0$, $(d_2) : 2x - y = 0$, $(d_3) : x - (2 - \sqrt{6})y = 0$. **8.12.** Se găsesc coordonatele punctului de intersecție $x = \frac{2ab^2}{b^2 + m^2a^2}$, $y = \frac{2a^2m^2b}{b^2 + m^2a^2}$ din care, eliminînd pe m găsim locul geometric, dreapta de ecuație $bx + ay = 2ab$. **8.13.** a) Ecuația perpendicularei din A pe A_1A_2 este $a(y - a) - \lambda(x + y - 2a) = 0$, care este ecuația unui

Scanned with OKEN Scanner

fascicul de drepte cu vîrful în (a, a). b) Notînd $B(\alpha, \beta)$, rezultă că dreptele AB, A_1B_2, A_2B_1 au, respectiv, ecuațiile $(a-\lambda-\beta)x+(\alpha-\lambda)y+\lambda\alpha-a\alpha+\lambda\beta=0$, $\beta x+\lambda y-\lambda\beta=0$, $(a-\lambda)x+y\alpha-\alpha(a-\lambda)=0$ și se verifică ușor că ele sînt concurente. c) Triunghiurile OA_1B_2, OA_2B_1 sînt echivalente dacă și numai dacă $\lambda\beta=\alpha(a-\lambda)$ și atunci ecuația dreptei AB devine $(a-\lambda-\beta)x+(\alpha-\lambda)y=0$, deci AB trece prin O. **8.14.** a) Dreapta MN trece prin mijlocul segmentului MN. b) Locul geometric este o dreaptă paralelă cu Oy. c) O paralelă cu Oy. **8.15.** Locul geometric este dreapta de ecuație $bx+ay-ab=0$. **8.16.** Verificare facilă. Invităm cititorul la o soluție sintetică. **8.17.** Scriind că centrul cercului se află la intersecția bisectoarelor interioare găsim $C(-1, 3\sqrt{2}-4)$, iar raza este distanța de la C la una din laturi, deci $r=3\sqrt{2}-3$. Avem deci $(x-1)^2+(y-3\sqrt{2}+4)^2=(3\sqrt{2}-3)^2$ **8.18.** Dreptele date se intersectează în punctul $O_1\left(\frac{4}{13}, \frac{7}{13}\right)$ care vor fi coordonatele noii origini. Axa O_1x_1 va fi dreapta de ecuație $2x-3y+1=0$, iar cealaltă dreaptă axa O_1y_1. Transformarea ortogonală de coordonate din plan are ecuațiile $x_1=x\cos\theta-y\sin\theta+a$, $y_1=x\sin\theta+y\cos\theta+b$, ($\theta$ — unghiul de rotație). Avem $\operatorname{tg}\theta=\frac{2}{3}$, $a=\frac{4}{13}$, $b=\frac{7}{13}$ deci $x_1=\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y+\frac{4}{13}$, $y_1=\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y+\frac{7}{13}$. **8.19.** Fie cercurile fixe de ecuații $(C_1):(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$ și $(C_2):(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$ și cercul variabil (C) de ecuație $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Cele două axe radicale care trec prin punctele fixe $M_1(x_1, y_1)$ respectiv $M_2(x_2, y_2)$ sînt $2(a_1-\alpha)x_1+2(b_1-\beta)y_1-a_1^2-b_1^2-r_1^2+\alpha^2+\beta^2+R^2=0$ și $2(a_2-\alpha)x_2+2(b_2-\beta)y_2-a_2^2-b_2^2-r_2^2+\alpha^2+\beta^2+R^2=0$ de unde prin scădere obținem ecuația dreptei descrisă de punctul $C(\alpha_1\beta):2\alpha(x_2-x_1)+2\beta(y_2-y_1)+2(a_1x_1-a_2x_2)+2(b_1y_1-b_2y_2)-(a_1^2-a_2^2)-(b_1^2-b_2^2)+r_1^2-r_2^2=0$. **8.20.** Fie $P(\lambda, 0)$ variabil pe Ox. Ecuația tangentei de pantă m la cercul $x^2+(y-b)^2=0$ se deduce scriind tangenta de pantă m la cercul dat: $y-b=mx\pm b\sqrt{1+m^2}$ și punînd

Scanned with OKEN Scanner

condiția să treacă prin P obținem ecuația $m^2(\lambda^2 - b^2) + 2bm\lambda = 0$ cu rădăcinile $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{2b\lambda}{b^2 - \lambda^2}$. Deci $(PQ) \equiv y - \frac{2b\lambda}{b^2 - \lambda^2}(x - \lambda) = 0$, iar $Q\left(\frac{2b^2\lambda}{b^2 + \lambda^2}, \frac{-2b\lambda^2}{b^2 + \lambda^2}\right)$. Pentru ortocentru intersectăm înălțimea din Q de ecuație $x = \frac{2b^2\lambda}{b^2 + \lambda^2}$, cu înălțimea din P de ecuație $bx + \lambda y - b\lambda = 0$, deci $H\left(\frac{2b^2\lambda}{b^2 + \lambda^2}, \frac{b(\lambda^2 - b^2)}{b^2 + \lambda^2}\right)$. Eliminînd aici parametrul λ găsim ca loc geometric al lui H cercul de ecuație $x^2 + y^2 - b^2 = 0$. **8.21.** Raportăm figura la sistemul de axe ortogonale format din dreptele OA și OC. Cercul (O) are ecuația $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. O tangentă la cerc este dreapta de ecuație $x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0$ care intersectată cu Ox ne dă $A\left(\frac{R}{\cos\varphi}, 0\right)$. Dacă $(AT_1) \equiv$ $\equiv \alpha\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0$ atunci $(AT_2) \equiv x\cos\varphi - y\sin\varphi - R = 0$. Asimptotele la hiperbola (Γ) care trec prin $C(0, a)$ și sînt paralele cu (AT_1), respectiv (AT_2), au ecuațiile $x\cos\varphi + (y - a)\sin\varphi = 0$ și $x\cos\varphi - (y - a)\sin\varphi = 0$. Ecuația hiperbolei (Γ) este $x^2\cos^2\varphi - (y - a)^2\sin^2\varphi = \alpha$ unde α se determină punînd condiția ca punctul B să aparțină hiperbolei. Intersectînd dreapta $(AC) \equiv \frac{y\cos\varphi}{R} + \frac{y}{a} - 1 = 0$ cu tangenta la cerc paralelă cu Oy avem $B(R, a(1 - \cos\varphi))$. Dar $B \in (\Gamma)$, deci $\alpha = (R^2 - a^2\sin^2\varphi)\cos^2\varphi$. Ecuația hiperbolei se va scrie $(x^2 + y^2 - R^2)\cos^2\varphi - (y - a\sin^2\varphi)^2 = 0$ de unde rezultă că cercul (O) este bitangent hiperbolei (Γ) în punctele lui de intersecție cu dreapta de ecuație $y - a\sin^2\varphi = 0$. **8.22.** a) Avem $B'(0, -b)$, $A'\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $Q\left(\frac{a}{2}, \frac{p}{2}\right)$, $(BQ) \equiv (p - 2b)x - ay + ab = 0$, $(OQ) \equiv px - ay = 0$ și $(A'B') \equiv 2bx - ay - ab = 0$. Determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{ab}{p - 2b} \\ p & -a & 0 \\ 2b & -a & ab \end{vmatrix} = 0$ deci dreptele sînt

concurente în $S\left(\frac{ab}{2b-p}; \frac{pb}{2b-p}\right)$. b) Cercul circumscris triunghiului ABP are ecuația $a(x^2+y^2)-(a^2+bp)x-a(b+p)y+bp=0$, iar tangenta în P la acest cerc se obține din ecuația cercului prin dedublare: $(a^2+bp)x+a(b-p)y+ap^2-abp=0$ și arecoeficientul unghiular $m=\frac{a^2+bp}{a(p-b)}$. Dar $m=-\frac{1}{m_{BA}}$ deci $\frac{a^2+bp}{a(p-b)}=\frac{a}{b}$, deci $p=\frac{2a^2b}{a^2-b^2}$. c) Ecuația unui cerc ce trece prin origine este $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y=0$. A aparține cercului deci $\alpha=\frac{a}{2}$. Tangenta în A la care are ecuația $ax-\frac{a}{2}(x+a)+\beta y=0$ și ea trebuie să reprezinte dreapta AP deci $\frac{a}{p}=\frac{2\beta}{a}$ sau $\beta=\frac{a^2}{2p}$, deci ecuația cercului este $x^2+y^2+ax+\frac{a^2}{p}y=0$. d) $T\left(0,-\frac{a^2}{p}\right)$ și tangenta în O la cercul (C) are ecuația $px-ay=0$ deci $M\left(-\frac{a^3}{p},-\frac{a^2}{p}\right)$ și eliminînd p găsim locul geometric $y^2=-ax$. **8.23.** Fie cercul (C) de ecuație $x^2+y^2-R^2=0$ (1) și $M(a, b)$ fix. Dacă $\omega(\alpha, \beta)$ este un punct variabil din plan, ecuația cercului cu centrul în ω și care trece prin M este $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2$ (2). Se știe că două cercuri de ecuație $x^2+y^2+2\alpha_i x+2\beta_i y+\gamma_i=0$, $i=1, 2$ sînt ortogonale dacă $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2=\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$. În cazul nostru condiția de ortogonalitate se scrie $2a\alpha+2b\beta-a^2-b^2-R^2=0$. Scoțînd de aici pe β și înlocuindu-l în (2) obținem ecuația cercurilor ortogonale cu (C) care trec prin M: $b(x^2+y^2)-(a^2+b^2+R^2)y+bR^2-2\alpha(bx-ay)=0$ și care reprezintă fasciculul de cercuri determinat de cercul $b(x^2+y^2)-(a^2+b^2+R^2)y+bR^2=0$ (3) și de dreapta $bx-ay=0$ (4). Această dreaptă este axa radicală a fasciculului. Intersectînd cercul (3) cu dreapta (4) obținem punctele de bază ale fasciculului $M(a, b)$ și $M'\left(\frac{R^2a}{a^2+b^2};\right.$

$\frac{R^2b}{a^2+b^2}\Big)$. Rezultă că M' este inversul lui M în inversiunea de centru O și de cerc fundamental (C). **8.24.** a) Rezultă din teorema ortopolului (caz particular). *Soluție analitică.* Notînd $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și $y = mx + n$ ecuația dreptei (d), se obține $A'\left(\frac{a-mn}{1+m^2}, \frac{ma+n}{1+m^2}\right)$, $B'\left(\frac{mb-mn}{1+m^2}, \frac{m^2b+n}{1+m^2}\right)$; $O'\left(\frac{-mn}{1+m^2}, \frac{n}{1+m^2}\right)$. Perpendicularele din A' pe OB și din B' pe OA se taie în punctul $K\left(\frac{mb-mn}{1+m^2}, \frac{ma+n}{1+m^2}\right)$. Ecuația perpendicularei din O' pe AB este $y - \frac{n}{1+m^2} = \frac{a}{b}\left(x + \frac{mn}{1+m^2}\right)$ și se vede că această dreaptă trece prin K. b) Locul geometric al lui K este o dreaptă perpendiculară pe (d). c) În acest caz locul geometric al lui K este cercul de ecuație $(1+m^2)(x^2+y^2) + 2mnx - 2ny + n^2 - m^2(a^2+b^2)/1+m^2 = 0$. **8.25.** Fără probleme! **8.26.** a) Să alegem sistemul de axe rectangulare xOy, O fiind mijlocul segmentului $|AB|$, A și B să fie situate pe Ox și $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. Dacă r_a și r_b sînt razele celor două cercuri din enunț, atunci $r_a r_b = a^2$. Punctele O_a și O_b au coordonatele $x = -a$, $y = r_a$, respectiv $x = a$, $y = r_b$. Ecuația dreptei O_aO_b este $x(r_b - r_a) - 2ay + a(r_a + r_b) = 0$, de unde rezultă că distanța de la O la O_aO_b este $d = \frac{a(r_a+r_b)}{\sqrt{(r_b-r_a)^2+4a^2}} = a$. Prin urmare O_aO_b rămîne tangentă cercului de diametru $|AB|$. b) Intersecția dreptelor AO_b și BO_a descrie semielipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} - 1 = 0$, $y > 0$. c) Punctul de tangență al celor două cercuri descrie semicercul $x^2 + y^2 = a^2$, $y > 0$. **8.27.** a) Notînd $M(0, m)$, rezultă că N are coordonatele $x = m$, $y = a + m$, iar P are coordonatele $x = a + m$, $y = a$ deci N descrie dreapta $y = x + a$, iar P descrie dreapta $y = a$. Centrul pătratului descrie dreapta $y = x$. b) Ecuația cercului circumscris pătratului are ecuația $x^2 + y^2 - ax - ay - m(x + y - a) = 0$, de unde rezultă că cercurile $AMNP$ formează un fascicul de cercuri, generat de cercul $x^2 + y^2 - ax - ya = 0$ și de axa radicală $x +$

Scanned with OKEN Scanner

$+ y - a = 0$; raza minimă este $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. c) Ecuațiile dreptelor AM și $A'M'$ sînt $mx + ay - am = 0$ și, respectiv, $ax + my - am = 0$ între care eliminînd pe m găsim locul lui Q, dreapta $y = x$. d) Abscisele punctelor U și V se găsesc din ecuația $2x^2 - 2x(a + m) + am = 0$ și notîndu-le prin x_3 și x_4 avem $x_3 + x_4 = am$, $x_3x_4 = \frac{am}{2}$; abscisele punctelor O și Q sînt $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{2m}{a + m}$. Cu acestea se verifică relația $2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4)$, ceea ce demonstrează afirmația. e) Ecuațiile celor două tangente sînt $x(a - m) - y(a + m) - a^2 + am = 0$ și $x(a + m) - y(m - a) - m^2 - am = 0$ de unde locul geometric cerut este dreapta $x + y = 0$. **8.28.** a) Dacă $M(x_0, y_0)$, se găsește că F are coordonatele $x = \frac{a^2 + y_0^2}{x_0}$, $y = -x_0$, axele fiind cei doi diametri perpendiculari și $A(a, 0)$, $A'(0, a)$, $a > 0$, concluzia impunîndu-se. Dați și o soluție sintetică acestui punct! b) Cercul POQ are ecuația $x^2 + y^2 - \frac{a^2x}{x_0} - \frac{a^2y}{y_0} = 0$ și coarda comună celor două cercuri are ecuația $xy_0 + yx_0 - x_0y_0 = 0$, de unde rezultă că lungimea segmentului $|RS|$ este a. **8.29.** a) Evident, ecuația unui cerc din fascicul se scrie $C - 2\lambda\Delta = 0$ unde $C \equiv x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$ este cercul de centru O și rază α, iar $\Delta \equiv x = 0$ este axa radicală a cercurilor. Condiția ca cercul $x^2 + y^2 - 2\lambda'x - \alpha^2 = 0$ să fie ortogonal cercului $C(\lambda)$ este ca puterea centrului lui, punctul $(\lambda', 0)$, față de cercul $C(\lambda)$ să fie pătratul razei sale, ceea ce conduce la $\lambda\lambda' = -\alpha^2$. Pentru $\lambda \to 0$, cercul $C(\lambda')$ degenerează în axa radicală. **8.30.** a) Fie $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un punct al elipsei. Tangenta (d) are ecuația $bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab = 0$. Ecuația unui cerc ce trece prin focarele elipsei $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$ este $x^2 + y^2 - 2\lambda y - c^2 = 0$. Scriind că distanța de la centrul $\omega(0, \lambda)$ al acestui cerc la (d) este egală cu raza cercului, avem $\frac{|a\lambda\sin y - ab|}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} = \sqrt{\lambda^2 + c^2}$ sau $b^2\cos^2\varphi \cdot \lambda^2 + 2a^2b\sin\varphi + c^4\sin^2\varphi - b^4 = 0$ cu soluțiile $\lambda_{1,2} =$

$= \frac{-a^2 b \sin\varphi \pm (a^2 \sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}{b\cos^2\varphi}$. Cele două cercuri au ecuațiile $x^2+y^2-2\lambda_1 y - c^2 = 0$ și $x^2+y^2-2\lambda_2 y - c^2 = 0$. b) Cercurile determinate intersectează dreapta (d), în punctele $T_1\left(a\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}, b\right)$ și $T_2\left(-a\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}, -b\right)$ puncte care se află pe dreptele $y=b$ respectiv $y=-b$. c) Pentru unghiul θ dintre cele două cercuri avem $\cos\theta = \frac{\lambda_1\cdot\lambda_2 - c^2}{\sqrt{(\lambda_1^2-c^2)(\lambda_2^2-c^2)}} = \frac{a^2-2b^2}{a^2}$. Dacă $a = b\sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ deci cercurile sînt ortogonale. **8.31.** a) Avem $(E) \equiv x^2 + 4y^2 - 4a^2 = 0$, $(c) \equiv x^2+y^2-2ay=0$ și $(d) \equiv y - \lambda x = 0$. Dreapta (d) intersectează elipsa în $P\left(\frac{2a}{\sqrt{1+4\lambda^2}}, \frac{2a}{\sqrt{1+4\lambda^2}}\right)$ și $P'\left(\frac{-2a}{\sqrt{1+4\lambda^2}}, \frac{-2a}{\sqrt{1+4\lambda^2}}\right)$, iar cercul în $Q\left(\frac{2a\lambda}{1+\lambda^2}, \frac{2a\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)$. Avem $\|OP\| = \|OP'\| = 2a\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1+4\lambda^2}}$, $\|OQ\| = \frac{2a|\lambda|}{1+\lambda^2}$ deci relația din enunț devine $\frac{4a^2|\lambda|}{\sqrt{1+4\lambda^2}} = k$ de unde $|\lambda| = \frac{k}{2\sqrt{4a^2-k^2}}$ admițînd pentru λ valorile $\pm\infty$, ceea ce revine la a nu exclude posibilitatea ca dreapta (d) să coincidă cu axa yy'. Pentru fiecare $k \in (0, 2a)$ există două drepte pentru care $\|OP\|\cdot\|OQ\| = k$. b) $\|AQ\| = \frac{2a}{1+\lambda^2}\sqrt{(1-\lambda+\lambda^2)^2+\lambda^4}$. Relația devine $(h^2-2)\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$. $\lambda \in \mathbf{R}$ deci trebuie să avem $h^2 - 1 \geqslant 0$ dar $h > 0$ deci trebuie să avem $h \geqslant 1$. Pentru $h=1$ avem $\lambda = 1$ deci (d) este prima bisectoare. Dacă $h > 1$, ecuația are două rădăcini reale diferite, deci există două puncte Q care verifică relația dată. Rădăcinile ecuației sînt pozitive dacă $0 < h < \sqrt{2}$, deci cele două puncte Q sînt în primul cadran. Dacă $h > \sqrt{2}$. unul din puncte este în primul cadran, iar celălalt în cadranul doi. Dacă $h = \sqrt{2}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, λ_2 — infinită, deci (d) are poziția dreptei yy'. c) Dreapta perpendiculară pe (d) ce trece

Scanned with OKEN Scanner

prin O are ecuația $y = -\frac{1}{\lambda}x$ și intersectează elipsa în punctele $\left(\frac{2a\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}}, \frac{-2a}{\sqrt{\lambda^2+4}}\right), \left(-\frac{2a\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}}, \frac{2a}{\sqrt{\lambda^2+4}}\right)$. Dacă P_1 e unul din aceste puncte $\|OP_1^2\| = 4a^2(1+\lambda^2)/(\lambda^2+4)$ și $\|OP^2\| = 4a^2(1+\lambda^2)/(1+4\lambda^2)$ rezultă $\frac{1}{\|OP\|^2} + \frac{1}{\|OP_1\|^2} = \frac{5}{4a^2}$. **8.32.** Ecuația tangentei de coeficient unghiular m la parabola $y^2 = 2px$ este $y = mx + \frac{p}{2m}$ (1). Tangenta la parabolă perpendiculară pe (1) este $y = -\frac{1}{m}x - p\frac{m}{2}$. Scriind că cele două tangente trec prin punctul $P(\alpha, \beta)$ găsim $\alpha = -\frac{p}{2}$, deci locul geometric al punctului P este directoarea parabolei. **8.33.** Fie dreapta (d) de ecuație $y = mx + n$. Ea este tangentă parabolei (P_2) dacă ecuația $x^2 + 2pmx + 2pn = 0$ are rădăcină dublă de unde rezultă $n = \frac{pm^2}{2}$. Polara punctului $M(\alpha, \beta)$ în raport cu (P_1) coincide cu (d) deci $\alpha n - p(y+\beta) \equiv mx - y + \frac{pm^2}{2}$ de unde $\frac{\alpha}{m} = p = -\frac{2\beta}{m^2}$. Eliminînd între aceste egalități pe m obținem locul geometric $\alpha^2 + 2\beta p = 0$ deci parabola (P_2). **8.34.** Fie parabola $y^2 = 2px$. Tangenta paralelă cu direcția m are ecuația $y = mx + \frac{p}{2m}$. Pentru $m = \frac{3}{2}$ avem tangenta $y = \frac{3}{2}x + \frac{p}{3}$. Tangenta trece prin $P(2, 5)$ dacă $p = 6$, deci parabola are ecuația $y^2 = 12x$. Avem $\beta^2 = 12\alpha$ (1) și $F(3, 0)$. Ecuația normalei în M este $y - \beta = -\frac{\beta}{6}(x - \alpha)$ (2), iar ecuația dreptei care trece prin focar și este perpendiculară pe normală este $y = \frac{6}{\beta}(x - 3)$ (3). Eliminînd pe α și β între ecuațiile (1), (2) și (3) obținem $2(x^2 + y^2)(y^2 + 3x) = 0$. Locul geometric este parabola $y^2 = -3x$. Se obține și punctul singular $x = 0$,

$y = 0$. **8.35.** a) Fie $y = \lambda\left(x - \frac{p}{2}\right)$ ecuația secantei dusă prin focarul F. Din ecuația care ne dă abscisele punctelor de intersecție ale secantei cu parabola: $\lambda^2x^2 - p(\lambda^2 + 2)x + \lambda^2p^2/4 = 0$ obținem $x_1x_2 = p^2/4$, $(x_1 + x_2) = p(\lambda^2 + 2)/\lambda^2$. Dar $y_1y_2 = \lambda^2\left[x_1x_2 - \frac{p}{2}(x_1 + x_2) + \frac{p^2}{4}\right]$, rezultă $y_1y_2 = p^2$. b) Ecuațiile tangentelor în M_1 și M_2 sînt $yy_1 = p(x + x_1)$ și $yy_2 = p(x + x_2)$ de unde prin împărțire se obține $x = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{y_2 - y_1}$ dar $y_1 = x_1 - \frac{p}{2}$, $y_2 = x_2 - \frac{p}{2}$ deci $x = -\frac{p}{2}$. Avem $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, deci $P\left(-\frac{p}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. c) Pantele tangentelor PM_1 și PM_2 sînt $m_1 = \frac{p}{y_1}$, $m_2 = \frac{p}{y_2}$ deci $1 + m_1m_2 = 0$. **8.36.** a) Fie $y = m_ix + \frac{p}{2m_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ trei tangente la parabola (P). Ele formează triunghiul de vîrfuri $A_1\left(\frac{p}{2m_2m_3}; \frac{p(m_2 + m_3)}{2m_2m_3}\right)$; $A_2\left(\frac{p}{2m_1m_3}; \frac{p(m_1 + m_3)}{2m_1m_3}\right)$ și $A_3\left(\frac{p}{2m_1m_2}; p\frac{(m_1 + m_2)}{2m_1m_2}\right)$. Ortocentrul acestui triunghi este $H\left(-\frac{p}{2}; \frac{p(1 + m_1m_2 + m_2m_3 + m_1m_3}{2m_1m_2m_3}\right)$ deci H descrie directoarea parabolei. b) Parabolele (P) și (Q) se intersectează în punctele $O(0, 0)$ și $M(2\sqrt[3]{pq^2}, 2\sqrt[3]{p^2q})$. Dacă $y = mx + \frac{p}{2m}$ este o tangentă la parabola (P), ea va fi tangentă și parabolei (Q) dacă $x^2 = 2q\left(mx + \frac{p}{2m}\right)$ are rădăcină dublă, de unde $p + qm^3 = 0$ (1). Analog din condiția ca $y = mx + \frac{p}{2m}$ să fie tangentă hiperbolei $8xy = 1$ obținem $2m^3 + p^2 = 0$. (2). Eliminînd parametrul m între relațiile (1) și (2) se obține $pq = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Eliminînd p și q între relațiile $pq = 2x = 2\sqrt[3]{pq^2}$, $y = 2\sqrt[3]{p^2q}$ se obține $xy = 8$ deci M descrie o hiperbolă. **8.37.** Ecuațiile rotației în plan sînt $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$, ($\theta$ — unghiul de rotație). Deci $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$. Ecuația hiperbolei echilatere devine $2x'y' = a^2$. **8.38.** Dată hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, asimptotele ei sînt dreptele $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$, iar unghiul dintre ele este dat de $\operatorname{tg}\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$, $m_1 = \frac{b}{a}$, $m_2 = -\frac{b}{a}$. Dar $e = \frac{c}{a} = 3$, $c^2 = a^2 + b^2$ și $c = 3a$ deci $b^2 = 2a^2$ și $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{2}$. **8.39.** a) Dacă $y = mx$ este un diametru, diametrul coniugat cu acesta este $y = \frac{b^2}{a^2m}x$, cu $a^2 = b^2 = 1$. Dreapta ce trece prin P și este perpendiculară pe diametrul coniugat lui $y = mx$ (1) are ecuația (2) $y - 3 = -m(x - 1)$. Eliminînd m între (1) și (2) se obține locul geometric $2xy - 3x - y = 0$ (o hiperbolă). b) Avem $\operatorname{tg}\theta = \frac{m^2 - 1}{2m} = 1$ de unde $m_1 = 1 + \sqrt{2}$, $m_2 = 1 - \sqrt{2}$ și diametrii coniugați sînt $y = (1 + \sqrt{2})x$, $y = (1 - \sqrt{2})x$. **8.40.** a) Normala în $M_i\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ are ecuația $y - y_i = -\frac{y_i}{2p}\left(x - \frac{y_i^2}{2p}\right)$ și condiția de concurență este echivalentă cu $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. b) Coeficientul unghiular al dreptei M_1M_2 este $-\frac{2p}{m}$. c) Se obține $N_1\left(\frac{m_1m_2 - m_1m_3 - m_2m_3}{2p}, m_1\right)$ etc., ceea ce probează că $N_1 \in M_2M_3$ etc., și că M_iN_i sînt paralele cu Ox. **8.41.** a) aria $OTP = \frac{1}{8}k^3$, $G\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{6}\right)$. b) Parabola $3y = 2x^2$. c) Punctul fix este $(0, 1)$. **8.42.** a) Dacă $M(x_0, y_0)$,

rezultă $\|OU\| = 2p + x_0$, $\|TN\| = p + 2x_0$ și de aici concluzia. b) Locul are ecuația $y^2 = \frac{2px}{3} - \frac{2p^2}{9}$. **8.44.** a) Dacă $P(\alpha, \beta)$, MN trece prin O dacă și numai dacă $b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 + a^2b^2 = 0$, deci exact cînd P se află pe hiperbola conjugată celei date. b) Ca MN să fie paralelă cu $Ox(Oy)$ este necesar și suficient ca $P \in Oy(Ox)$. **8.45.** a) Elipsa $4a^2x^2 + 36a^2y^2 = 9a^2$, fără cele patru vîrfuri. b) Pentru $C(a\sqrt{3}, 0)$ sau $C(-a\sqrt{3}, 0)$. **8.46.** c) Intersecția a două tangente are coordonatele $x = \frac{y_1y_2}{2p}$, $y^2 = y_1y_2$. d) Folosiți ecuația cercului prin trei puncte scrisă cu ajutorul unui determinant de ordinul patru.

Capitolul 9

9.1. Fie $A \in a$ un punct oarecare. În planul determinat de A și dreapta b există o unică paralelă prin A la b, fie ea a'. Evident $a' \neq a$. Fie $B \in b$. În planul determinat de B și dreapta a există o unică paralelă prin B la a, fie ea b', $b' \neq b$. Planele determinate de perechile de drepte (a, a') și (b, b') sînt paralele și conțin cîte una din cele două drepte. Unicitatea rezultă din afirmația: dacă două plane diferite sînt paralele cu o dreaptă, atunci sau sînt paralele între ele sau dreapta lor comună este paralelă cu acea dreaptă. **9.2.** Fie (π_1) planul care conține pe d_1 și este paralel cu d_2. Există un unic plan care conține pe d_2 și este perpendicular pe (π_1), fie el α_2, fie α_1, planul care conține pe d_1 și este perpendicular pe (π_2). Planele α_1 și α_2 nu pot fi paralele: în adevăr, în caz contrar, planul α_2 ar tăia planul (π_1) după o dreaptă d_2' paralelă cu d_1 și d_2, deci d_1 și d_2 ar fi coplanare. Prin urmare, α_1 și α_2 au o dreaptă comună d. Observînd că planele (π_1) și (π_2) sînt paralele, rezultă că d este perpendiculară pe cele două plane, deci pe d_1 și d_2. Ea intersectează atît d_1 cît și d_2. **9.3.** a) Fie A un punct oarecare pe muchia m a celor două plane și fie o dreaptă b în planul β care nu este perpendiculară pe muchia m. Există un plan γ care trece prin A și este perpendicular pe b; acest plan intersectează planul α după dreapta a. Evident, dreptele a și b sînt perpendiculare. Observație: a nu poate fi m, deoarece b nu este perpendiculară pe m.

Scanned with OKEN Scanner

9.4. a) Fie α_1, α_2 planele paralele între ele care conțin pe d_1 și respectiv d_2 (vedeți 9.1). Atunci mijlocul M al segmentului $|A_1A_2|$ se află în planul α paralel cu planele α_1, α_2 și este egal depărtat de acestea. Dacă M este un punct din planul α, planul determinat de M și dreapta d_2 intersectează pe d_1 în punctul A_1, dreapta A_1M intersectează pe d_2 în A_2. Atunci M este mijlocul segmentului $|A_1A_2|$. b) Fie $|O_1O_2|$ segmentul perpendicular pe cele două drepte, $O_1 \in d_1$, $O_2 \in d_2$. Dacă $A_1 \in d_1$ și $A_2 \in d_2$, atunci $\|A_1A_2\| \geqslant \|O_1O_2\|$, deoarece $\|A_1A_2\|^2 = \|O_1O_2\|^2 + \|O_2A_2\|^2 + \|O_1A_1\|^2$, întrucît triunghiurile $O_1A_2O_2$ și $A_1O_1A_2$ sînt dreptunghice. Problema are, deci, soluție numai dacă $\|O_1O_2\| \leqslant l$. Dacă $l = \|O_1O_2\|$, atunci există un singur punct cu proprietatea cerută, mijlocul segmentului $\|O_1O_2\|$. Presupunînd $l > \|O_1O_2\|$, M se află în planul perpendicular pe $|O_1O_2|$ în mijlocul O al acestuia. Deoarece $\|MO_1\| = \|MO_2\| = \frac{l}{2}$, rezultă $\|OM\| = \frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2} =$ = constant, deci M se află pe cercul cu centrul O și de rază $\frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2}$ situat în planul mediator segmentului $|O_1O_2|$. Se vede ușor că acest cerc este „acoperit“ de puncte M. **9.5.** Fie d_1 și d_2 două drepte în spațiu, $A_1 \in d_1$, $Q_2 \in d_2$ astfel că A_1A_2 este perpendiculara lor comună. Fie α un plan paralel cu A_1A_2; deoarece un unghi drept avînd o latură paralelă cu un plan se proiectează după un unghi drept pe acel plan, rezultă că unghiurile proiecțiilor dreptelor d_1 și d_2 cu proiecția dreptei A_1A_2 pe planul α sînt drepte, deci proiecțiile dreptelor d_1 și d_2 sînt paralele. **9.6.** a) Dacă două drepte paralele cu d_3 s-ar sprijini pe d_1 și d_2, d_1 și d_2 ar fi coplanare. Să vedem cînd există o dreaptă paralelă cu d_3 și care se sprijină pe d_1 și d_2. Mai întîi, există un singur plan care conține d_2 și este paralel cu d_3, fie acesta α_1 (vedeți 9.1), iar α_2 planul ce conține pe d_2 și este paralel cu d_3. Dacă α_1 și α_2 se intersectează, atunci muchia lor se sprijină pe d_1 și d_2 și este paralelă cu d_3. b) Fie $P = AM \cap BN$, (π_2) planul determinat de A și d_2, (π_3) planul determinat de B și d_3. Locul geometric al punctului P este muchia planelor (π_2), (π_3). c) Locul cerut este muchia planelor determinate de d_3 și A, respectiv de d_2 și B. **9.7.** Planul γ perpendicular pe d în punctul O intersectează semiplanele (π_1), (π_2) după semidrepte. Perpendiculara în planul γ pe OP intersectează pe a_1 în A_1 și pe a_2 în A_2. Planul β perpendicular pe OP în punctul P intersectează pe

Scanned with OKEN Scanner

d_1 în punctul B_1 și pe d_2 în punctul B_2; punctele B_1, P, B_2 sînt coliniare. Este clar că planul β este paralel cu dreapta d; rezultă că triunghiurile PA_1B_1 și PA_2B_2 sînt dreptunghice și congruente deoarece $\| PA_1 \| = \| PA_2 \|$. Prin urmare $\| PB_1 \| = \| PB_2 \|$ și cum $|OP \perp |B_1B_2|$ rezultă că $[OP$ este bisectoarea unghiului dreptelor d_1 și d_2. **9.8.** a) Planele (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) au un punct comun, fie el P. P se află pe muchia planelor (A_1BC), (BC_1A_1) și (CA_1B_1), care este A_1A_2; analog P se află pe B_1B_2 și pe C_1C_2. b) Planele (AB_1C), (ABC_1), (CA_1B) au un punct comun, fie el Q. Q se află pe muchia planelor (AB_1C) și (ABC_1), deci pe AA_2; analog, Q se află pe BB_2 și CC_2. c), d). clanele (OAA_2), (OBB_2), (OCC_2) au o dreaptă comună, anume OQ și cum P se află în fiecare din cele trei plane, rezultă că O, P, Q sînt coliniare. Muchia comună a celor trei plane înțeapă planul (ABC) într-un punct R, care se află pe AA_3, deoarece AA_3 este muchia planelor (OAA_2) și (ABC). Analog R se află pe BB_3 și CC_3. **9.9.** a) Fie P, Q, R, S mijloacele muchiilor $|BC|$, $|AD|$, $|CD|$ $|AB|$. Atunci $|PS|$ și $|QR|$ sînt congruente și paralele. Rezultă că patrulaterul $PQRS$ este paralelogram, deci $|PQ|$ și $|RS|$ se intersectează într-un punct G, mijlocul fiecăruia; etc. b) Evident, planele respective conțin punctul G. c) Considerînd triunghiul PQD și punctele A, G, G_a se verifică relația $\frac{\|AQ\|}{\|QD\|} \cdot \frac{\|DG\|}{\|PG\|} \cdot \frac{\|PG\|}{\|GQ\|} = 1$ și poziția punctelor arată, conform reciprocei teoremei lui Menelaus, că punctele A, G, G_a sînt coliniare. d) Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului AG_aD tăiat de transversala PGQ se obține $\frac{\|AG\|}{\|GG_a\|} = 3$ din care deducem $\frac{\|GG\|}{\|AG_a\|} = \frac{1}{4}$. e) Înălțimea din G a piramidei $GBCD$ este $\frac{1}{4}$ din înălțimea din A a piramidei $ABCD$. **9.10.** Dacă AB este perpendiculară pe planul dreptelor d_1 și d_2, atunci punctele C și D pot fi alese arbitrar. Fie, în caz contrar. A_1 și B_1 proiecțiile punctelor A și B pe planul dreptelor d_1 și d_2 și fie M situat pe A_1B_1. Perpendiculara în M pe A_1B_1 taie pe d_1 în C și pe d_2 în D. Atunci tetraedrul $ABCD$ are proprietatea cerută. Reciproc, dacă AB și CD sînt perpendiculare, atunci CD este perpendiculară pe A_1B_1. Rezultă că dreapta CD păstrează direcție fixă; prin urmare mijlocul Q al segmentului $|CD|$ descrie o dreaptă (d) care trece prin O. Cum mijlocul P al

Scanned with OKEN Scanner

segmentului $|AB|$ este fix, deducem că mijlocul segmentului $|PQ|$ descrie o dreaptă paralelă cu (d). b) Segmentul $|CD|$ are direcție fixă și problema se reduce la a construi un segment de direcție și lungime date cu capetele pe laturile unui unghi. **9.11.** a) Fie G_a centrul de greutate al feței BCD. Paralela prin D la mediana AD' a feței ABC taie dreapta AG_a în punctul A_1 astfel încît $\|G_aA_1\| = 2\|AG_a\|$, etc. b) Fie G centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$. Știm că $\|AG\| = 3\|GG_a\|$. Rezultă $\|GA_1\| = 3\|GA\|$; analog, $\|GB_1\| = 3\|GB\|$, $\|GG_1\| = 3\|GC\|$, $\|GD_1\| = 3\|GD\|$, deci tetraedrele $A_1B_1C_1D_1$ și $ABCD$ sînt omotetice în omotetia de centru G și raport 3. Rezultă: $\text{vol}(A_1B_1C_1D_1) = 27\,\text{vol}(ABCD)$. Observație. Asupra unei metode de rezolvare a problemelor de acest tip folosind calculul vectorial, a se vedea în „G.M.", 9, 1981, p. 337—341: „Teoreme de geometrie deduse din considerarea baricentrului", de Gh. D. Simionescu. **9.12.** Fie un plan, fixat pentru moment, care conține dreapta AB și Δ o dreaptă perpendiculară pe AB în A în acest plan; fie Q proiecția lui M pe dreapta Δ; atunci condiția $\|AM\|^2 = \|AB\| \cdot \|MP\|$ devine $\|AM\|^2 = \|AQ\| \cdot \|AB\|$. Notînd prin B_1 intersecția perpendicularei în M pe AM cu dreapta Δ obținem $\|AB_1\| = \|AB\|$ și deci B_1 poate avea două poziții pe dreapta Δ. Pentru fiecare din ele M descrie, în planul fixat cercul de diametru $|AB_1|$. Rotind acum planul în jurul dreptei AB, deducem că punctul M descrie torul generat de cercul de diametru $|AB_1|$ în rotația în jurul dreptei AB. **9.13.** a) Dreapta BC este perpendiculară pe planul (AMN), fiind perpendiculară pe două drepte concurente din acest plan. Rezultă că planul (ABC) este perpendicular pe planul (AMN). b) Relația din enunț este echivalentă cu $\sin^2 x = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$. Notînd $\|AM\| = h$, $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$, rezultă $\|AN\| = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\sin x = \dfrac{h\sqrt{b^2+c^2}}{bc}$, $\sin\gamma = \dfrac{h}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{h}{b}$ și relația se verifică. **9.14.** Fie P' mijlocul muchiei $|CD|$. Planul $(AMPP')$ intersectează planul $(ABCD)$ după dreapta $P'A$, deci dreapta PM intersecrează planul $(ABCD)$ într-un punct al dreptei $P'A$. Fie U acest punct, $R = UN \cap AB$, $V = UN \cap CD$, $Q = VP \cap CC'$, $Z = VP \cap DD'$, $S = ZM \cup A'D'$. Secțiunea este exagonul regulat $MRNQPS$. **9.15.** a) Fie $|BM|$ înălțimea din B a triunghiului DBC, $M \in CD$. Dreapta CD, fiind perpendiculară pe dreptele AB, BM, este perpendiculară pe planul (ABM). Fie $|AH_a|$,

Scanned with OKEN Scanner

$|BH_b|$ înălțimile din A și B ale triunghiului ABM, $H_a \in BM$, $H_b \in AB$. Ele sînt perpendiculare pe planele (BCD), respectiv, (ACD), ceea ce demonstrează prima afirmație. b) Să admitem că și perechea (BC, AD) este formată din perpendiculare. Atunci BC este perpendiculară pe planul (AH_aD) și prin urmare H_a este ortocentrul triunghiului BCD; analog, H_b este ortocentrul triunghiului ACD. Rezultă că BD este perpendiculară pe CH_a și, cum este perpendiculară pe AH_a, rezultă că BD este perpendiculară pe AC. Ultima afirmație rezultă astfel: planul (BH_bC) este perpendicular pe planul (ABD), deoarece AD este perpendiculară pe BC și BH_b. La fel, planul (ABH_a) este perpendicular pe planul (ABD). Muchia acestor plane este înălțimea din C și este concurentă cu înălțimile AH_a, BH_b (!!). **9.16.** Lemă: Fie $SABC$ un tetraedru, O un punct care se proiectează pe planele (SAB), (SBC), (SCA) în punctele O_C, O_A, O_B. Dacă $SO_C \perp AB$ și $SO_A \perp BC$, atunci SO este perpendiculară pe planul (ABC). În adevăr, din ipoteza lemei rezultă că AB este perpendiculară pe (SOO_C), BC este perpendiculară pe planul (SOO_A), de unde deducem că muchia SO este perpendiculară pe planul dreptelor AB, BC. (Se observă că avem și $SO_B \perp AC$.) Să revenim la problemă. Folosind lema, notînd O_A, O_B, O_C proiecțiile lui O pe planele (SBC), (SAC), (SAB), acestea sînt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor SNP, SMP, SMN. Deoarece patrulaterul $BNPC$ este inscriptibil (punctele B, C, P, N sînt pe o sferă), rezultă conform 1.47 că SO_A este perpendiculară pe BC. La fel, SO_C este perpendiculară pe AB și din lemă rezultă afirmația din enunț. **9.17.** Notînd $\|OA\| = a$, $\|OB\| = b$, $\|OC\| = c$, rezultă $\|AO_c\| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\|AO_b\| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$ și se verifică $\frac{\|AO_b\|}{\|AC\|} = \frac{\|AO_c\|}{\|AB\|}$ ceea ce arată că $|O_bO_c|$ este antiparalelă cu $|BC|$ (în raport cu unghiul BAC) și concluzia se impune. **9.18.** a) Fie I mijlocul segmentului $|OA|$ Punctul O_b este piciorul înălțimii din O în triunghiul IOB. Se vede ușor că $r_b = \frac{ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}$, $r_c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+4c^2}}$. b) Afirmația este un caz particular al problemei precedente. c) Deoarece $|CO_c|$ este perpendicular pe $|OO_c|$ și pe $|OB|$ rezultă că triunghiul BO_cC este dreptunghic în O_c; analog, CO_bB este dreptunghic în O_b. Notînd M mijlocul segmentului $|BC|$,

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $\| OM \| = \| MB \| = \| MC \| = \| MO_b \| = \| MO_c \|$ deci centrul sferei (Σ) este M. d) Sferele (S) și (Σ) se taie după un cerc situat în planul perpendicular pe segmentul $| IM |$ și care trece prin O. Raza acestui cerc este înălțimea din O a triunghiului IOM. Se obține $R = \frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. e) Presupunînd $a^2 + b^2 + c^2 = k^2$ — constant, folosind inegalitatea mediilor, obținem $a\sqrt{b^2+c^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = \frac{k^2}{2}$ și, prin urmare, $R \leqslant \frac{k}{4}$; egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă $a^2 = b^2 + c^2$, deci dacă și numai dacă $\| OA \| = \| BC \|$. **9.19.** Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele celor patru sfere tangente două cîte două. Deoarece $\| O_iO_j \| = 2r$, pentru $i \neq j$, rezultă că tetraedrul $O_1O_2O_3O_4$ este regulat. Fie O centrul acestui teatraedru (dacă C_1 este centrul triunghiului echilateral $O_2O_3O_4$, etc., atunci O se află la intersecția dreptelor O_iC_i, $i = 1, 2, 3, 4$, astfel încît $\frac{\| O_iO \|}{\| OC_i \|} = 3$). Deducem cu ușurință: $\| O_1C_1 \| = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ și deci $\| O_1O \| = \frac{3r}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Raza sferei circumscrise celor patru sfere este $R = r\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Notînd prin A_i punctul de tangență al sferei circumscrise celor patru sfere cu sfera de centru O_i, din asemănarea triunghiurilor OO_1O_2 și OA_1A_2 deducem $\| A_1A_2 \| = 2r\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **9.20.** Din asemănarea triunghiurilor ANM și AOB, rezultă $\frac{\| AN \|}{\| OA \|} = \frac{\| AM \|}{\| AB \|}$; iar din asemănarea triunghiurilor APM și AOC avem $\frac{\| AP \|}{\| OA \|} = \frac{\| AM \|}{\| AC \|}$ deci $\frac{\| AN \|}{\| AP \|} = \frac{\| AC \|}{\| AB \|}$ ceea ce arată că NP păstrează o direcție fixă (antiparalelă cu BC). De aici rezultă că mijlocul segmentului NP descrie un segment de dreaptă care are o extremitate în A. b) Cînd M este mobil pe OA, unghiul NMP are mărime constantă. Pentru calculul lui alegem situația cînd M coincide cu O. Atunci

Scanned with OKEN Scanner

$\|ON\| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\|OP\| = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$, $\|AN\| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Din asemănarea triunghiurilor APN și ABC deducem $\|NP\| = \frac{a^2 \cdot \sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2}}$; rezultă $\cos \widehat{NOP} = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2}}$. **9.21.** a) Dacă O este proiecția vîrfului S pe planul (ABC), condiția $\|SA\| = \|SB\| = \|SC\|$ este echivalentă cu afirmația „O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC“. De aceea, din ipoteză rezultă că punctele S, V se află pe perpendiculara în centrul cercului circumscris triunghiului ABC pe planul (ABC). b) Perpendiculara de mai sus. **9.22.** Piramidele cu vîrfurile în B, respectiv D' și avînd baza comună triunghiului $AB'C$ au muchiile laterale congruente: $\|AB\| = \|BC\| = \|BB'\|$; $\|AD'\| = \|D'B'\| = \|D'C\|$. Rezultă că diagonala $|D'B|$ este perpendiculară pe planul $(AB'C)$. Pentru partea a doua, observăm că planul $(A'DC')$ este perpendicular pe BD'. **9.23.** a) Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Deoarece AB este perpendiculară pe CH și pe CS, rezultă că ea este perpendiculară pe planul (CSH), deci pe dreapta SH. Analog, SH este perpendiculară pe BC, deci pe planul (ABC). Fie $C_1 = CH \cap AB$. În triunghiul dreptunghic CSC_1 avem $\frac{1}{\|SH\|^2} = \frac{1}{\|SC\|^2} + \frac{1}{\|SC_1\|^2}$, iar în triunghiul dreptunghic SAB, $\frac{1}{\|SC_1\|^2} = \frac{1}{\|SA\|^2} + \frac{1}{\|SB\|^2}$ relații care conduc la cea din enunț. (S-a folosit faptul că într-un triunghi dreptunghic de catete b și c și înălțime h are loc $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$). **9.24.** Este știut că locul geometric al punctelor din spațiu care au diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe constantă este un plan perpendicular pe dreapta celor două puncte. Fie E și F mijloacele segmentelor $|AB|$ și $|CD|$. Folosind formula medianei, condiția din enunț se scrie în forma $\|ME\|^2 - \|MF\|^2 = \frac{1}{4}(\|CD\|^2 - \|AB\|^2) = \text{constant}$. Rezultă că locul

geometric al punctului M cu proprietatea din enunț este un plan perpendicular pe segmentul $|EF|$. Observație. Condiția ca segmentele $|AB|$ și $|CD|$ să nu fie coplanare nu este esențială; ea sugerează doar abordarea spațială a problemei. **9.25.** Fie α și β cele două plane care determină diedrul, m muchia lui și d o dreaptă care intersectează muchia m în punctul O. (Evident, dacă d se află în unul din planele α, β problema nu admite soluții). Să presupunem problema rezolvată și fie a, b dreptele de intersecție a planului γ dus prin d, având proprietatea cerută, cu α, respectiv β; fie încă P un punct oarecare pe d, diferit de O și A, B punctele de intersecție ale perpendicularei în γ pe OP cu a, respectiv b. Atunci $\|AP\| = \|PB\|$. Planul δ perpendicular în P pe d conține dreapta AB. Fie Q intersecția planului δ cu m. În triunghiul AQB, $|PQ|$ este mediană. De aici rezultă construcția: fie P un punct oarecare pe d și δ un plan perpendicular în P pe d, a', b' intersecțiile planului δ cu α, β, Q intersecția acestui plan cu m. Ducem în planul δ dreapta prin P care taie pe a' și b' în punctele A, respectiv B, astfel încît $\|AP\| = \|PB\|$. Planul $\gamma = (AOB)$ este cel cerut. Pentru construcția dreptei prin P astfel încît $\|AP\| = \|PB\|$ vedeți (dacă e necesar) 10.35. Remarcăm, în final, că planul γ este independent de alegerea punctului P pe dreapta d, afirmație care se demonstrează ușor. **9.26.** Raportul ariilor triunghiurilor SMN și ASB este mn (vedeți 5.1.) iar raportul înălțimilor din P, respectiv din C ale piramidelor $SMNP$ și $SABC$ este p. Rezultă că raportul volumelor celor două piramide este mnp. **9.27.** Pe semidreptele $|AB$, $|DC$, $|A'B'$, $|D'C'$ luăm punctele B_1, C_1, A_1', C_1' astfel încît $\|BB_1\| = \|DC\| = \|B'B_1'\|$; $\|CC_1\| = \|AB\| = \|C'C_1'\|$. Evident, prismele $ABCA'B'C'D'$, $BB_1C_1CB'B_1'C_1'C'$ sînt congruente. Dar prisma $AB_1C_1DA'B_1'C_1'D'$ are volumul $h \cdot$ aria $(AB_1B_1'A') = h$ {aria $(ABB'A)$ + aria $(DCC'D')$} și formula din enunț se impune. **9.28.** Notînd cu h_1, h_2 înălțimile din A_1 și A_2, $\dfrac{\|A_1M\|}{\|A_2M\|} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ avem $\|A_1M_1\| = \dfrac{h_1\mu_1}{\mu_1\mu_2}$ deci $h_1 = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1}\|A_1M_1\|$. Rezultă vol $(A_1A_2A_3A_4) = \dfrac{\text{aria}\,(A_2A_3A_4)(\mu_1 + \mu_2)\|A_1M_1\|}{3\mu_1}$ de unde aria $(A_2A_3A_4) \cdot \|A_1M_1\| = \dfrac{3\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\text{vol}(A_1A_2A_3A_4)$. Analog, aria $(A_1A_3A_4) \cdot$

$\cdot \| A_2M_2 \| = \dfrac{3\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,\mathrm{vol}(A_1A_2A_3A_4)$ și deci aria $(A_2A_3A_4)\cdot$ $\cdot \| A_1M_1 \| +$ aria $(A_1A_3A_4)\cdot \| A_2M_2 \| = 3\ \mathrm{vol}(A_1A_2A_3A_4)$.

9.29. Tetraedrele $DA_iB_iC_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sînt asemenea cu tetraedrul $DABC$ avînd rapoartele de asemănare cu acesta $\dfrac{i}{n}$. Rezultă $V_i = \dfrac{i^3}{n^3}V$. Deci $4n\sum_{i=1}^{n-1} V_i = (n-1)^2V$.

9.30. a) Fie H proiecția punctului A pe planul (SBC), H' proiecția punctului A' pe planul $(SB'C')$; evident $\dfrac{\| A'H' \|}{\| AH \|} = \dfrac{\| SA' \|}{\| SA \|}$. Apoi, aria triunghiului $SB'C'$ este $\dfrac{1}{2}\| SB \| \cdot \| SC \| \cos \widehat{BSC}$, prin urmare $\dfrac{\mathrm{vol}(SA'B'C')}{\mathrm{vol}(SABC)} =$

$$= \frac{\frac{1}{3}\| A'H' \| \frac{1}{2}\| SB' \| \cdot \| SC' \| \cos \widehat{BSC}}{\frac{1}{3}\| AH \| \frac{1}{2}\| SB \| \| SC \| \cos \widehat{BSC}} = \frac{\| SA' \| \| SB' \| \| SC' \|}{\| SA \| \| SB \| \| SC \|}$$

b) Folosind rezultatul de la a), avem $\mathrm{vol}(SA'B'D') = \mu_a\mu_b\mu_d \dfrac{1}{2}\mathrm{vol}(SABCD)$ și $\mathrm{vol}(SB'C'D') = \mu_b\mu_c\mu_d \dfrac{1}{2}\mathrm{vol}(SABCD)$, de unde $\mathrm{vol}(SA'B'C'D') = \dfrac{1}{2}\mu_b\mu_d(\mu_a + \mu_c)\ \mathrm{vol}(SABCD)$.

c) Deoarece perechile (A, C), (B, D) au roluri simetrice, rezultă $\mu_b\mu_d(\mu_a + \mu_c) = \mu_a\mu_c(\mu_b + \mu_d)$ **9.31.** Fie O vîrful piramidei, A', B', M' puncte pe aceeași muchie situate pe baza de arie a, și b secțiunea prin M. Atunci $\dfrac{\| M'A' \|}{\| M'B' \|} = \dfrac{\sqrt{a}}{\lambda_b}$; $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{S_M}} = \dfrac{\| OB' \|}{\| OM' \|}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{S_M}} = \dfrac{\| OA' \|}{\| OM' \|}$. Deoarece $\| B'M' \| = \| OM' \| - \| OB' \|$ și $\| M'A' \| = \| OM' \| - \| OA' \|$, deducem $\| B'M' \| = \| OM' \| \cdot \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{S_M}}{\sqrt{S_M}}$, $\| M'A' \| =$ $= \| OM' \| \cdot \dfrac{\sqrt{S_M} - \sqrt{a}}{\sqrt{S_M}}$, de unde $\dfrac{\lambda_a}{\lambda_b} = \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{S_M}}{\sqrt{S_M} - \sqrt{a}}$ din care se obține relația din enunț. b) Ținînd seama

de condiția din enunț și de rezultatul de la a) avem $S_N\left(\frac{1}{\lambda_a}+\frac{1}{\lambda_b}\right)=\frac{\sqrt{a}}{\lambda_b}+\frac{\sqrt{b}}{\lambda_a}$ care, prin adunare cu relația de la a), conduce la $\sqrt{S_M}+\sqrt{S_N}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. **9.32.** Fie $ABCD$, tetraedrul secționat prin mijloacele M, N ale muchiilor $|AB|$ $|CD|$, P, Q, R, S punctele în care planul de secțiune intersectează dreptele BC, BD, AC, AD (fig. 9.32.). Unul din corpuri este format din piramida cu vîrful C și baza patrulaterul $PMSN$ și piramida cu vîrful C și baza triunghiului MAS, iar celălalt corp este format din piramida cu vîrful D și baza triunghiului BMP. Piramidele cu vîrfurile în C și D avînd baza comună

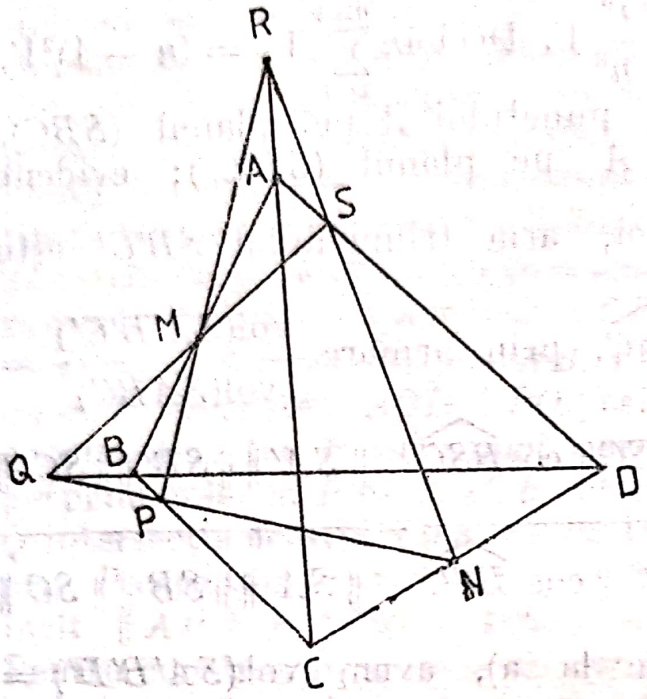


Fig. 9.32

$PMSN$ sînt echivalente. $\text{Vol}\,(DPBM)=\text{vol}\,(ABCD)\cdot\frac{\text{aria}\,(BPM)}{\text{aria}\,(BAC)}=\text{vol}(ABCD)\cdot\frac{\|BM\|\cdot\|BP\|}{\|BA\|\cdot\|BC\|}=\text{vol}\,(ABCD)\cdot\frac{\|BP\|}{2\|BC\|}$. Analog, $\text{vol}\,(CMAS)=\text{vol}\,(ABCD)\frac{\|AS\|}{2\|AD\|}$. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului BCD tăiat de transversala QPN și triunghiului BAD tăiat de QMS, obținem $\frac{\|BP\|}{\|PQ\|}=\frac{\|AS\|}{\|SD\|}$ de unde $\frac{\|BP\|}{\|BC\|}=\frac{\|AS\|}{\|AD\|}$ și deci $\text{vol}(DPBM)=\text{vol}(CMAS)$. **9.34.** *Soluția lui Traian Lalescu.* Fie O intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$. Atunci $\|OA\|\cdot\|OC\|=\|OB\|\cdot\|OD\|$. Fie α, β măsurile unghiurilor dreptelor AC și BD cu planul (p). Notînd cu accent proiecțiile punctelor pe planul (p), avem $\|O'A'\|=\|OA\|\cos\alpha$ etc. Condiția ca patrulaterul $A'B'C'D'$ să fie inscriptibil este ca $\|O'A\|\cdot\|O'C'\|=\|O'B'\|\cdot\|O'D'\|$ și deci $\alpha=\beta$. Presupunînd că planul (p) nu este paralel cu planul (π), rezultă că AC și BD intersectează planul (p) în punctele

M și N. Rezultă că triunghiurile $OO'M$ și $OO'N$ sînt congruente și deci $\| OM \| = \| ON \|$, $\| O'M \| = \| O'N \|$. Rezultă că MN este perpendiculară pe o bisectoare a unghiului $\widehat{MON}$, deci paralelă cu cealaltă bisectoare, adică cu bisectoarea unghiului $\widehat{COD}$. Așadar, pentru ca $A'B'C'D'$ să fie inscriptibil este necesar ca planul (p) să fie paralel cu una din bisectoarele unghiului dreptelor AC și BD. Un raționament simplu arată că această condiție este și suficientă. **9.35.** Desfășurînd triedrul pe un plan ca în figura 9.35. deducem că punctele B, C sînt intersecțiile

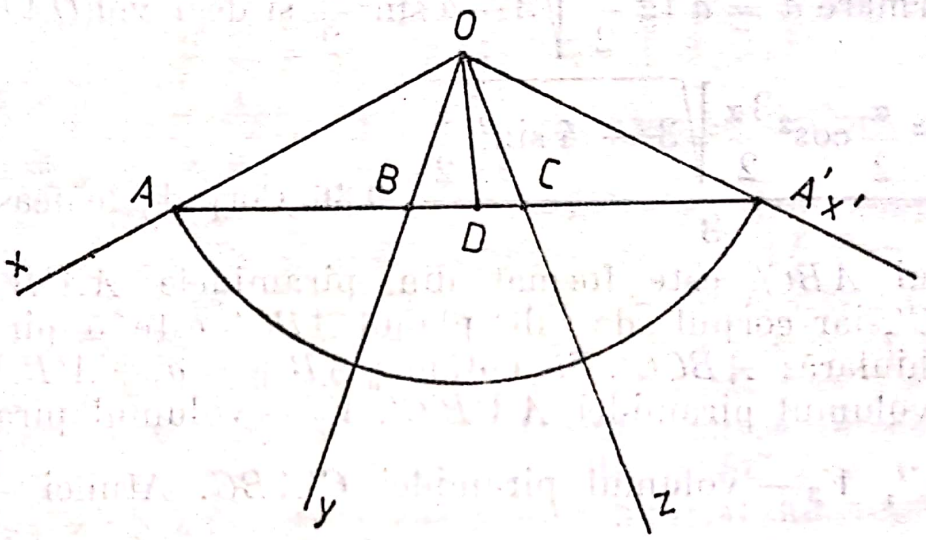


Fig. 9.35

segmentului $| AA' |$ cu $[Oy$ și $[Oz$. Un calcul simplu arată că $\| OB \| = \| OC \| = \dfrac{a \cos \frac{3\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$, $\| AB \| = 2a \sin \frac{\alpha}{2} = \| AC \|$,

$\| BC \| = 2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$, $\| OD \| = a \cos \frac{3\alpha}{2}$, D fiind proiecția lui O pe BC. Rezultă: aria $[OBC] = a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{3\alpha}{2}$.

Rămîne de evaluat distanța punctului A la planul (OBC). În acest scop să considerăm punctele $M \in [Oy$, $N \in [Oz$ astfel ca $\| OM \| = \| ON \| = \| OA \| = a$. Evident, piramida $[OAMN]$ este regulată, aria bazei AMN este

$a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{3}$, deoarece $\|AM\| = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$; înălțimea $|OH|$ are lungimea $a\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ și deci volumul piramidei $[OA\hat{M}N]$ este $\frac{a^3\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{3}$. Notînd d distanța punctului A la planul yOz, același volum este $\frac{1}{3}d\frac{a^2\sin\alpha}{2}$, prin urmare $d = a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ și deci $\mathrm{vol}(OABC) = \frac{a^3tg^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{3}$. **9.36.** Corpul „de deasupra" planului ABC' este format din piramidele $AA'B'C'$ și $ABB'C'$, iar corpul „de sub" planul ABC' este o piramidă triunghiulară: $ABCC'$. Să notăm $\|AB\| = a$, $\|A'B\| = b$, V_1 — volumul piramidei $AA'B'C'$, V_2 — volumul piramidei $ABB'C'$, V_3 — volumul piramidei $C'ABC$. Atunci $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\mathrm{aria}(AA'B')}{\mathrm{aria}(ABA')} = \frac{b}{a}$, $\frac{V_2}{V_3} = \frac{\text{distanța lui } B' \text{ la planul}(ABC')}{\text{distanța lui } C \text{ la planul } (ABC')} = \frac{\text{distanța lui } M' \text{ la planul } (ABC')}{\text{distanța lui } M \text{ la planul } (ABC')} = \frac{b}{a}$ (M' este mijlocul segmentului $|A'B'|$, M este mijlocul segmentului $|AB|$). Rezultă $\frac{V_1+V_2}{V_3} = \frac{b(a+b)}{a}$. **9.37.** Secțiunea se construiește astfel: dreapta care trece prin mijlocul D al laturii $|AB|$ și mijlocul H al înălțimii $|SO|$ taie SC în M. Secțiunea este triunghiul (isoscel) AMB. Notînd $\|OD\| = x$, avem $x = hc\,\mathrm{tg}\alpha$, latura bazei este $2x\sqrt{3} = 2h\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\alpha$. Calculul înălțimii triunghiului de secțiune se face astfel: dacă ON este paralelă cu DM, $N \in SC$, atunci $\|SM\| = \|MN\|$, $\|NC\| = 2\cdot\|MN\|$, deci $\|SM\| = \frac{1}{4}\|SC\| = h\sqrt{1+4\mathrm{tg}^2\alpha}$,

Scanned with OKEN Scanner

$\| MC \| = 3 \cdot \| SM \| = 3h\sqrt{1 + 4\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\| DC \| = 3h\mathrm{tg}\alpha$, $\| SD \| = h\,\mathrm{cosec}\alpha$ și apoi se aplică relația lui Stewart. Distanța lui S la planul de secțiune este înălțimea din S a triunghiului SDM, a cărui arie este $\frac{1}{4}$ din aria triunghiului SDC. **9.38.** Fie A mijlocul segmentului $|A_3A_4|$, $B = AA_1 \cap B_3B_4$. Atunci $G = A_1G_1 \cap B_2B$. Aplicînd rezultatul din 2.4. avem $2 \cdot \|G_1A\| \frac{\|A_1A\|}{\|A_1B\|} + \|G_1A\| \frac{\|A_1A_2\|}{\|A_1B_2\|} = 3 \cdot \|G_1A\| \frac{\|A_1G_1\|}{\|A_1G\|}$ și $\|A_4A\| \cdot \frac{\|A_1A_3\|}{\|A_1B_3\|} + \|AA_3\| \frac{\|A_1A_4\|}{\|A_1B_4\|} = \|A_3A_4\| \frac{\|A_1A\|}{\|A_1B\|}$ sau $2\frac{\|A_1A\|}{\|A_1B\|} + \frac{\|A_1A_2\|}{\|A_1B_2\|} = 3\frac{\|A_1G_1\|}{\|A_1G\|}$ și $\frac{\|A_1A_3\|}{\|A_1B_3\|} + \frac{\|A_1A_4\|}{\|A_1B_4\|} = 2\frac{\|A_1A\|}{\|A_1B\|}$ din care se deduce relația. **9.39.** Fie $ABCD$ un tetraedru echifacial. Din congruența triunghiurilor ABC și DBC rezultă: sau „$\|AB\| = \|DB\|$ și $\|AC\| = \|DC\|$“ (1) sau „$\|AB\| = \|CD\|$ și $\|DB\| = \|AC\|$“ (2). În situația (1), din congruența triunghiurilor BAD și CAD rezultă $\|AB\| = \|AC\| = \|BD\| = \|CD\|$ și atunci toate muchiile sînt congruente-tetraedrul este regulat. În cazul (2) rezultă $\|BC\| = \|AD\|$. **9.40.** a) Deoarece fețele tetraedrului echifacial sînt congruente, exprimînd volumul lui în patru moduri, deducem că înălțimile sînt congruente. b) Fie P mijlocul muchiei $|BC|$. Triunghiul APD este isoscel, deci triunghiurile APG_a și DPG_d sînt congruente, de unde $\|AG_a\| = \|DG_d\|$. c) Fie H_a proiecția lui A pe fața $[BCD]$ și O_a proiecția lui G. Din egalitatea de la b) rezultă $\|GA\| = \|GB\| = \|GC\| = \|GD\|$ deci G este centrul sferei circumscrise tetraedrului. Din triunghiurile asemenea GO_aG_a și AH_aG_a rezultă $\|GO_a\| = \frac{1}{4}\|AH_a\|$ și, conform punctului a), obținem $\|GO_a\| = \|GO_b\| = \ldots$, deci G este și centrul sferei înscrise în tetraedru. d) Triunghiul APD fiind isoscel, mediana $|PQ|$ este perpendiculară pe AD. Din simetrie, rezultă că ea este perpendiculară și pe BC. e) Fie R și S mijloacele segmentelor $|CD|$ și $|AB|$. Patrulaterul $PRQS$ este romb, deci PQ și RS sînt perpendiculare. **9.41.** Notînd prin G_a, G_b, G_c, G_d centrele de greutate

Scanned with OKEN Scanner

ale fețelor BCD, etc., condiția din enunț se scrie: $\| AG_a \| = \| BG_b \| = \ldots$. Fie $\| AB \| = b$, $\| AC \| = c$, $\| AD \| = d$, $\| BC \| = \delta$, $\| CD \| = \beta$, $\| BD \| = \gamma$. Un calcul elementar, utilizînd relația lui Stewart în triunghiul APD, ne conduce la $\| AG_a \|^2 = \frac{b^2 + c^2 + d^2}{3} - \frac{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{9}$. Analog $\| BG_b \|^2 = \frac{b^2 + \gamma^2 + \delta^2}{3} - \frac{c^2 + d^2 + \beta^2}{9}$ și celelalte. Din $\| AG_a \| = \| BG_b \|$ rezultă $c^2 + d^2 = \gamma^2 + \delta^2$. Alături de acestea obținem $b^2 + c^2 = \beta^2 + \gamma^2$, $b^2 + d^2 = \beta^2 + \delta^2$, relații din care se deduce $b = \beta$, $c = \gamma$, $d = \delta$. **9.42.** a) Fie G_0 centrul de greutate al feței ABC. Atunci, ca în problema 9.41., deducem $\| OG_0 \|^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ și atunci $\| OG \| = \frac{3}{4} \| OG_0 \| = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}}{4}$ — raza sferei circumscrise. Evident, G se proiectează în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, fie el Ω. Raza sferei înscrise este $\| G\Omega \|$. Notînd prin R raza cercului circumscris triunghiului ABC avem $\| G\Omega \|^2 = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2) - R^2$. Folosind relația sinusului în triunghiul ABC, avem: $\frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2) - R^2 = R^2 \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2}{2} = \frac{R^2}{2}\left[\frac{1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B}{2} + \sin^2 C - 2\right] = \frac{R^2}{2}\left[\frac{-\cos 2A - \cos 2B}{2} + \sin^2 C - 1\right] = \frac{R^2}{2}[-\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C] = R^2 \cos A \cos B \cos C$ și deci raza sferei înscrise este $R\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$. b) Înălțimea tetraedrului este de patru ori raza sferei înscrise, $h = 4R\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$, iar volumul lui este $\frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$. c) Fie H piciorul înălțimii din O și S aria unei fețe a tetraedrului. Atunci aria $[BHC] = S \cos \alpha$, aria $[AHC] = S \cos \beta$, aria $[AHB] = S \cos \gamma$ și,

Scanned with OKEN Scanner

cum suma ariilor celor trei triunghiuri este S, rezultă $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$. d) Avem $\sin\alpha = \frac{h}{h_a}$ și deci $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{2Rh}{ah_a}$ și cele două similare; deoarece $ah_a = bh_b = ch_c$, egalitatea se impune. **9.43.** În mod evident, G_AG_B este paralelă cu AB etc., deci $G_AG_BG_CG_D$ este un tetraedru asemenea celui dat cu raportul de asemănare $\frac{1}{3}$. Fie A' pe dreapta AM astfel încît $\|MA'\| = \frac{1}{3}\|AM\|$ în ordinea A, M, A'; B', C', D' — analoagele. Atunci $A'B'C'D'$ este un tetraedru congruent cu $G_AG_BG_CG_D$. Sferele cu centrele A', B', C', D' de raze $\|A'M\|$, $\|B'M\|$, $\|C'M\|$, $\|D'M\|$ au evident punctul comun M. Afirmația din enunț rezultă. Punctul comun al celor patru sfere din enunț se obține ducînd paralele la AM, BM, CM, DM prin G_A, G_B, G_C, G_D, care conform celor demonstrate sînt concurente. **9.44.** Fie G centrul de greutate al triunghiului BCD. Atunci $G_e \in |AG|$, $G_a \in |EG|$ astfel că $\|AG_e\| = 3\cdot\|GG_e\|$ și $\|EG_a\| = 3\cdot\|G_aG\|$. Evident $|G_eG_a|$ și AE sînt paralele. Paralelele prin E și A la OG_e și OG_a sînt concurente într-un punct Q așa încît $\|AQ\| = 4\cdot\|OG_a\|$ și $\|EQ\| = 4\cdot\|OG_e\|$. La fel se arată că paralela prin D la OG_d intersectează pe AQ într-un punct Q' cu proprietatea $\|AQ'\| = 4\cdot\|OG_a\|$, deci $Q' \equiv Q$ etc. b) Considerînd triunghiul AGE în care G_eG_a este paralelă cu AE, deducem că segmentele $|AG_a|$, $|EG_e|$ se taie într-un punct P astfel că $\frac{\|PA\|}{\|PG_a\|} = \frac{\|AE\|}{\|G_eG_a\|} = 4$ de unde rezultă că $5\cdot\|PA\| = 4\cdot\|AG_a\|$. Așadar, segmentele $|BG_b|$ și $|AG_a|$ se taie într-un punct P' încît $5\cdot\|P'A\| = 4\cdot\|AG_a\|$, deci P' coincide cu P și concluzia se impune. c) Se observă că triunghiurile OPG_a și QPA sînt asemenea, avînd laturile proporționale. Rezultă că unghiurile $\widehat{OPG_a}$ și $\widehat{QPA}$ sînt congruente, deci punctele O, P, Q sînt coliniare. **9.45.** Fie H_i proiecția lui A_i pe fața opusă, M_i proiecția lui M pe A_iH_i, N_i proiecția lui M pe fața opusă lui A_i. Atunci $\Sigma\|MA_i\|a_i\cos\alpha_i = \Sigma\|A_iH_i\|\cdot a_i - \Sigma\|M_iH_i\|\cdot a_i = 12\ \text{vol}[ABCD] - \Sigma 3\ \text{vol}[MA_iA_{i+1}A_{i+2}] = 8\ \text{vol}[ABCD]$, unde $A_j \equiv A_k$

dacă $j \equiv k \pmod 4$. **9.46.** Se aplică legea paralelogramului (vedeţi 3.7) în $ACC'A'$, $BDD'B'$ şi $ABCD$. **9.47.** Aria piramidei este $a^2(1+\sqrt{7})$, volumul este $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$, unghiul unei feţe cu planul bazei este $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$, raza sferei înscrise este $\frac{a\sqrt{3}}{1+\sqrt{7}}$. **9.48.** Fie l şi L laturile bazei mici şi bazei mari din aceeaşi faţă a trunchiului. Atunci $\frac{s}{S}=\frac{l^2}{L^2}$, $\frac{s}{S_m}=\frac{4l^2}{(L+l)^2}$ de unde se obţine $4S_m = S+s+2\sqrt{Ss}$. Deoarece volumul trunchiului de piramidă este $\frac{h}{3}(S+s+\sqrt{Ss})$ deducem, din cele două relaţii, relaţia din enunţ. **9.49.** Unghiul poligonului de bază este $2\varphi = \frac{180(n-2)}{2n}$. Să notăm cu $2x$ latura poligonului, a_p apotema lui, A_p apotema unei feţe, R raza cercului circumscris lui. Atunci $R=\frac{x}{\sin\varphi}$; $a_p = x\operatorname{tg}\varphi$, $A_p^2 = h^2 + x^2\operatorname{tg}^2\varphi = x^2\operatorname{tg}^2\alpha$ de unde deducem $x=\frac{h}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\varphi}}$ şi deci $a_p=\frac{h\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\varphi}}$; $A_p=\frac{h\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\varphi}}$ etc. **9.50.** a) Planul de secţiune taie baza după segmentul $|MN|$, N fiind mijlocul lui $|DC|$, iar feţele $[SAB]$, $[SBC]$, $[SDC]$ după liniile mijlocii $|MQ|$, $|QP|$, $|PN|$. Secţiunea este, deci, trapezul isoscel $MNPQ$. b) Aria secţiunii este $\frac{3a\sqrt{4m^2-a^2}}{16}$ observînd că înălţimea trapezului este jumătate din apotema piramidei date. c) Notăm V volumul piramidei date, S aria uneia din feţele laterale (exprimabile cu datele problemei). Calculăm volumul poliedrului cu vîrfurile S, A, D, M, N, P, Q. Acesta este egal cu suma volumelor piramidelor cu vîrful comun S şi avînd bazele $AMND$ şi respectiv $MNPQ$, primul fiind $\frac{V}{2}$. Pentru calculul celui de al doilea, observăm

Scanned with OKEN Scanner

că distanța punctului S la planul $(MNPQ)$ este egală cu distanța punctului B la acest plan și deci egală cu jumătatea distanței acestuia la planul (SAD), fie ea $2d$. Deoarece volumul piramidei $BSAD$ este $\frac{V}{2} = \frac{2S_d}{3}$, rezultă $d = \frac{3V}{4S}$ etc.

9.51. Dacă trunchiul de piramidă rezultat admite o sferă înscrisă, aceasta nu poate fi decît sfera înscrisă în piramidă. Notînd prin r raza sferei înscrise în piramidă, rezultă $x = h - 2r$ și se ține seama că $r = \frac{a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{4h}$.

9.52. a) Planul de secțiune intersectează planul bazei după o paralelă la BD și care trece prin O. Această dreaptă taie pe BC în B' și pe DC în D'. Planul de secțiune taie fața $[ACD]$ după paralela prin D' la AD și fața $[ACB]$ după paralela prin B' la AB; aceste două drepte taie pe AC în același punct (evident!) A'. Secțiunea este deci triunghiul isoscel(!) $A'B'C'$. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sînt asemenea, avînd raportul de asemănare $\frac{6}{5}$. Rezultă aria $[A'B'C'] = \frac{25}{36}$ aria $[ABC] = \frac{25m\sqrt{3(m^2 + 48h^2)}}{864}$. b) Perpendiculara din O pe planul (ABD) intersectează acest plan într-un punct situat pe AC' (!) Așadar, distanța între cele două plane este egală cu înălțimea triunghiului dreptunghic AOC': $\frac{mh}{\sqrt{m^2 + 48h^2}}$. **9.53.** Notînd prin h înălțimea piramidei și a latura bazei, rezultă $h^2 + \frac{a^2}{2} = m^2$ și $2h = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ de unde se obține $a = \frac{2m}{\sqrt{2 + \mathrm{tg}^2\alpha}}$, $h = \frac{m\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{2 + \mathrm{tg}^2\alpha}}$. Secțiunea considerată este un trapez isoscel ale cărui baze au lungimile a și $\frac{a}{2}$ și înălțimea de lungime $\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2}$. **9.54.** Partea comună celor două piramide constă din două piramide parulatere regulate avînd aceeași bază de latură de lungime $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ și suma înălțimilor $a\sqrt{\frac{17}{2}}$. **9.55.** Sfera înscrisă este tangentă bazelor trunchiului în centrele acestora (!).

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu x, y, r, a apotema bazei mici, apotema bazei mari, raza sferei înscrise și, respectiv, muchia laterală, avem: $xy = r^2$, $r = \frac{a \sin \alpha}{2}$, $y - x = \frac{a \cos \alpha}{2}$. Se obține $\frac{\text{vol. trunchiului}}{\text{vol. sferei}} = \frac{3\sqrt{3}(1 + 3\operatorname{tg}^2\alpha)}{2\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}$. **9.56.** Notînd cu x, y, r, a lungimile apotemei bazei mici, apotemei bazei mari, a razei sferei înscrise, respectiv a muchiei laterale, rezultă $xy = r^2$, $r = \frac{a \sin \alpha}{2}$, $y - x = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{2}}$ și, în consecință, vol. sferei $= \frac{\pi a^3 \sin^3 \alpha}{6}$, vol, trunchiului $= \frac{a^3 \sin \alpha (2 + \sin^2 \alpha)}{3}$.

Observație. Condiția $xy = r^2$ este necesară și suficientă ca trunchiul să admită o sferă înscrisă. **9.57.** Notînd $E = BC' \cap CB'$ și $F = AC' \cap CA'$, partea comună poliedrelor din enunț este piramida cu vîrful C' și baza trapezul isoscel $A'B'EF$. Dar $\frac{\text{vol}(C'A'B'EF)}{\text{vol}(C'A'B'C)} = \frac{\text{aria}(A'B'EF)}{\text{aria}(A'B'C)} = \frac{5}{9}$ deoarece $\frac{\text{aria}\,(ECF)}{\text{aria}\,(A'B'C)} = \frac{4}{9}$. Deoarece piramida $CA'B'C'$ are baza $A'B'C'$ de arie $a^2\sqrt{3}/4$ și înălțimea de lungime $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, deducem vol $(C'A'B'EF) = \frac{5a^3\sqrt{2}}{108}$. **9.58.** Fie M, N, P mijloacele muchiilor $|AB|$, $|BC|$, $|SD|$ și E mijlocul segmentului $|OB|$, $G = EP \cap SO$, O fiind centrul bazei. Planul de secțiune considerat taie planul (SAC) după paralela prin G la AC, fie ea RQ, $R \in |SC|$, $Q \in |SA|$. Secțiunea este pentagonul $MNRPQ$. Calculul ariei secțiunii se face observînd că $\|OG\| = \frac{h}{4}$, $\|RQ\| = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, $\|EG\| = \|GP\| = \frac{1}{4}\sqrt{h^2 + 2a^2}$, $\|MN\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

9.59. Observăm la început că dacă două cercuri în spațiu au două puncte comune M și N, atunci perpendicularele în centrele lor, pe planele lor, sînt concurente. (În adevăr, aceste perpendiculare se găsesc în planul mediator segmentului $|MN|$.) Fie deci (d_1) și (d_2) perpendicularele în centrele cercurilor pe planele acestora și A_1, A_2 cîte un punct pe ele.

Scanned with OKEN Scanner

Planul mediator segmentului $|A_1A_2|$ taie pe (d_1) și (d_2) în punctele O_1 și O_2. Planul (α) (care există!) perpendicular pe O_1O_2 și care conține-pe A_1A_2 este înțepat de O_1O_2 în punctul O. Cercul de centru O și rază $\|OA_1\|$ situat în planul (α) satisface condițiile. **9.60.** Să presupunem că proiecția vîrfului A pe fața SBC este situată pe înălțimea $|SA_1|$ a acesteia. Rezultă că dreapta BC este perpendiculară pe planul (SAA_1) astfel că muchiile opuse $|SA|$ și $|BC|$ sînt perpendiculare. Rezultă că orice plan care secționează tetraedrul și este paralel cu cele două muchii perpendiculare determină în tetraedru un dreptunghi. Este clar că asemenea plane există, de exemplu planul care conține mijloacele muchiilor $|SA|$, $|SC|$, $|AB|$, $|AC|$. Dacă și vîrful B posedă proprietatea atunci rezultă că muchiile $|SB|$ și $|AC|$ sînt perpendiculare; în baza unei proprietăți remarcate mai devreme, rezultă că și cealaltă pereche de muchii opuse este formată din drepte perpendiculare (vă amintiți?) și atunci fiecare vîrf se proiectează pe fața opusă în ortocentrul acesteia (vedeți, oricum, 9.15). **9.61.** Această problemă are următoarea inspirație din geometria plană: Fie OAB un triunghi isoscel, $\|OA\| = \|OB\|$, M mijlocul laturii $|AB|$, P și Q punctele în care o dreaptă prin M intersectează dreptele OA și OB; atunci are loc $\frac{1}{\|OP\|} + \frac{1}{\|OQ\|} = \frac{2}{\|OA\|}$. În adevăr, presupunînd că dreapta prin M intersectează pe OB în punctul Q interior segmentului $|OB|$, va intersecta pe OA în punctul P astfel că avem ordinea O, A, P. Paralela prin A la PQ taie pe $|OB|$ în punctul N. Atunci $\frac{\|OA\|}{\|OP\|} = \frac{\|ON\|}{\|OQ\|} = \frac{\|OQ\| - \|NQ\|}{\|OQ\|} =$ $= \frac{\|OQ\| - (\|OB\| - \|OQ\|)}{\|OQ\|} = 2 - \frac{\|OB\|}{\|OQ\|}$, cu observația că $\|NQ\| = \|QB\|$, de unde afirmația. Acum este clar, revenind la problemă, că dacă cele patru puncte din enunț sînt coplanare, atunci are loc relația. Reciproca se demonstrează prin reducere la absurd, folosind directa demonstrată. **9.62.** Constatăm că punctele O_1 și O_2 se găsesc pe segmentul $|A_3O|$, respectiv pe $A_4O|$ astfel încît $\frac{\|A_3O_1\|}{\|A_3O\|} = \frac{\|A_3M\|}{\|A_3A_4\|}$ și $\frac{\|A_4O_2\|}{\|A_4O\|} = \frac{\|A_4M\|}{\|A_3A_4\|}$. Astfel problema

este redusă la un cadru plan pentru care vă trimitem să reanalizați problema 1.79. Remarcăm, doar, că suma razelor celor două sfere este egală cu raza sferei circumscrise tetraedrului al cărei centru a fost notat O. **9.63.** Fețele laterale ale piramidei date sînt triunghiuri isoscele și, folosind ipoteza, deducem că dreptele BC și bc sînt paralele. Deoarece triunghiurile Bbb_1 și Ccc_1 sînt congruente rezultă $|bb_1|$ și $|cc_1|$ congruente și atunci $|ab_1|$ și $|ac_1|$ sînt congruente, deci triunghiul ab_1c_1 este echilateral. Se demonstrează cu ușurință că triunghiul Sb_2c_2 este echilateral, b_2c_2, bc și BC sînt paralele, iar $\|Bb_2\| = \|Cc_2\|$. a) Piramida $SBCb_2c_2$ are baza trapezul isoscel BCb_2c_2 și vîrful S. Să considerăm planul care trece prin B și este paralel cu planul abc; acesta intersectează muchia Sa în punctul M, triunghiul BMC este echilateral și latura lui are mărimea Bl. Din asemănarea triunghiurilor Sb_2a și aMB deducem latura Sb_2, $\|Sb_2\| = \frac{\beta l}{1-\beta}$. Să observăm că $\text{vol}(SBCb_2c_2) = \text{vol}(aSb_2c_2) - \text{vol}(aMBC) - \text{vol}(SMBC)$. Deoarece înălțimea piramidei aSb_2c_2 este egală cu înălțimea $|SO|$ adică cu $\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3m^2-l^2}$, iar aria triunghiului Sb_2c_2 este $\frac{\beta^2 l^2\sqrt{3}}{4(1-\beta)^2}$ deducem că $\text{vol}(aSb_2c_2) = \frac{\beta^2 l^2\sqrt{3m^2-l^2}}{12(1-\beta)^2}$. Pe de altă parte $\text{vol}(aMBC)+\text{vol}(SMBC) = \frac{1}{3}\text{aria}[MBC]\cdot(h_1+h_2)$ unde h_1 și h_2 sînt înălțimile din a și respectiv S ale celor două piramide; observînd că suma lor este $\|SO\|$, rezultă că suma celor două volume este $\frac{\beta^2 l^2\sqrt{3m^2-l^2}}{12}$ și prin urmare $\text{vol}(SBCb_2c_2) = \frac{\beta^2 l^2(2-\beta)\sqrt{3m^2-l^2}}{12(1-\beta)^2}$. b) Calculăm latura triunghiului echilateral ab_1c_1. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului Sca tăiat de transversala CAc_1 se obține $\frac{\|SC\|}{\|Cc\|} = \frac{\beta}{1-\beta}$; $\frac{\|SA\|}{\|Aa\|} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$; $\frac{\|ac_1\|}{\|cc_1\|} = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha(1-\beta)}$ de unde $\|ac_1\| = \frac{\beta l(1-\alpha)}{\alpha-\beta}$. Pentru calculul înălțimii din A,

fie ea $|AO'|$, folosim triunghiurile asemenea AaO' și aSO de unde deducem $AO' = (1-\alpha)\|SO\| = (1-\alpha)\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3m^2-l^2}$ și deci $\text{vol}(Aab_1c_1) = \frac{\beta^2(1-\alpha)^2l^2}{12(\alpha-\beta)^2}\sqrt{3m^2-l^2}$. c) Poliedrul $BCcb_1c_1$ este un prismatoid (rezultat prin intersecția unei suprafețe prismatice prin două plane, nu neapărat paralele). Volumul unui prismatoid este $\frac{1}{3}$ din produsul dintre suma muchiilor paralele și aria unei secțiuni perpendiculare pe muchiile paralele (demonstrați afirmația!). Fie a_2, a', a_1 mijloacele muchiilor $|BC|$, $|bc|$, $|b_1c_1|$; observînd că Sa' este perpendicular pe bc și Sa' intersectează pe $|BC|$ în a_2 — mijlocul lui $|BC|$ — deducem că secțiunea perpendiculară pe muchii este triunghiul $a_2a'a_1$. Apoi $\|a'a_2\| = \|Sa'\| - \|Sa_2\| = \frac{(1-\beta)\sqrt{4m^2-l^2}}{2}$, $\|a'a_1\| = \|aa'\| + \|aa_1\| = \frac{\alpha l(1-\beta)\sqrt{3}}{2(\alpha-\beta)}$, $\sin\widehat{Sa'a} = \frac{\|SO\|}{\|Sa'\|} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3m^2-l^2}}{3\sqrt{4m^2-l^2}}$ prin urmare $\text{aria}[a_2a'a_1] = \frac{\alpha(1-\beta)^2l}{4(\alpha-\beta)}\sqrt{3m^2-l^2}$, și se obține $\text{vol}(BCb_1cbc_1) = \frac{\alpha(1-\beta)^2(\alpha-\beta^2)l^2\sqrt{3m^2-l^2}}{12(\alpha-\beta)^2}$. **9.64.** Dreptele A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 se intersectează în centrul de greutate G al triunghiului ABC. Notînd cu C_i intersecția planului considerat cu muchia $|AA_i|$ constatăm, folosind triunghiurile AB_iA_i, că dreapta A_iM_i taie pe AG într-un punct I care nu depinde de i, anume astfel încît, G_1 fiind centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$, diviziunea (A, G_1, I, G) este armonică! **9.65.** Planul (ADA') taie triunghiul BCD după mediana $|DO|$ (O — mijlocul lui $|BC|$), astfel că $|AA'|$ intersectează planul (BCD) într-un punct situat pe mediana $|DO|$. Din trapezul $DA'OA$, în care $2\|AO\| = \|DA'\|$, se decid concluziile. **9.66.** Dreapta SM intersectează planul bazei (ABC) în punctul T, iar SP, SQ, SR intersectează laturile BC, CA, AB în punctele A', B', C' și evident, AA', BB', CC' sînt concurente în T. Utilizînd

Scanned with OKEN Scanner

rezultatul din 9.26 deducem că $\frac{\text{vol}[MPQR]}{\text{vol}[MABC]} = \frac{\|MP\|}{\|MA\|} \cdot \frac{\|MQ\|}{\|MB\|} \cdot \frac{\|MR\|}{\|MC\|}$ și $\frac{\text{vol}[SPQR]}{\text{vol}[SA'B'C']} = \frac{\|SP\|}{\|SA'\|} \cdot \frac{\|SQ\|}{\|SB'\|} \cdot \frac{\|SR\|}{\|SC'\|}$ din care deducem că $\frac{\text{vol}[MPQR]}{\text{vol}[SPQR]} \cdot \frac{\text{vol}[SA'B'C']}{\text{vol}[MABC]} = \frac{\|MP\|}{\|MA\|} \cdot \frac{\|MQ\|}{\|MB\|} \cdot \frac{\|MR\|}{\|MC\|} \cdot \frac{\|SA'\|}{\|SP\|} \cdot \frac{\|SB'\|}{\|SQ\|} \cdot \frac{\|SC'\|}{\|SR\|}$. Observînd că $\frac{\text{vol}(SA'B'C']}{\text{vol}[SABC]} = \frac{\text{aria}[A'B'C']}{\text{aria}[ABC]}$ și $\frac{\text{vol}[MABC]}{\text{vol}[SABC]} = \frac{\|SM\|}{\|ST\|} = \frac{1}{k+1}$ obținem $\frac{\text{vol}[MPQR]}{\text{vol}[SPQR]} \cdot \frac{\text{aria}[A'B'C']}{\text{aria}[ABC]} (k+1) = \frac{\|MP\| \|MQ\| \|MR\| \|SA'\| \|SB'\| \|SC'\|}{\|MA\| \|MB\| \|MC\| \|SP\| \|SQ\| \|SR\|}$. Notînd $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} = x$, $\frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} = y$, $\frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = z$ avem, conform teoremei lui Ceva, $xyz = 1$ și, în baza rezultatului găsit în 5.12, $\frac{\text{aria}[A'B'C']}{\text{aria}[ABC]} = \frac{1+xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} = \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)}$. Aplicînd teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'C$ tăiat de transversala BTB' găsim $\frac{\|AT\|}{\|TA'\|} = (x+1)y$; aceeași teoremă aplicată triunghiului APA' tăiat de transversala SMT conduce la $\frac{\|MP_1\|}{\|MA\|} \cdot \frac{\|SA'\|}{\|SP\|} = \frac{\|TA'\|}{\|TA\|} = \frac{1}{(1+x)y}$. Aceste rezultate conduc la relația din enunț. **9.67.** Problema este analogul spațial al rezultatului din 1.15. Sferele $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ intersectează planul $A_1A_2A_3$ după cercurile circumscrise triunghiurilor $A_1B_{12}B_{13}$ și analoagele și conform rezultatului invocat ele au un punct comun în planul $A_1A_2A_3$. Centrele lor se află pe trei perpendiculare distincte pe acest plan, ceea ce arată că aceste trei sfere nu fac parte dintr-un fascicul și prin urmare ele au exact două puncte comune. În concluzie, oricare din cele patru sfere din enunț au exact cîte două puncte comune, ceea dovedește că toate patru au un punct comun. **9.68.** Fie A_i aria feței care face cu planul bazei

unghiul α_i (ascuţit, conform ipotezei). Atunci $A_b = \sum_i A_i \cos\alpha_i$ de unde rezultă $[\min(\cos\alpha_i)] \sum_i A_i \leqslant A_b \leqslant (\sum_i A_i) \cdot \max(\cos\alpha_i)$ adică $\min(\cos\alpha_i)\, A_l \leqslant A_b \leqslant A_l \cdot \max(\cos\alpha_i)$ şi deoarece $\cos\alpha_i > 0$ pentru orice i, afirmaţia se impune. **9.69.** Dacă curba este un cerc mare al sferei (intersecţia sferei cu un plan care trece prin centrul ei), atunci ea împarte sfera în două emisfere şi are exact lungimea $2\pi r$. Să presupunem că nu este acesta cazul. Observăm că în acest caz curba nu se poate afla într-o anumită emisferă. În adevăr, dacă aşa ar sta lucrurile, ar exista un plan prin centrul sferei astfel încît toate punctele curbei se află de aceeaşi parte a acestuia, eventual pe cercul de intersecţie al acestuia cu sfera, dar oricum are puncte care nu se află pe acest cerc şi atunci cele două suprafeţe în care împarte sfera nu au aceeaşi arie. Să considerăm o simetrie faţă de centrul sferei şi fie C' simetrica curbei C cu proprietatea din enunţ. Atunci curba C' împarte sfera în două suprafeţe de arii egale şi are aceeaşi lungime cu C. De aceea, cele două curbe C şi C' trebuie să se intersecteze, în cel puţin două puncte, evident diametral opuse în sferă. Deoarece un arc de curbă pe sferă, care uneşte două puncte diametral opuse şi care are lungime minimă, este un semicerc de cerc mare, afirmaţia este dovedită. **9.70.** a) Fie, mai general, M un punct pe $|DC|$ astfel încît $\frac{\|DM\|}{\|MC\|} = \frac{m}{n}$, h_d şi h_c înălţimile din D şi C ale tetraedrului l_d şi l_c distanţele punctului M la planele (ABC) şi respectiv (ABD), iar h distanţa între două plane paralele cu planul ABM care trec prin punctele C şi D. Observăm că $l_d = \frac{n}{m+n} h_d$ şi $l_c = \frac{m}{m+n} h_c$. Exprimînd în două moduri volumele tetraedrelor $AMBD$ şi $ABMC$ şi exprimînd volumul celui dat ca suma volumelor acestora obţinem $h \cdot \text{aria}[ABM] = \frac{mh_c}{m+n} \text{aria}[ABD] + \frac{nh_d}{m+n} \text{aria}[ABC]$. Remarcînd faptul că $h_c \leqslant h$, $h_d \leqslant h$ deducem $\text{aria}[ABM] \leqslant \frac{m}{m+n} \text{aria}[ABD] + \frac{n}{m+n} \text{aria}[ABC]$; egalitatea nu se poate realiza în nici

un caz dacă M este un punct interior segmentului $|CD|$. Pentru $\frac{m}{n} = 1$ se obține prima parte a enunțului.

b) Arătăm că dacă A, B, C, D nu sînt coplanare, afirmația nu poate avea loc. Cu notații corespunzătoare suma din enunț se scrie $\frac{V}{3}\left[\frac{1}{h} + \frac{m+n}{mh_b} + \frac{m+n}{nh_c}\right]$ și nu este constantă în raport cu raportul $\frac{m}{n}$. **9.71.** Folosind teorema catetei în triunghiurile DAB și DAC deducem că $\|DM\| \cdot \|DA\| = \|DN\| \cdot \|DC\|$ ceea ce arată că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil. În cazul că AB și AC sînt congruente, MN este paralelă cu BC și același lucru se poate afirma despre PQ și în acest caz dreptele MN și PQ sînt paralele, deci coplanare, patrulaterul $MNPQ$ fiind în acest caz un trapez isoscel. Să admitem că $\|AB\| < \|AC\|$. Dreapta MN intersectează pe BC într-un punct R astfel că are loc ordinea R, B, C. Aplicînd teorema lui Menelaus triunghiului BDC tăiat de transversala RMN, ținînd seama că $\frac{\|CN\|}{\|ND\|} = \frac{\|AC\|^2}{\|AD\|^2}$ și $\frac{\|DM\|}{\|MB\|} = \frac{\|AD\|^2}{\|AB\|^2}$, deducem că $\frac{\|RB\|}{\|RC\|} = \frac{\|AB\|^2}{\|AC\|^2}$, egalitate care arată că punctul R nu depinde de poziția punctului D pe perpendiculara în A pe planul (BAC); astfel dreptele MN și PQ sînt concurente și deci coplanare. Cu observația că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil, ca și $BQPC$, avem $\|RM\| \cdot \|RN\| = \|RQ\| \cdot \|RP\|$ și deci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. (Nu cădeți în capcană că MN și PQ fiind antiparalele cu BC în triunghiurile respective ar fi între ele paralele!). **9.72.** Facem apel la rezultatul problemei 9.42, care exprimă volumul tetraedrului echifacial prin $\frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$, A, B, C fiind unghiurile unei fețe. Ipoteza problemei este echivalentă, deci, cu egalitatea $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$. Folosim acum afirmația din 13.158, din care deducem că fețele tetraedrului sînt triunghiuri echilaterale. **9.73.** Să notăm prin h înălțimea din A

Scanned with OKEN Scanner

a triunghiului $A'AB$ exprimabilă cu datele. Dacă $x = h$ volumul cerut este $\frac{abc}{2}$. Pentru $x \leqslant h$ se scade din volumul paralelipipedului volumul unei prisme și se obține $abc - \frac{ab^2x}{2\sqrt{b^2-x^2}}$ iar pentru $h < x \leqslant AB = b$ se obține $\frac{1}{2}\frac{ac^2\sqrt{b^2-x^2}}{x}$.

Capitolul 10

10.1. Se duce un cerc tangent dreptei (d) cu centrul în B. Cele două tangente la cerc duse din A intersectează pe (d) în C și C'. Deci două soluții. **10.2.** Presupunînd problema rezolvată din asemănări rezultă $\|OM\| = 4R$. **10.3.** Fie M mijlocul lui $|AC|$. Perpendiculara în M pe $|OM|$ intersectează cercul în B și D. **10.4.** Notînd cu x și y laturile dreptunghiului avem $P = 2(x+y)$ și $\|AC\| = a = \sqrt{x^2+y^2}$ de unde se deduc x și y. Din A ca centru descriem un cerc de rază x, iar din C ca centru un cerc de rază y. La intersecția lor se află un vîrf B al dreptunghiului. **10.5.** Se consideră cercul cu centrul în A și rază R. Se ia un unghi la centru $\widehat{EAF}$ de 60°. Se prelungesc razele $|AE|$ și $|AF|$ și se iau punctele B și C așa încît $\|AC\| = 2\|AE\| = \|AB\|$. **10.6.** a) Fie A fix, iar B și C așezate pe dreptele (d_1) și (d_2). Prin A ducem o dreaptă (d) paralelă cu (d_2). Rotim (d) cu 60° în iurul punctului A și intersecția ei cu (d_1) ne dă un vîrf al triunghiului, deci mărimea laturii. Avem două soluții. b) Același raționament. **10.7.** Prelungim pe $|AG|$ cu segmentul $|GA'|$ așa încît $\|GA'\| = \frac{1}{2}\|AG\|$. Față de A' luăm O_2 simetricul lui O și descriem un cerc cu centrul în O_2 și cu aceiași rază ca cercul O. Acesta intersectează pe O_1 în 2 puncte. Unul din ele îl notăm cu B, iar dreapta BA' intersectează pe O în C, simetricul lui B față de A'. Problema are cel mult două soluții. **10.8.** Se duce

Scanned with OKEN Scanner

cercul (O) de rază R şi se ia pe cerc arcul AB capabil de unghiul A. Se duce un cerc concentric cu cercul (O) şi de rază $r = \| OH \|$ dată, tangentele la cercul de rază r, perpendiculare pe $| BC |$ trec prin H (respectiv H') şi la intersecţia lor cu cercul avem punctul A (respectiv A'). Deci două soluţii.

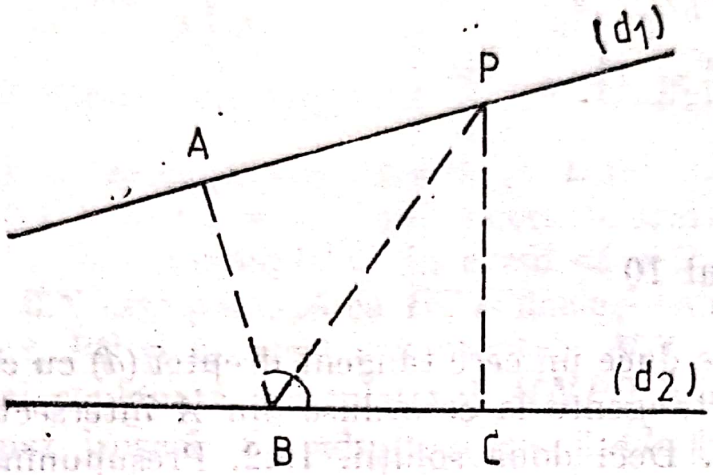


Fig. 10.9 a

10.9. a) Fig. 10.9, a. Presupunem construcţia făcută. Avem $\| PA \| = \| PC \|$, unde $| PC | \perp (d_2)$, iar $| AB | \perp (d_1)$. Triunghiul APC este isoscel, iar patrulaterul $ABCP$ inscriptibil. Rezultă că P se găseşte la intersecţia bisectoarei unghiului ABC cu dreapta (d_1). b) Fig. 10.9. b. Se duce pe dreapta (d_1) $\| AB \| = R$. Triunghiul POB este isoscel, iar P se găseşte la intersecţia mediatoarei segmentului $| OB |$ cu (d_1). $\| PA \| = \| PC \|$. **10.10.** Triunghiurile AEB şi AFD sînt congruente

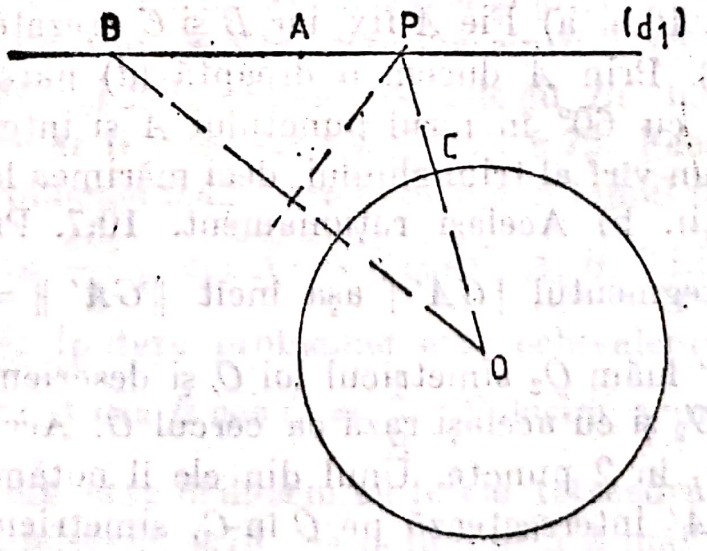


Fig. 10.9 b

(fig. 10.10). Punctul A fiind fix, se duce prin A perpendiculara comună pe cele două drepte $|EF|$. Se ia $|EB| \equiv |AF|$ pe (d_1), iar pe (d_2) $|FD| \equiv |AE|$. În felul acesta se determină vîrfurile B și D ale pătratului. **10.11.** Presupunem

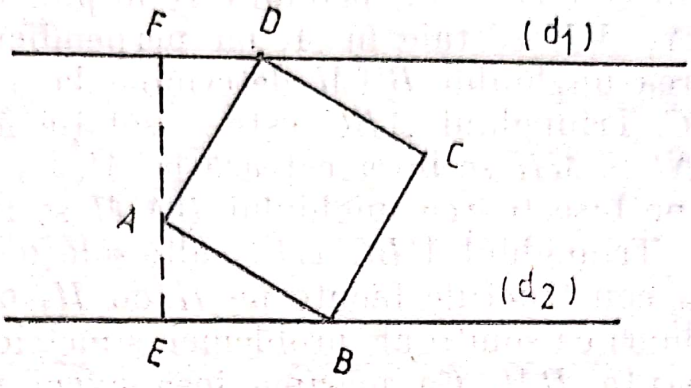


Fig. 10.10

construit $\triangle ABC$ în care se cunosc lungimile medianelor: $\|AA'\|$, $\|BB'\|$ și $\|CC'\|$. Translatînd latura $|BC|$ pînă suprapunem punctul C peste A obținem paralelogramul $ACBD$. În prelungirea laturii $|AB|$ ducem $|AE|$ cu $\|AB\| = \|AE\|$. Triunghiul CDE are laturile $|EC| \parallel |AA'|$ și $\|EC\| = 2\|AA'\|$, $|ED| \parallel |BB'|$ și $\|ED\| = 2\|BB'\|$ și $\|CD\| = 2\|CC'\|$. Construcția acum este imediată. Din $\triangle CED$ deducem $\triangle ABC$ astfel: luăm punctul C' la mijlocul segmentului $|CD|$ și la distanța de 1/3 de la C', luăm pe $|CC'|$ punctul G prin care ducem paralele la laturile $|EC|$ respectiv $|ED|$ care intersectează dreapta EC' în punctele A și B. **10.12.** Fie D, H și H' picioarele înălțimilor coborîte din A, B, respectiv C (fig. 10.12). Punctul H se află pe cercul de diametru $|BM|$. Fie N punctul unde acest cerc întîlnește latura AB. $m(\widehat{BNM}) = 90°$ și $|MN| \parallel |CH'|$ și $\|MN\| = \frac{1}{2}\|CH'\| = \frac{h}{2}$. Acum construcția este imediată și anume: pe un segment de dreaptă $\|BM\| = m$ ca

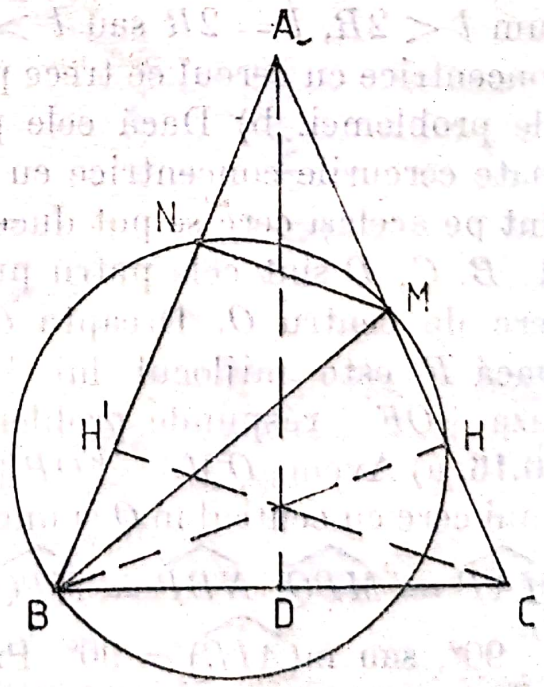


Fig. 10.12

diametru descriem un cerc. Din B ca centru și cu raza h trasăm un cerc care intersectează primul cerc în două puncte H, H_1 iar din M drept centru și cu raza $\frac{h}{2}$ trasăm un alt cerc care taie primul cerc în punctele N și N'. Dreptele AN, MH se taie în A, iar perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului BAM determină la intersecția cu MH vîrful C. Triunghiul ABC este o soluție a problemei. Dreptele BN' și MH se intersectează în A', iar perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului $BA'M$ se intersectează cu MH în C'. Triunghiul $A'BC'$ este o altă soluție a problemei. Înlocuind în construcțiile făcute pe H cu H_1 obținem alte două triunghiuri ca soluții ale problemei, simetricele primelor față de dreapta BM. Ca mărime însă avem numai două triunghiuri distincte. **10.13.** Dacă notăm cu x distanța de la centrul (O) la dreapta respectivă găsim $x = \sqrt{\frac{4r^2 - R^2}{3}}$, $R < 2r$. Deci se duce un cerc concentric cu cercurile date și de rază x. Orice tangentă la acest cerc determină în cercurile date corzile cerute. **10.14.** Fie R raza cercului și l lungimea corzii determinate de secanta dusă din P la cerc. Se duce un cerc concentric cu cercul dat și de rază $r = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$. Tangentele la cercul de rază r duse din P determină în cerc corzi de lungime l. Avem două soluții, una sau nici una după cum $l < 2R$, $l = 2R$ sau $l > 2R$. **10.15.** a) Toate cercurile concentrice cu cercul ce trece prin cele trei puncte sînt soluții ale problemei. b) Dacă cele patru puncte sînt pe un cerc, toate cercurile concentrice cu el. Dacă cele patru puncte nu sînt pe același cerc se pot duce patru cercuri, și anume: dacă A, B, C, D sînt cele patru puncte, ducem prin A, B, C un cerc de centru O. Dreapta OD intersectează cercul în E. Dacă F este mijlocul lui $|AE|$ cercul de centru O și raza $\|OF\|$ răspunde problemei. Analog cu celelalte trei. **10.16.** a) Avem $\|QM\| = \|QP\| = \|QN\|$ deci M, P, N aparțin unui cerc cu centrul în Q și unghiul MPN este drept. b) Avem $\widehat{MAP} \equiv \widehat{MPQ}$, $\widehat{NBP} \equiv \widehat{NPQ}$ deci $m(\widehat{MAP}) + m(\widehat{NBP}) = 90°$, sau $m(\widehat{AIB}) = 90°$. Punctul I descrie semicercul de diametru $|AB|$. c) $IMPN$ dreptunghi. $\|IP\| = \|MN\| = l$.

Scanned with OKEN Scanner

diametru descriem un cerc. Din B ca centru și cu raza h trasăm un cerc care intersectează primul cerc în două puncte H, H_1 iar din M drept centru și cu raza $\frac{h}{2}$ trasăm un alt cerc care taie primul cerc în punctele N și N'. Dreptele AN, MH se taie în A, iar perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului BAM determină la intersecția cu MH vîrful C. Triunghiul ABC este o soluție a problemei. Dreptele BN' și MH se intersectează în A', iar perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului $BA'M$ se intersectează cu MH în C'. Triunghiul $A'BC'$ este o altă soluție a problemei. Înlocuind în construcțiile făcute pe H cu H_1 obținem alte două triunghiuri ca soluții ale problemei, simetricele primelor față de dreapta BM. Ca mărime însă avem numai două triunghiuri distincte. **10.13.** Dacă notăm cu x distanța de la centrul (O) la dreapta respectivă găsim $x = \sqrt{\frac{4r^2 - R^2}{3}}$, $R < 2r$. Deci se duce un cerc concentric cu cercurile date și de rază x. Orice tangentă la acest cerc determină în cercurile date corzile cerute. **10.14.** Fie R raza cercului și l lungimea corzii determinate de secanta dusă din P la cerc. Se duce un cerc concentric cu cercul dat și de rază $r = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$. Tangentele la cercul de rază r duse din P determină în cerc corzi de lungime l. Avem două soluții, una sau nici una după cum $l < 2R$, $l = 2R$ sau $l > 2R$. **10.15.** a) Toate cercurile concentrice cu cercul ce trece prin cele trei puncte sînt soluții ale problemei. b) Dacă cele patru puncte sînt pe un cerc, toate cercurile concentrice cu el. Dacă cele patru puncte nu sînt pe același cerc se pot duce patru cercuri, și anume: dacă A, B, C, D sînt cele patru puncte, ducem prin A, B, C un cerc de centru O. Dreapta OD intersectează cercul în E. Dacă F este mijlocul lui $|AE|$ cercul de centru O și raza $\|OF\|$ răspunde problemei. Analog cu celelalte trei. **10.16.** a) Avem $\|QM\| = \|QP\| = \|QN\|$ deci M, P, N aparțin unui cerc cu centrul în Q și unghiul MPN este drept. b) Avem $\widehat{MAP} \equiv \widehat{MPQ}$, $\widehat{NBP} \equiv \widehat{NPQ}$ deci $m(\widehat{MAP}) + m(\widehat{NBP}) = 90°$, sau $m(\widehat{AIB}) = 90°$. Punctul I descrie semicercul de diametru $|AB|$. c) $IMPN$ dreptunghi. $\|IP\| = \|MN\| = l$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea lui I pe cercul AB luăm pe perpendiculara în A pe $|AB|$ un segment $\|AC\| = l$. Paralela prin C la $|AB|$ taie semicercul în I și I'. Cunoscînd pe I, P este determinat. Soluții simetrice față de mediatoarea lui $|AB|$. $l_{max} = \frac{a}{2}$. **10.17.** Fie (d) și (d_1) cele două drepte. Prin (d) ducem un plan (π) paralel cu (d_1). Pe acest plan se proiectează dreapta (d_1) în (d_1'). Dreptele (d) și (d_1') se intersectează în punctul A. Perpendiculara în A pe (π) aparține planului format de (d_1) și (d_1') și va intersecta pe (d_1) în B. Dreapta AB este perpendiculara comună a dreptelor (d) și (d_1). **10.18.** Se duce simetricul A' al lui A în raport cu (π). Dreapta $A'C$ intersectează planul (π) într-un punct situat pe $|BD|$. Din acest punct cele două segmente se văd sub unghiuri egale. **10.19.** Fie (π_1) planul-proiectant al dreptei (d_1) pe (π) și (π_2) planul-proiectant al dreptei (d_2) pe (π). Dreapta cerută va fi dreapta obținută ca intersecție a planelor (π_1) și (π_2) (fig. 10.19).

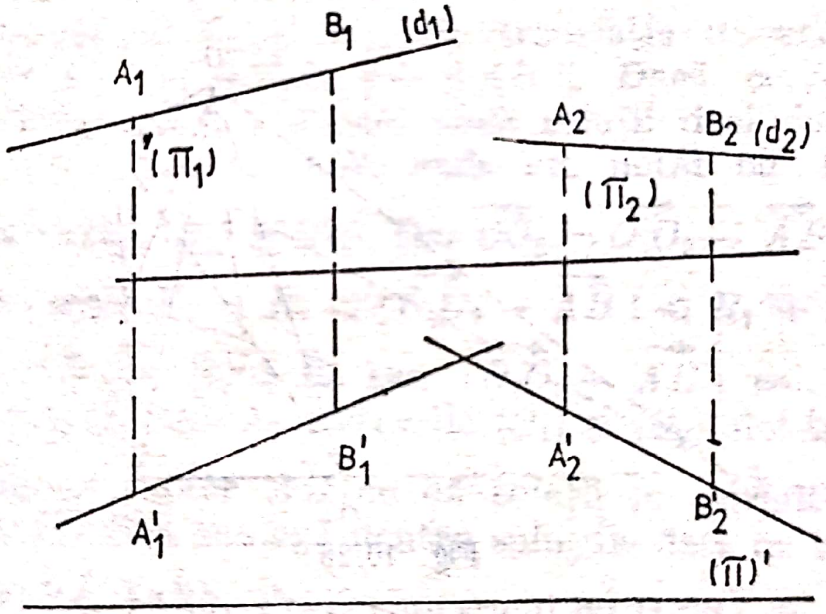


Fig. 10.19

10.20. Fie planul dat (π). Notăm cu M și N punctele în care dreptele (d_1) respectiv (d_2) intersectează planul (π). Punctul M împreună cu (d_2) formează un plan (π_1), iar N cu (d_1) un plan (π_2). Dreapta de intersecție a planelor (π_1) și (π_2) este continuată în (π). **10.21.** Fie (d), (d_1) și (d_2) dreptele date. Prin (d_1) se duce un plan (π_1) paralel cu (d), iar prin (d_2) planul (π_2) paralel cu (d). Dreapta căutată este dreapta de intersecție a planelor (π_1) și (π_2). **10.22.** Orice plan paralel cu

Scanned with OKEN Scanner

planul dat taie cele două drepte în două puncte care determină o soluție. **10.23.** Fie planul (π) și un punct M al său. Prin M ducem un plan perpendicular pe dreapta exterioară (d). Acest plan taie planul dat (π) după dreapta cerută. **10.24.** Fie M un punct al dreptei (d). În M ducem planul (π_1) perpendicular pe (d). Tot prin M ducem dreapta paralelă cu dreapta de intersecție a planelor (π) și (π_1). Această dreaptă variabilă se mișcă paralel cu ea însăși. (M — variabil pe (d)). **10.25.** Fie punctul M din spațiu și dreptele oarecare (d_1) și (d_2). Ducem prin M planele (π_1) și (π_2) perpendiculare pe (d_1) respectiv (d_2). Dreapta de intersecție a planelor (π_1) și (π_2) este cea căutată. **10.26.** Prin M ducem perpendiculara (d_1) pe (π) și paralela (d_2) la (d). Planul determinat de (d_1) și (d_2) este cel căutat. **10.27.** Se construiește perpendiculara comună a celor două drepte. Un plan paralel cu aceasta din urmă ne dă o soluție a problemei. **10.28.** Fig. 10.28. Fie E punctul de intersecție al laturilor $|AB|$ și $|CD|$ și F punctu de intersecție al laturilor $|BC|$ și $|AD|$. Orice plan paralel

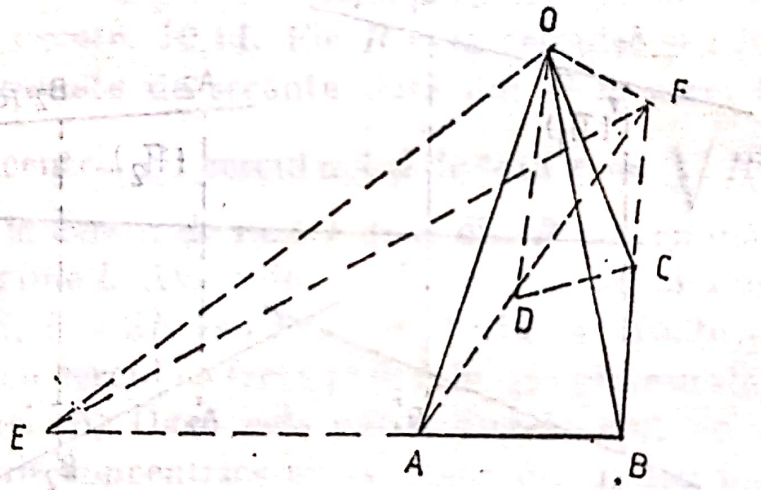


Fig. 10.28

cu planul (OEF) este soluție a problemei. **10.29.** Raportul ariilor laterale (de asemănare) ale celor două piramide este egal cu $\sqrt{\frac{m}{n}}$. Împărțim înălțimea piramidei date în acest raport și prin punctul de diviziune obținut ducem un plan paralel cu baza. **10.30.** Prin centrul sferei se duce un plan perpendicular pe dreapta dată. Fie I punctul în care dreapta intersectează acest plan. Planul intersectează sfera după un cerc mare. Din I ducem cele două tangente la cerc în punctele E și F. În aceste puncte ducem cele două plane tangente la

Scanned with OKEN Scanner

sferă. Dreapta EF este perpendiculară pe dreapta de intersecție a planelor tangente. **10.31.** Printr-un punct P din spațiu se duc dreptele (d_1') și (d_2') paralele cu (d_1) și (d_2). Ele determină un plan (π') paralel cu dreptele (d_1) și (d_2). Planul (π) va fi planul dus prin (d) perpendicular pe (π'). **10.32.** Se construiește un triunghi echilateral care are ca înălțime diagonala cubului. Latura cubului este jumătate din latura acestui triunghi. **10.33.** Se duce o dreaptă oarecare OA care face cu (d_1) un unghi α. Rotim OA în jurul lui (d_1) și obținem un con care intersectează planul determinat de punctul O și dreapta (d_2) după dreapta căutată. Avem două soluții, una sau nici una. **10.34.** Considerăm cercurile date (O_1) și (O_2) și segmentul $|AB|$ de lungime și direcție dată. Aplicăm cercului (O_1) o translație de vector $\overrightarrow{AB}$ care îl transformă în cercul (O). Cercul (O) intersectează pe (O_2) în punctele C și D. Prin C și D ducem paralele la $|AB|$ care intersectează cercul (O_1) în punctele C_1 și D_1. C și D sînt transformatele punctelor C_1 și D_1 prin translația de vector $\overrightarrow{AB}$. Avem $\|C_1C_2\| = \|B_1B_2\| = \|AB\|$. Dacă cercurile (O) și (O_2) sînt secante obținem două soluții deci dacă $R_2 - R_1 < \|OO_2\| < R_1 + R_2$ unde am notat cu R_1 și R_2 razele cercurilor (O_1) și (O_2). Dar $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}$ condiția impusă se scrie $R_2 - R_1 < |\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| < R_1 + R_2$. Dacă $|\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| = R_1 + R_2$ sau $|\overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{AB}| = R_2 - R_1$ avem o singură soluție (cercurile (O_1) și (O_2) sînt tangente). Translația de vector $\overrightarrow{AB}$ ne dă soluții în celelalte cazuri. Se face o discuție analogă pentru soluțiile date de translația de vector $\overrightarrow{BA}$. **10.35.** Fie Q simetricul lui O față de P. Paralela prin Q la Oy taie pe Ox în A, paralela prin Q la Ox taie pe Oy în B. Segmentul AB este cel căutat. **10.36.** Știm că simetricul ortocentrului față de piciorul înălțimii se află pe cercul circumscris. Fie el A_1. Există două situații: a) A_1 coincide cu P, b) A_1 este diferit de P. În situația b), cercul circumscris triunghiului căutat este determinat, perpendiculara în A' pe dreapta AH taie cercul în vîrfurile B, C. În cazul a), problema are o infinitate de soluții: un cerc care trece prin punctele A și A_1 taie perpendiculara în A' pe AH în punctele B, C; H este ortocentrul triunghiului ABC și A'

Scanned with OKEN Scanner

este piciorul înălțimii din A. **10.37.** Din analiza problemei, rezultă că, fixate punctele B, C astfel ca $\| BC \| = a$, punctul C_1 se află pe cercul de diametru $| BC |$ și pe cercul de centru B și rază l. Există două astfel de puncte, unul sau nici unul, după cum $l < a$, $l = a$, respectiv $l > a$. Presupunînd $l < a$, punctul N se determină ca proiecția lui C_1 pe BC. Să observăm că proiecțiile punctelor B_1 și C_1 pe dreapta BC sînt pe segmentul închis $[BC]$. Prin urmare, punctul M poate fi ales în două moduri, într-un singur mod, în nici unul, după cum $\frac{l^2}{a} > d$ și $\frac{a^2 - l^2}{a} > d$, numai una din inegalități este adevărată, respectiv nici una. În cazul $l = a$, punctul C_1 coincide cu C, condiția de posibilitate a problemei fiind $d < a$. În cazul $l > a$ problema nu are soluții. Cititorul poate detalia discuția! **10.38.** Fie C_2' simetricul cercului C_2 față de dreapta d. Dacă cercurile C_2' și C_1 au puncte comune, fie M un astfel de punct, atunci simetricul lui M față de dreapta d, fie el N satisface condiția; etc. **10.39.** Presupunem problema rezolvată: fie cercul de centru O tangent dreptei d în T și trecînd prin punctele A și B. Să presupunem că dreapta d intersectează dreapta AB în punctul C. Atunci $\| CT \|^2 = \| CA \| \| CB \|$, de unde rezultă construcția. Fie punctele T_1 și T_2 pe dreapta d astfel ca $\| CT_1 \|^2 = \| CT_2 \|^2 = \| CA \| \| CB \|$, perpendiculara în T_i intersectează mediatoarea segmentului $| AB |$ în O_i $(i = 1, 2)$, cercul de rază $\| O_iA \|$ este tangent dreptei d în punctul T_i. Punctele T_i se construiesc astfel (în ipoteza că A este între C și B): cercul de diametru $| CB |$ intersectează perpendiculara în A pe CB într-un punct S. Evident $\| CS \|^2 = \| CA \| \| CB \|$. Deci punctele T_i sînt intersecțiile dreptei d cu cercul de centru C și rază $\| CS \|$.; există două soluții. Dacă segmentul $| AB |$ intersectează dreapta d, problema nu are soluții. Dacă A sau B se află pe dreapta d, centrul cercului căutat se află la intersecția mediatoarei segmentului $| AB |$ cu perpendiculara în A (sau B) pe d. Problema are în acest caz o soluție. Dacă $| AB |$ este paralelă cu dreapta d, fie T intersecția mediatoarei lui $| AB |$ cu d. Atunci cercul circumscris triunghiului ATB este cel căutat. **10.40.** Presupunem că punctul A prin care trebuie să treacă cercul căutat nu se află pe nici una din dreptele date d_1 și d_2 (în caz contrar, centrul cercului căutat este unul din punctele de intersecție a perpen-

Scanned with OKEN Scanner

dicularei din A pe dreapta respectivă cu bisectoarele unghiului celor două drepte). Fie b bisectoarea unghiului celor două drepte date care conține în interior punctul A; fie M' un punct oarecare pe b și γ cercul cu centrul în M' și tangent la cele două drepte. Dreapta OA taie cercul γ în două puncte, fie A' unul dintre acestea. Paralela prin A la $A'M'$ taie pe b în punctul M, care este egal depărtat de dreptele date și de punctul A.

Capitolul 11

11.1. Dacă A' este simetricul lui A față de Ox și B' simetricul lui B față de Oy, dreapta $A'B'$ taie pe Ox în M și pe Oy în N. Avem $\| AM \| + \| MN \| + \| NB \| = \| A'M \| + \| MN \| + \| NB' \| = \| A'B' \|$, lungime constantă. **11.2.** Fie $|CE|$ mediana laturii $|AB|$ și F proiecția lui E pe (d). Avem $|DE| \| |AA_1| \| |AB_1|$ și $2 \| EF \| = \| AA_1 \| + \| BB_1 \|$. **11.3.** Fie (O) cercul ce trece prin A și B este tangent dreptei (d). Notînd cu A' și B' punctele unde $|MA|$ respectiv $|MB|$ intersectează cercul avem $m(\widehat{AMB}) = \dfrac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{A'B'})}{2}$ deci unghiul este maxim dacă M aparține acestui cerc. **11.4.** Dacă vîrful paralelogramului coincide cu mijlocul laturii triunghiului avem aria maximă. **11.5.** $S_{max} = r^2 \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$. **11.6.** a) Dacă A' este pe $|BC|$ avem $\dfrac{\| BA' \|}{\| A'C \|} = k$ de unde $\dfrac{\| BA' \|}{\| BC \|} = \dfrac{k}{k+1}$ și $\dfrac{\| A'C \|}{\| BC \|} = \dfrac{1}{k+1}$, $k > 0$. aria $(A'B'AC')$ = aria (ABC) — — aria $(BA'C')$ — aria $(CA'B')$. Triunghiul $(A'BC')$ este asemenea cu triunghiul ABC de unde rezultă $\dfrac{\text{aria } (ABC)}{\text{aria } (BA'C')} = \dfrac{\| BC \|^2}{\| BA \|^2} = \dfrac{(k+1)^2}{k^2}$ · $\triangle (CA'B) \sim \triangle (ABC)$ de unde

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{\text{aria } (ABC)}{\text{aria } (CA'B')} = \frac{\| BC \|^2}{\| A'C \|^2} = (k+1)^2$, iar din $\triangle (BA'C') \sim$ $\sim \triangle (CA'B')$ rezultă $\frac{\text{aria } (CA'B')}{\text{aria } (BA'C')} = \frac{\| CA' \|^2}{\| BA' \|^2} = \frac{1}{k^2}$. Avem aria $(A'B'AC') = 2k \cdot$ aria $(CA'B')$ și aria $(A'B'AC') =$ $= \frac{2}{k} \cdot$ aria $(BA'C')$. Din ultimele două relații rezultă aria $(A'B'AC') = 2\sqrt{\text{aria } (BA'C') \cdot \text{aria } (CA'B')}$.

b) aria $(A'B'AC') = \frac{2k}{(k+1)^2} \cdot$ aria (ABC) și este maximă atunci cînd $\frac{2k}{(k+1)^2}$ este maxim deci pentru $k = 1$, adică A' este mijlocul lui $|BC|$. **11.7.** a) Avem $\| QM \| =$ $= \| QP \| = \| QN \|$ deci M, P, N aparțin unui cerc cu centrul în Q. Unghiul MPN este drept. b) $\widehat{MAP} \equiv \widehat{MPQ}$, $\widehat{NMP} \equiv \widehat{NPQ}$ deci $\mathrm{m}(\widehat{MAP}) + \mathrm{m}(\widehat{NBP}) = 90°$ sau $\mathrm{m}(\widehat{AIB}) =$ $= 90°$. Locul geometric al lui I este cercul de diametru $|AB|$. c) $IMPN$ dreptunghi, $\| IP \| = \| MN \| = l$. Pentru a determina pe arcul de cerc de diametru $|AB|$ punctul I, luăm pe perpendiculara în A pe AB segmentul $\| AC \| = l$. Paralela prin C la $|AB|$ taie semicercul în I și I'. Cu I cunoscut, cunoaștem pe $P \cdot l_{\max} = \frac{a}{2}$.

11.8. Considerăm un reper ortonormat în care originea O este piciorul înălțimii din A, axele de coordonate fiind dreptele BC și OA. Dacă $mx - y + n = 0$ este ecuația unei drepte din planul triunghiului și $2a$ este lungimea laturii triunghiului rezultă $\| AA_1 \|^2 + \| BB_1 \|^2 + \| CC_1 \|^2 =$ $= 2a^2 + \frac{(a - n\sqrt{3})^2}{m^2+1}$ care pentru m fixat este minimă pentru $n = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ adică atunci cînd d trece prin centrul de greutate al triunghiului. Cu observația prealabilă că putem face presupunerea $m \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ rezultă că minimul cerut este $2a^2$ și este realizat pentru axele de simetrie ale triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

11.9. Notînd $\frac{\| BA' \|}{\| A'C \|} = x$, $\frac{\| CB' \|}{\| B'C \|} = y$, $\frac{\| AC' \|}{\| C'B \|} = z$, avem $xyz = 1$ și aria $[A'B'C'] = \frac{1 + xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}$ aria $[ABC] = \frac{2}{2+(x+y+z)(xy+yz+zx)}$ aria $[ABC]$. Folosind inegalitatea mediilor, avem $27xyz \leqslant (x+y+z)^3$ și $27x^2y^2z^2 \leqslant (xy+yz+zx)^3$, adică $3 \leqslant x+y+z$ și $3 \leqslant xy+yz+zx$ egalitățile — simultan pentru $x = y = z = 1$. Deci minimul sumei $(x+y+z)+(xy+yz+zx)$ în condiția $xyz = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ și $z \geqslant 0$, este 6. Astfel, triunghiul $A'B'C'$ are arie maximă cînd P este centrul de greutate, **11.10.** a) În patrulaterul inscriptibil $ABMC$ avem $c \cdot \| CM \| + b \cdot \| BM \| = a \cdot \| AM \|$ și cum $z \leqslant \| BM \|$, $y \leqslant \| CM \|$ rezultă $cy + bz \leqslant a \cdot \| AM \|$. Apoi, notînd cu x distanța lui M la BC, din egalitatea evidentă aria $[ABM]$ + + aria $[ACM]$ = aria $[ABC]$ + aria $[BMC]$, avem $cz + by = a(h_a + x)$ și rămîne să observăm că $h_a + x \leqslant \| AM \|$. Prima inegalitate devine egalitate dacă și numai dacă AM este perpendiculară pe BC, iar cea de a doua exact cînd M este diametralul opus lui A. b) Fie M intersecția dreptei AP cu arcul $\overset{\frown}{BC}$. Rezultatele de la b_1) se obțin din asemănări de triunghiuri pe baza celor de la a). Inegalitatea $by + cz \leqslant a\alpha$, devine egalitate exact cînd P este situat pe înălțimea din A, iar $cy + bz \leqslant a\alpha$ devin egalitate dacă și numai dacă P se află pe diametrul din A. Adunînd inegalitatea $\alpha \geqslant \frac{cy+bz}{a}$ cu cele similare se obține b_2) egalitatea avînd loc cînd P este centrul cercului. Ultima afirmație se obține adunînd $a\alpha \geqslant by + cz$ cu cele similare. **11.11.** Avem $ad_a + bd_d + cd_c = 2S$. Folosind inegalitatea $(xy+yz+zx) \leqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}$ pentru x, y, z numere pozitive, egalitatea exact pentru $x = y = z$, în care punem $x = ad_a$ etc., se obține rezultatul. Egalitatea se realizează cînd $ad_a = bd_b = cd_c$, adică pentru centrul de greutate. **11.12.** a) Presupunînd $a \leqslant b$, avem $a(x+y) \leqslant ax + by = S \leqslant b(x+y)$, prima egalitate avînd loc pentru $y = 0$ și $x = \frac{S}{a}$,

cea de a doua inegalitate devine inegalitate pentru $x = 0$ și $y = \frac{S}{b}$. Rezultă $\max \{x + y : ax + by = S,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} = \frac{S}{\min \{a, b\}}$ și $\min \{x + y : ax + by = S,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} = \frac{S}{\max \{a, b\}}$. b) Dacă $a \leqslant b$ maximul cerut se realizează pentru A, iar minimul pentru punctul B. c), d) Soluții similare. **11.13.** Notînd S aria triunghiului, avem $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$. Cu inegalitatea $\sum_1^n \frac{1}{a_k} \geqslant \frac{n^2}{\sum a_k}$ (vedeți [4., ex. 2.12.]), rezultă $\frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c} \geqslant \frac{9}{2S}$ egalitatea realizîndu-se cînd M este centrul de greugtate. **11.14.** Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC și O un punct oarecare, atunci $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, unde $\alpha = \frac{\text{aria}[BMC]}{\text{aria}[BAC]}$, $\beta = \frac{\text{aria}[AMC]}{\text{aria}[ABC]}$, $\gamma = \frac{\text{aria}[AMB]}{\text{aria}[ACB]}$. Prin urmare, $\|OM\|^2 = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM} = \alpha^2R^2 + \beta^2R^2 + \gamma^2R^2 + 2(\alpha\beta\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \beta\gamma\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \gamma\alpha\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}) = R^2[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 4\alpha\beta\ \text{aria}[AOB] + 4\beta\gamma\ \text{aria}[BOC] + 4\gamma\alpha\ \text{aria}[AOC] = R^2 - 2R^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2\alpha\beta R^2 \cos 2C + 2\beta\gamma R^2 \cos 2A + 2\gamma\alpha R^2 \cos 2B = R^2 - [\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2]$ care este tocmai formula din enunț, deoarece în cazul ales $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Observînd că $\alpha = \frac{d_a}{h_a}$, $\beta = \frac{d_b}{h_b}$, $\gamma = \frac{d_c}{h_c}$, obținem $\|OM\|^2 = R^2 - \frac{2S(d_ad_bc + d_bd_ca + d_cd_ab)}{h_ah_bh_c}$ și cum $\|OM\|^2 \geqslant 0$, egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă $M \equiv 0$, rezultă $d_ad_bc + d_bd_ca + d_cd_ab \leqslant \frac{R^2h_ah_bh_c}{2S}$; deci maximul cerut se realizează pentru $M \equiv 0$ și este $\frac{R^2h_ah_bh_c}{2S}$. **11.15.** Fie $|AB|$ și $|CD|$ două coarde prin P perpendiculare între ele și $\|AB\| = x$, $\|CD\| = y$, $\|OP\| = d$. Relația $x^2 + y^2 = 2R^2 - d^2$ se obține cu ușurință, R fiind raza cercului.

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de inegalitatea $(x+y)^2 \leqslant 2(x^2+y^2)$, egalitate pentru $x=y$, deducem $(x+y)^2 \leqslant 2(2R^2-d^2)$ de unde se vede că maximul sumei $x+y$ este $\sqrt{2(2R^2-d^2)}$ și se realizează cînd $x=y$, deci cînd OP este bisectoarea unghiului celor două drepte. Fie d_1, d_2 distanțele punctului O la AB, CD. Un calcul simplu arată că $\| AB \| + \| CD \| = 2\sqrt{2R^2-d^2+2\sqrt{R^4-R^2d^2+d_1^2d_2^2}}$ de unde rezultă că minimul sumei se realizează pentru $d_1=0$ sau $d_2=0$, adică una din coarde trece prin O, cealaltă fiind perpendiculară în P pe OP. Tot din această formulă se obține și afirmația privind maximul, deoarece produsul $d_1^2d_2^2$ este maxim cînd $d_1=d_2$, întrucît $d_1^2+d_2^2=\| OP \|^2$, constant. **11.16.** Notînd $\| MP \| = x$, $\| MQ \| = y$, avem $cx+by=2S$ și expresia din enunț se pune în forma $\frac{x^2(x^2+bc)-4cSx+4S^2}{b}$ al cărei minim se realizează pentru $x=y=\frac{2S}{b+c}$ și este $\frac{4S^2}{b+c}$, cînd M este piciorul bisectoarei din A. **11.17.** Se duce simetricul A' al lui A față de plan. Dreapta $A'B$ intersectează planul în M. **11.18.** Dacă R_1, R_2, R_3 sînt razele sferelor iar r_1, r_2, r_3 razele cercurilor de secțiune și h distanța dintre cele două plane avem $r_i^2=h(2R_i-h)$, $i=1,2,3$ și suma ariilor de secțiune este $A=\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=\pi h[2(R_1+R_2+R_3)-3h]=3\pi h[2d-h]$ unde $d=\frac{R_1+R_2+R_3}{3}$ este distanța de la centrul de greutate la planul dat. Dacă $d-h=x$, $A=3\pi(d^2-x^2)$ și pentru $x=0$ avem maxim, deci pentru $h=d$. **11.19.** $V_{max}=\pi h\left[R^2+\frac{5h^3}{12}\right]$. **11.20.** $V=\frac{1}{3}\cdot\pi R^2h$, unde R este raza bazei și h înălțimea conului. Avem $l^2=R^2+h^2$ deci $V=\frac{1}{3}h(l^2-h^2)$. Pentru $h=\frac{l\sqrt{3}}{3}$ $R=\sqrt{\frac{2}{3}}l$, avem volumul maxim $V_{max}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi l^3$. **11.21.** $h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$ **11.22.** Notăm $\| AM \| = x$, B' proiecția lui B pe (π) și A' proiecția lui A pe (π'), iar cu d_1 și d_2 distanțele de la M la (π),

respectiv (π'). Din asemănarea triunghiurilor avem $\frac{d_1}{\| BB' \|} = \frac{\| AM \|}{\| AB \|}$; $\frac{d_2}{\| AA' \|} = \frac{\| BM \|}{\| AB \|}$, de unde $d_1 + d_2 = \frac{(b-a)x + a \| AB \|}{\| AB \|}$ unde $b = \| BB' \|$, $a = \| AA' \|$. Deci distanța este minimă dacă $(b-a)x$ este minim; $x = 0$ și $b > a$, $M \equiv A$ iar dacă $b < a$, $x = \| AB \|$ și $M \equiv B$. Dacă $a = b \Rightarrow d_1 + d_2 = a$. **11.23.** Dacă a este lungimea laturii bazei și h înălțimea piramidei avem pentru înălțimea feței laterale $\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\theta}$, înălțimea $h = \frac{a\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}{2}$ și $l^2 = \frac{3a^2\operatorname{tg}^2\theta + 4a^2}{4}$ de unde $a = \frac{2l}{\sqrt{3\operatorname{tg}\theta^2 + 4}}$, $h = \frac{3 \cdot l \cdot \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\theta + 4}}$ și $V(\theta) = \frac{6l^3\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{(3\operatorname{tg}^2\theta + 4)^3}}$. Pentru $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ avem $V_{max} = \frac{l^3}{3}$. **11.24.** a) Avem $V(SAB) = \frac{\pi}{3}\| O_1B \|^2 \cdot \| O_1S \|$, $V(OAB) = \frac{\pi}{3}\| O_1B \|^2 \| OO_1 \|$ (fig. 11.24) deci $V(SAB) + V(OAB) = \frac{\pi}{3}\| O_1B \|^2 \cdot \| OS \| = \frac{3}{8}\frac{4 \cdot \pi R^3}{3}$.

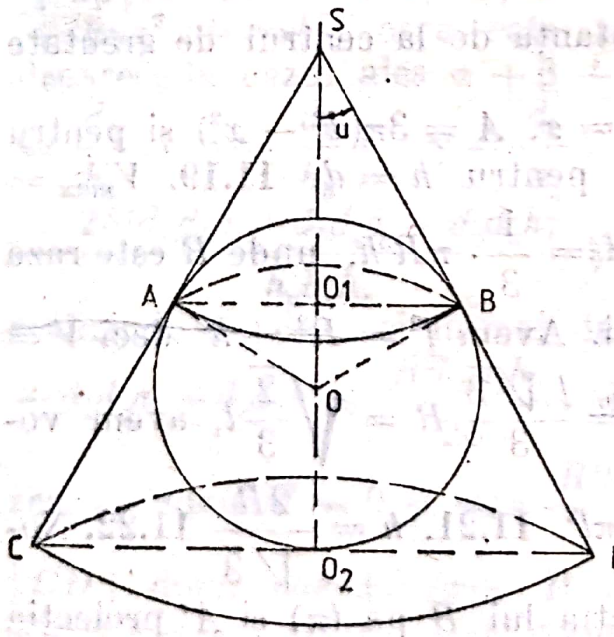


Fig. 11.24

În $\triangle OO_1B$, $\| O_1B \| = R\cos u$, iar din $\triangle OBS$, $\| OS \| = \frac{R}{\sin u}$ și relația $8 \cdot \| O_1B \|^2 \cdot \| OS \| = 12R^3$ devine $2\sin^2 u + 3\sin u - 2 = 0$ cu $\sin u = \frac{-3 \pm 5}{4}$ deci $\sin u = \frac{1}{2}$ (u ascuțit) deci $m(\hat{u}) = 30°$. b) $V(SCD) = \frac{\pi}{3} \| SD \|^2 \cdot \| SO_2 \|$.

$\triangle OBS \sim \triangle SO_2D$ și din asemănare rezultă $\|O_2D\| = \frac{R(\|SO\|+R)}{\|SO\|\cos u} = \frac{R(1+\sin u)}{\cos u}$, iar $\|SO_2\| = \|OS\| + R = \frac{R(1+\sin u)}{\sin u}$. Deci $V(SCD) = \frac{R^3(1+\sin u)^2}{3\sin u(1-\sin u)}$.

c) Volumul minim este dat la minimul funcției $\frac{(1+\sin u)^2}{\sin u(1-\sin u)} > 0$ (u — ascuțit). Minimul acestei funcții este 8 deci $V_{\min} = \frac{\pi R^3}{4} \cdot 8 = 2V_{sf}$. Unghiul u corespunzător este $u = \arcsin\frac{1}{3}$. d). Din ecuația $\frac{\pi R^3(1+\sin u)^2}{3\sin u\,(1-\sin u)} = 3\pi R^3$ obținem $\sin u = \frac{1}{2}$ și $\sin u = \frac{1}{5}$. Unghiul cel mai mare este dat de $\sin u = \frac{1}{2}$ deci $m(\hat{u}) = 30°$.

Capitolul 12

12.1. $E(x) = \frac{\sin^3 x(\sin x+\cos x)}{\cos x} - \frac{\cos^3 x(\sin x+\cos x)}{\sin x} = \frac{\sin x-\cos x}{\sin x\cos x}(\sin^4 x - \cos^4 x) = \frac{(\sin x+\cos x)^2(\sin x-\cos x)}{\sin x\cos x}$.

Deoarece $(\sin x - \cos x)^2 = p^2 = 1 - 2\sin x\cos x$ din care rezultă $\sin x\cos x = \frac{1-p^2}{2}$, deducem $E(x) = \frac{2p(2-p^2)}{1-p}$.

12.2. a) $E(x) = \operatorname{ctg} 6x$. b) $E\left(\frac{\pi}{36}\right) = \sqrt{3}$. c) $x = \pm\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.3.** a) Pentru $ax \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, avem $E(a, x) = 2\sqrt{2}\cos^3\left(ax - \frac{\pi}{4}\right)$ și ecuația din enunț este echivalentă cu $\cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, de unde rezultă $x = \frac{\pi}{4a} + \frac{2k\pi}{a}$, $k \in \mathbf{Z}$. Mulțimea $\left\{\frac{\pi}{4a} + \frac{2k\pi}{a} : k \in \mathbf{Z}\right\}$ este o sub-

Scanned with OKEN Scanner

mulțime a mulțimii $\left\{\frac{\pi}{4a}+\frac{k\pi}{a} : k \in \mathbf{Z}\right\}$ în care $E(a, x)$ nu este definită; prin urmare, ecuația $E(a, x) = 2\sqrt{2}$ nu are soluții. Dacă convenim ca prin $E(a, x)$ să înțelegem prelungirea prin continuitate $(\sin ax + \cos ax)^3$, atunci ecuația are soluțiile indicate mai sus. **12.4.** $E = \frac{1}{\cos 4x} - \frac{1}{4}$. **12.5.** În ipoteze evidente, $F(x) = 1 + \operatorname{tg} 5x$. Presupunînd $\cos 5x \neq 0$ și $\cos 2x \neq -\frac{1}{2}$, ecuația devine $\sin 5x + \cos 5x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\cos 5x$ și deoarece $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$, soluțiile ecuației sînt date de $\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ și $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ din care rezultă $x = \frac{\pi}{20} \pm \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$ și respectiv $x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$. c) După transformări adecvate obținem $G(x) = 2(1 - \operatorname{ctg} 10x)$, de unde rezultă că funcția G are perioada principală $\frac{\pi}{10}$. **12.6.** a) Pentru α, β dați avem $E = -(1 + \sqrt{3})$. b) Ecuația obținută este echivalentă cu $\operatorname{tg} x = 1$ cu soluția $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.7.** Se vede că $\sin^4 x + 4\cos^2 x = (2 - \sin^2 x)^2$ și $\cos^4 x + 4\sin^2 x = (2 - \cos^2 x)^2$ și se obține că valoarea expresiei este 3. **12.8.** Pentru $a > 0$, are loc $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, egalitatea avînd loc numai dacă $a = 1$ (demonstrați sau vedeți [4., ex. 2.1]), astfel că $\sin x + \operatorname{cosec} x \geqslant 2$, $\cos x + \sec x \geqslant 2$ și $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$ și cum primele două inegalități sînt stricte, însumînd se obține inegalitatea. **12.9.** Deoarece pentru $a \in \mathbf{R}$, inegalitatea $a^2 \leqslant 1$ este echivalentă cu $-1 \leqslant a \leqslant 1$ rezultă că inegalitatea propusă este echivalentă cu $-1 \leqslant \frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} \leqslant 1$, deci

cu $\frac{(\sin y - 1)(x+1)^2}{x^2 - 2x \sin y + 1} \leqslant 0$ și astfel este evidentă, deoarece $\sin y - 1 \leqslant 0$, $(x+1)^2 \geqslant 0$ iar $x^2 - 2x \sin y + 1 > 0$ în ipoteza $x^2 - 2x \sin y + 1 \neq 0$. **12.10.** Deoarece $f(x) = -2\sin^2 x + (5 - a^2)\sin x + a^2 + 1$ rezultă că $\{f(x) : x \in [-\pi, \pi]\} = \{g(y) : y \in [-1, 1]\}$ unde $g(y) = -2y^2 + (5 - a^2)y + a^2 + 1$. Pentru detalii asupra determinării mulțimii $\{g(y) : y \in [-1, 1]\}$ vedeți [3., ex. 3.17.]. **12.11.** $f(x) = 3 - 2(1 + \sin x)^2$, de unde $\min\{f(x) : x \in \mathbf{R}\} = -5$ și $\max\{f(x) : x \in \mathbf{R}\} = 3$. **12.12.** $\cos a \cos b \cos c - \sum \cos a \sin b \sin c = \cos a(\cos b \cos c - \sin b \sin c) - \sin a(\sin c \cos b + \cos c \sin b) = \cos(a + b + c) = \frac{1}{2}$. Mai general, dacă $a + b + c =$ constant, atunci $\cos a \cos b \cos c - \sum \cos a \sin b \sin c =$ constant. **12.13.** Ipoteza se transformă succesiv în $\sin(b + c - a) = \sin a \cos(b - c)$, $\sin(b + c)\cos a - \sin a \cos(b + c) = \sin a \cos(b - c)$, $\sin(b + c)\cos a = \sin a \cos(b + c) + \cos(b - c)$, $\sin(b + c)\cos a = 2 \sin a \cos b \cos c$, de unde, în ipoteza $\cos a \neq 0$, $\cos b \neq 0$, $\cos c \neq 0$, obținem $2 \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c$. **12.14.** Presupunînd că nu avem $\alpha = \beta = 0$ (caz în care inegalitatea este adevărată), inegalitatea de demonstrat se transformă echivalent, succesiv, în

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \geqslant 0, \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{1}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \geqslant$$

$$\geqslant 0, \cos \frac{2\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \geqslant 0, \; 1 - \cos(\alpha - \beta) \geqslant 0$$

care este evidentă. **12.15.** Ipoteza se transformă succesiv, echivalent, în $n \frac{2\operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}^2 b} = \frac{2\operatorname{tg}(a + c)}{1 + \operatorname{tg}^2(a + c)}$;

$2n \cdot [\operatorname{tg} b + \operatorname{tg}^2(a + c)\operatorname{tg} b] = 2\operatorname{tg}(a + c)[1 + \operatorname{tg}^2 b]$, $\operatorname{tg} b \cdot [(n - 1) + (n + 1)] + \operatorname{tg}^2(a + c)\operatorname{tg} b \cdot [(n - 1) + (n + 1)] = 2 \operatorname{tg}(a + c) + 2 \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}(a + c)$, $(n - 1) \cdot [\operatorname{tg}(a + c) + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg}^2(a + c)\operatorname{tg} b + \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}(a + c)] = (n + 1) \cdot [\operatorname{tg}(a + c) - \operatorname{tg} b - \operatorname{tg}^2(a + c)\operatorname{tg} b + \operatorname{tg}^2 b \operatorname{tg}(a + c)]$,

$$(n - 1) \frac{\operatorname{tg}(a + c) + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg}(a + c)\operatorname{tg} b} = (n + 1) \frac{\operatorname{tg}(a + c) - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg}(a + c)\operatorname{tg} b}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică $\operatorname{tg}(a+b+c)=\dfrac{n+1}{n-1}\operatorname{tg}(a-b+c)$. **12.16.** Deducem imediat $\beta=45°$, $\alpha+\gamma=90°$, $\operatorname{tg}\beta=1$, deci $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma=4$ și $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma=1$, de unde $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3}$ și $\operatorname{tg}\gamma=2-\sqrt{3}$ (sau invers). Rezultă $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin 2\beta=1$, $\sin 2\gamma=\dfrac{1}{2}$ și astfel $\alpha=75°$, $\beta=45°$, $\gamma=15°$ (sau $\alpha=15°$, $\beta=45°$, $\gamma=75°$). **12.17.** Observînd că $\sin\left(a-\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos a$, $\cos\left(2a+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin 2a$, deducem $E=-2$. **12.18.** Avem $f(x)=\sin x\cdot\sum a_k\cos b_k+\cos x\cdot\sum a_k\sin b_k$, deci $f(0)=\sum a_k\sin b_k$ și ipoteza $f(0)=0$ conduce la $\sum' a_k\sin b_k=0$ astfel că $f(x)=\sin x\cdot\sum a_k\cos b_k$. Deoarece $f(x_0)=0$ și $\sin x_0\neq 0$ rezultă $\sum a_k\cos b_k=0$. Astfel $f(x)=0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. **12.19.** a) $1-\sin^4x-\cos^4x=1-[(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x]=2\sin^2x\cos^2x$. $1-\sin^6x-\cos^6x=1-[(\sin^2x+\cos^2x)^3-3\sin^2x\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)]=3\sin^2x\cos^2x$ și atunci $E_1=1$. $E_2=\dfrac{2\sin x+2\sin x\cos x}{2\cos x+2\sin x\cos x}=\operatorname{tg}x$. b) Aplicînd formula lui Moivre se obține $\dfrac{1+i\operatorname{tg}nx}{1-i\operatorname{tg}nx}$. c) Ecuația devine $\sin^2x+\sin x-m^2=0$, de unde se deduce $\sin x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2}$ (1) sau $\sin x=\dfrac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2}$ (2). Se vede că ecuația (2) are soluții dacă și numai dacă $m=0$, în care caz soluțiile ei sînt $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Ecuația (1) are soluții dacă și numai dacă $-1\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2}\leqslant 1$ care este echivalentă cu $-1\leqslant\sqrt{1+4m^2}\leqslant 3$ și deci cu $\sqrt{1+4m^2}\leqslant 3$ a cărei soluție este $m\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Scanned with OKEN Scanner

12.20. Avem succesiv $E = \dfrac{\sin y \cos x \sin(x+y)}{2\cos x \cos y \sin^2 \dfrac{x+y}{2}} + \dfrac{\sin \dfrac{x-y}{2}}{\cos y \sin \dfrac{x+y}{2}} = \dfrac{\sin y \cos \dfrac{x+y}{2} + \cos y \sin \dfrac{x-y}{2}}{\cos y \sin \dfrac{x+y}{2}} = \dfrac{\sin y \cos \dfrac{x+y}{2} + \cos y \sin\left(\dfrac{x+y}{2} - y\right)}{\cos y \sin \dfrac{x+y}{2}} = 1$. **12.21.** a) $E(x) = \sin x + \cos x + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (\sin x + \cos x)(2 - \sin x \cos x) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)(4 - \sin 2x)$.

b) $E(x) = 0$ dacă şi numai dacă $\sin x + \cos x = 0$ (deoarece $\sin 2x - 4 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$). Ecuaţia $\sin x + \cos x = 0$ este echivalentă cu $\operatorname{tg} x = -1$ şi are soluţia generală $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, soluţiile din $(-\pi, \pi)$ sînt $-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$. c) Folosind relaţia sinusurilor, egalitatea se scrie $\sin B \cos B + \sin C \cos C = \sin A$, deci $\sin(B+C)\cos(B-C) = \sin A$ şi cum $\sin(B+C) = \sin A \neq 0$, rezultă $\cos(B-C) = 1$, de unde $B \equiv C$. **12.22.** După transformări simple avem $f(x; k) = 1 + k - (3+2k)\dfrac{\sin^2 2x}{4}$;

a) Condiţia necesară şi suficientă ca $f(x; k)$ să nu depindă de x este $3 + 2k = 0$, deci $k = -\dfrac{3}{2}$, în care caz $f\left(x; -\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ pentru orice x. b) Ecuaţia este echivalentă cu $\sin^2 2x = \dfrac{4(1+k)}{3+2k}$ care are rădăcini reale dacă şi numai dacă $0 \leqslant \dfrac{4(1+k)}{3+2k} \leqslant 1$ realizate pentru $k \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right]$.

c) Evident $-0,7 \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$; obţinem $\sin^2 2x = \dfrac{3}{4}$

Scanned with OKEN Scanner

avînd soluțiile $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)\ \frac{k\pi}{6}$, $x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6}$; $k \in \mathbf{Z}$. **12.23.** $\sin(\sin^2 x) + \cos(\cos^2 x) = \sin(\sin^2 x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^2 x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \geqslant 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \cos 1$, folosind faptul că $0 \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$ și funcția sin este crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Deoarece $0 < 1 < \frac{\pi}{3}$ și cos este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ rezultă $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. **12.24.** Se impun condițiile $\frac{a-b}{a+b} \geqslant 0$, $a + b \neq 0$, $0 \leqslant \frac{a+b}{2a} \leqslant 1$, $a \neq 0$. Interpretînd pe a, b drept coordonate ale unui punct într-un sistem ortonormat, condițiile sînt realizate dacă $P(a, b)$ se află în regiunea indicată în figura 12.24. Din $\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ rezultă $\cos x = \sqrt{\frac{a+b}{2a}}$ sau $\cos x = -\sqrt{\frac{a+b}{2a}}$.

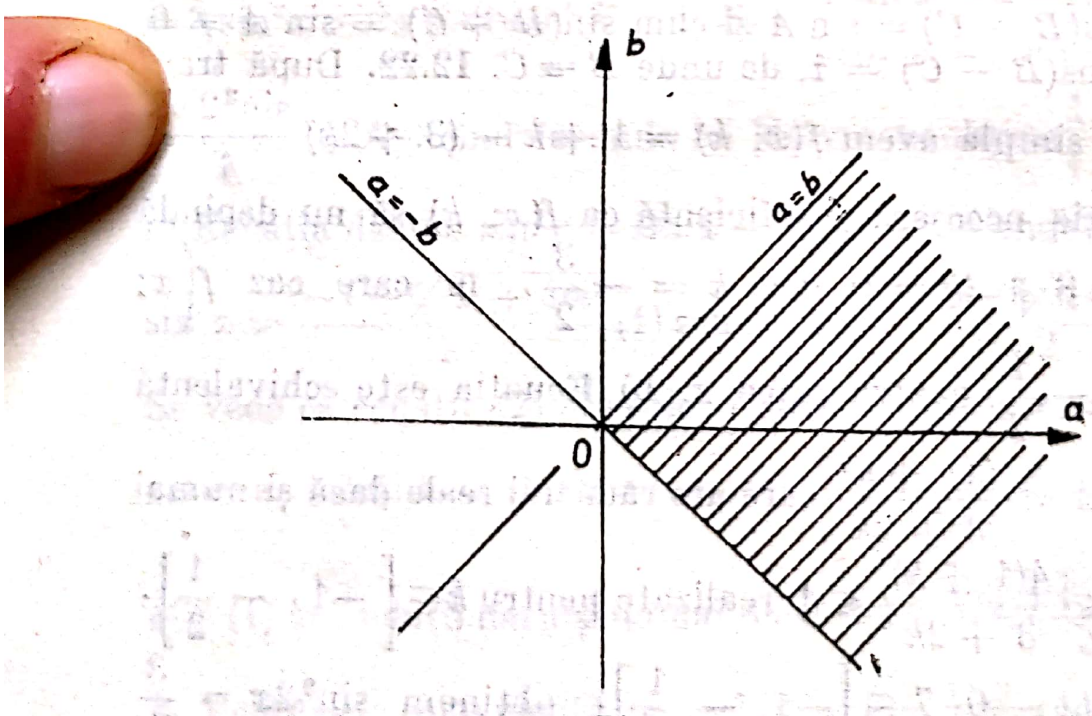


Fig. 12.24.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, sau $\cos x = \cos 2y$ şi atunci $x = \pm 2y + 2k\pi$, sau $\cos x - \cos 2y = 0$ şi atunci $x = \pm 2y + (2k+1)\pi$ unde $k \in \mathbf{Z}$. **12.25.** Avem succesiv $\frac{\sin\beta}{\beta} - \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha\sin\beta - \beta\sin\alpha}{\alpha\beta} = \frac{(\sin\beta - \sin\alpha)\alpha - \sin\alpha(\beta-\alpha)}{\alpha\beta} =$

$= \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\left[\alpha\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\alpha-\beta} - \sin\alpha\right] = \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\left[2\alpha\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\beta-\alpha} - \right.$

$\left. - \sin\alpha\right] < \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}\left[\alpha\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\alpha\right] < \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}[\alpha\cos\alpha -$

$- \sin\alpha] < 0$. Au fost utilizate inegalităţile $0 < \sin x < x <$ $< \operatorname{tg} x$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ şi faptul că funcţia cos este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ideea demonstraţiei aparţine lui D. Voiculescu. **12.26.** a) Fie $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$. Pentru $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, avem $\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} =$

$= \sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2} \leqslant \sin\frac{x_1+x_2}{2}$ adică $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leqslant$

$\leqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$; f este o funcţie concavă. Aplicînd [4., ex. 2.30], rezultă inegalitatea. b) Funcţia $\ln\sin: (0, \pi) \to$ $\to \mathbf{R}$ este concavă, deoarece $\frac{\ln\sin x_1 + \ln\sin x_2}{2} \leqslant$

$\leqslant 2\ln\sin\frac{x_1+x_2}{2}$ inegalitate care se demonstrează cu uşurinţă. Folosind din nou [4., ex. 2.30] se obţine inegalitatea b). Observaţii. 1) Egalităţile au loc dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. 2) Luînd $x_1 = A$, $x_2 = B$, $x_3 = C$, unde A, B, C sînt unghiurile unui triunghi, obţinem $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ egalitatea avînd loc exact pentru triunghiul echilateral. Pentru $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \pi$,

Scanned with OKEN Scanner

se obține $\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \sin x_4 \leqslant \frac{1}{4}$. **12.27** Generalizare. Avem $\frac{1}{\sin 2kx} - \frac{1}{\sin (2k+1)x} = \frac{2 \sin x \cos (2k+1)x}{\sin 2kx \sin (2k+2)x}$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Însumînd aceste egalități obținem $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos (2k+1)x}{\sin 2kx \sin (2k+2)x} = \frac{\sin nx \cos (n+2)x}{\sin x \sin 2x \sin (2n+2)x}$. Pentru $n=3$ se obține identitatea din enunț. **12.28.** Se ține seama de identitatea $\frac{1}{\cos (2k+2)x} - \frac{1}{\cos 2kx} = \frac{2 \sin x \sin (2k+1)x}{\cos 2kx \cos (2k+2)x}$ și se obține $\frac{\sin nx \sin (n+2)x}{\sin x \cos 2x \cos (2n+2)x}$. **12.29.** Utilizînd $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$, $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$ și $\sin \frac{x}{2} \sum \cos kx = \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}$, $\sin \frac{x}{2} \sum \sin kx = \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}$ se deduce că $\sum \cos^3 kx = \frac{3 \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{3(n+1)}{2} x \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}$ și $\sum \sin^3 kx = \frac{3 \sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{3(n+1)}{2} x \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}$. **12.30.** Se verifică ușor că $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$ din care deducem $2^k \operatorname{tg} 2^k x = 2^k \operatorname{ctg} 2^k x - 2^{k+1} \operatorname{ctg} 2^{k+1} x$, $k = 1, \ldots$ și prin însumare găsim $\sum_{k=1}^{n} 2^k \operatorname{tg} 2^k x = 2 \operatorname{ctg} 2x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$. **12.31.** Se utilizează identitatea $\operatorname{cgt} 2^{k-1} x - \operatorname{ctg} 2^k x = \frac{1}{\sin 2^k x}$. **12.32.** O soluție se poate da folosind principiul inducției complete. Altă soluție: $\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos kx = n \sum_{k=1}^{n-1} \cos kx -$

$-\sum_{k=1}^{n-1} k\cos kx = n\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx - \left[\sum_{k=1}^{n-1}\sin kx\right]'$, unde accentul semnifică derivarea în raport cu x și mai departe se utilizează formulele 12.29. **12.33.** Din formula $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, punînd $\alpha = \frac{x}{3^k}$ aflăm că $3^{k-1}\sin^3\frac{x}{3^k} = \frac{1}{4}\left[3^k\sin\frac{x}{3^k} - 3^{k-1}\sin\frac{x}{3^{k-1}}\right]$ din care, prin însumare, obținem pentru suma cerută $\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{x}{3^n} - \sin x\right)$. **12.34.** Din $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = t^2$ deducem $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$ și se obține $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{t(3-t^2)}{2}$ și $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1+2t^2-t^4}{2}$. Partea a doua se demonstrează prin inducție. Presupunem $\sin^k x + \cos^k x = f_k(t)$ pentru $k \leqslant n-1$; atunci, $\sin^n x + \cos^n x = (\sin x + \cos x)(\sin^{n-1} x + \cos^{n-1} x) - \sin x\cos x(\sin^{n-2} x + \cos^{n-2} x)$ și deci are loc și formula $2f_n(t) = 2tf_{n-1}(t) - (t^2-1)f_{n-2}(t)$. **12.35.** a) Ținînd seama de expresia pentru $\sin x\cos x$ obținem $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{t^2-1}$ și apoi $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{2(1-t^4+2t^2)}{(t^2-1)^2}$. Presupunînd $\operatorname{tg}^k x + \operatorname{ctg}^k x = f_k(t)$ pentru $k = 1, \ldots, n-1$, observînd că $\operatorname{tg}^n x + \operatorname{ctg}^n x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)(\operatorname{tg}^{n-1} x + \operatorname{ctg}^{n-1} x) - (\operatorname{tg}^{n-2} x + \operatorname{ctg}^{n-2} x)$ deducem valabilitatea afirmației precum și relația de recurență din enunț. **12.37.** Din $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = t$ rezultă $\sin x\cos x = \frac{1}{t}$ și atunci deducem $\sin x + \cos x = \sqrt{1+\frac{2}{t}}$, ținînd seama și de ipoteza $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Afirmația se obține prin inducție ca în 12.34, ca și relația de recurență. **12.38.** Afirmațiile se demonstrează prin inducție, utilizînd observațiile: $\sin(2n+1)x = \sin[(2n-1)x + 2x] = \sin(2n-1)x\cos 2x + \cos(2n-1)x\cdot\sin 2x = (1-2\sin^2 x)\sin(2n-1)x + 2\sin x\cos x\cos(2n-1)x = (1-2\sin^2 x)\sin(2n-1)x + \sin x[\cos 2nx + \cos 2(n-1)x]$ și $\cos 2nx = \cos[2(n-$

$-1)x+2x] = \cos 2(n-1)x \cos 2x - \sin 2(n-1)x \sin 2x =$
$= (1-2\sin^2 x)\cos 2(n-1)x - \frac{1}{2}[\cos 2(n-2)x - \cos 2nx].$

12.39. a) Avem $\operatorname{ctg}(k+1)x - \operatorname{ctg} kx = \frac{-\sin x}{\sin(k+1)x \sin kx} =$
$= \frac{-2\sin x}{\cos x - \cos(2k+1)x}$ și, prin însumare pentru $k=1, \ldots, n$, se obține identitatea din enunț. b) Se folosește identitatea $\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg} kx = \frac{2\sin x}{\cos kx \cos(k+1)x}$ și, prin însumare, se obține identitatea. Se poate face demonstrație prin inducție. Avantaiul metodelor prezentate constă în aceea că ele oferă rezolvarea unei cerințe de tipul „Calculați sumele...".
12.40. a), b) Se pornește de la identitatea $(\cos x + i \sin x)^{2k} =$
$= \cos 2kx + i \sin 2kx = \sum_{p=0}^{k} C_{2k}^{2p} \cos^{2k-2p} x \cdot (-1)^p \sin^{2p} x +$
$+ i \sum_{p=0}^{k-1} C_{2k}^{2p+1} (-1)^p \cos^{2k-2p-1} x \cdot \sin^{2p+1} x$, de unde deducem $\cos 2kx = \cos^{2k} x - C_{2k}^2 \cdot \cos^{2k-2} x \sin^2 x + C_{2k}^4 \cos^{2k-4} x \sin^4 x -$
$- \ldots + (-1)^p C_{2k}^{2p} \cos^{2k-2p} x \sin^{2p} x + \ldots + (-1)^k \sin^{2k} x$ și $\sin 2kx = C_{2k}^1 \cos^{2k-1} x \sin x - C_{2k}^3 \cos^{2k-3} x \sin^3 x - \ldots (-1)^p C_{2k}^{2p+1} \cdot$
$\cdot \cos^{2k-2p-1} x \sin^{2p+1} x \ldots (-1)^{k-1} C_{2k}^{2k-1} \cos x \sin^{2k-1} x$. Din prima din acestea, prin împărțire cu $\cos^{2k} x$, se obține identitatea a), iar din a doua obținem a doua identitate din enunț. Ultima relație se obține din $\cos(2k-1)x = \cos^{2k-1} x -$
$- C_{2k-1}^2 \cos^{2k-3} x \sin^2 x + \ldots (-1)^{k-1} C_{2k-1}^{2k-2} \cdot \cos x \sin^{2(k-1)} x$.
12.41. Folosind încă o dată formula lui Moivre găsim $\cos nx =$
$= \cos^n x - C_n \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots (-1)^2 C_n^{2p} \cos^{n-2p} x \sin^{2p} x \ldots$
Punînd în această formulă $\cos x = z$ obținem $z^n -$
$- C_n z^{n-2}(1-z^2) + \ldots + (-1)^p \cdot C_n^{2p} z^{n-2p}(1-z^2)^p + \ldots =$
$= \cos(n \arccos z)$. Aceasta arată că ecuația $P(z) \equiv z^n -$
$- C_n^2 z^{z-2}(1-z^2) + \ldots + (-1)^p C_n^{2p} z^{n-2p}(1-z^2)^p + \ldots -$
$- \cos nt = 0$ are rădăcinile date de $n \arccos z = nt + 2k\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, deci ele sînt $z_k = t + \frac{2k\pi}{n}$. Observînd că în $P(z)$ z^n are coeficientul $1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots +$
$+ C_n^{2p} + \ldots = 2^{n-1}$ (egalitatea este cunoscută), deducem $P(z) = 2^{n-1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \left[z - \cos\left(t + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$. În particular $P(1) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \cos\left(t + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ și, observînd că $P(1) =$ $= 1 - \cos nt$, obținem $\prod_{k=0}^{n-1} \left[1 - \cos\left(t + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] = \frac{1 - \cos nt}{2^{n-1}}$. Cu formula $1 - \cos 2u = 2\sin^2 u$, înlocuind în relația obținută t prin $2x$ se obține $\prod_{k=0}^{n-1} 2\sin^2\left(x + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\sin^2 nx}{2^{n-1}}$, de unde, relația din enunț. **12.42.** Ținînd seama de $2\sin 2^{k-1}x \cos 2^{k-1}x = \sin 2^k x$ pentru $k = 1, \ldots, n+1$, obținem prin înmulțire $2^n \prod_{k=1}^{n+1} \sin 2^{k-1}x \cos 2^{k-1}x =$ $= \prod_{k=1}^{n+1} \sin 2^k x$ de unde $\prod_{k=0}^{n} \cos 2^k x = \frac{\sin 2^{n+1}x}{2^{n+1}}$. **12.43.** Notînd A și B cele două sume, în ordinea din enunț, obținem $A + iB = \sum_{k=1}^{n} \cos^k x (\cos kx + i \sin kx) = \cos x (\cos x +$ $+ i \sin x) \frac{1 - \cos^n x (\cos x + i \sin x)^n}{1 - \cos x (\cos x + i \sin x)}$ care capătă expresia $\frac{\cos x \cos^n x \sin nx + i \cos x (1 - \cos^n x \cos nx)}{\sin x}$ de unde rezultă $A = \operatorname{ctg} x \cos^n x \sin nx$, $B = \operatorname{ctg} x (1 - \cos^n x \cos nx)$. **12.44.** a) Pornim de la identitatea $\sin(2k+2)x - \sin 2kx =$ $= 2 \sin x \cos(2k+1)x$, $k = 1, \ldots, n$, de unde prin însumare, se obține suma de la a) $\frac{\sin nx \cos(n+2)x}{\sin x}$. b) Utilizăm identitatea $\cos 2kx - \cos(2k+2)x = 2 \sin x \sin(2k+1)x$ și, ca mai sus, obținem suma de la b) $\frac{\sin nx \sin(n+2)x}{\sin x}$. **12.45.** a) Din formula cunocută $2 \sin \frac{y}{2} \cos z = \sin\left(z + \frac{y}{2}\right) -$ $- \sin\left(z - \frac{y}{2}\right)$ rezultă $2 \sin \frac{y}{2} \cos(x + ky) = \sin\left(x +\right.$ $\left. + \frac{(2k+1)y}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{(2k-1)y}{2}\right)$. Însumînd relațiile corespunzătoare pentru $k = 1, \ldots, n$, se obține relația. b) Se utilizează egalitatea $2 \sin \frac{y}{2} \sin(x + ky) = \cos\left(x + \frac{(2k-1)y}{2}\right) -$

Scanned with OKEN Scanner

$-\cos\left(x+\frac{(2k+1)y}{2}\right)$. **12.46.** Luăm în formula lui Euler $y=x$ şi înlocuim pe n prin $n-1$; deducem $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ şi după ce înlocuim la numărător pe $\sin\frac{x}{2}$ prin $\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}-\frac{nx}{2}\right]$ se obţine formula lui Snellius. **12.47.** Notînd C şi S cele două sume din enunţ avem $C+iS=\sum_{k=1}^{n}a^k[\cos(x+ky)+i\sin(x+ky)]=(\cos x+i\sin x)\cdot\sum_{k=1}^{n}[a(\cos y+i\sin y)]^k=$ $=(\cos x+i\sin x)\frac{1-a^{n+1}\cos(n+1)y-ia^{n+1}\sin(n+1)y}{1-a\cos y-ia\sin y}=$ $=\frac{(\cos x+i\sin x)(1-a\cos y+ia\sin y)[1-a^{n+1}\cos(n+1)y-ia^{n+1}\sin(n+1)y]}{1+a^2-2a\cos y}$ şi punînd în evidenţă partea reală şi imaginară a acestui număr complex se deduc identităţile. **12.48.** Observăm că $(2\cos 2^kx+1)\cdot(2\cos 2^kx-1)=$ $=4\cos^2 2^kx-1=4\frac{1+\cos 2^{k+1}x}{2}-1=2\cos 2^{k+1}x+1$. Rezultă $(2\cos x+1)(2\cos x-1)(2\cos 2x-1)\ldots(2\cos 2^{n-1}x-1)=2\cos 2^nx+1$ şi deci produsul din enunţ este $\frac{2\cos 2^nx+1}{2\cos x+1}$. **12.49.** Să notăm că $2(\cos u-\cos v)(\cos u+\cos v)=2(\cos^2 u-\cos^2 v)=\cos 2u-\cos 2v$. Astfel $2\left(\cos\frac{x}{2^k}-\cos\frac{y}{2^k}\right)\left(\cos\frac{x}{2^k}+\cos\frac{y}{2^k}\right)=\cos\frac{x}{2^{k-1}}-\cos\frac{y}{2^{k-1}}$ pentru $k=1,\ldots,n$. Înmulţind aceste relaţii, după simplificările necesare, se obţine egalitatea. **12.50.** Observăm că $(1-\sin^{2^{k-1}}x)(1+\sin^{2^{k-1}}x)=1-\sin^{2^k}x$. Înmulţind relaţiile corespunzătoare lui $k=1,\ldots,n$, deducem că $P_n(x)=$

$= \frac{1-\sin^{2^n} x}{1-\sin x}$. **12.51.** Notînd C și S, în ordine, sumele din enunț, avem $C+iS=z+2z^2+\ldots+nz^n=\frac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{(z-1)^2}$ (vedeți [3, ex. 10.2.8]) unde $z=\cos x+i\sin x$. Deci $C+iS=\frac{n[\cos(n+2)x+i\sin(n+2)x]}{(\cos x+i\sin x-1)^2}-(n+1)\cdot \frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x+\cos x+i\sin x}{(\cos x+i\sin x-1)^2}$ și observînd că $(\cos x+i\sin x-1)^2=4\sin^2\frac{x}{2}\cdot(\cos x+i\sin x)$ deducem $C+iS=\frac{-n\cos(n+1)x+(n+1)\cos nx-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+$ $+i\frac{-n\sin(n+1)x-(n+1)\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$. **12.52.** Fie C și S sumele de calculat. Atunci $C+iS=(1+z)^n$ unde $z=\cos x+i\sin x$ și cum $1+z=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$, obținem $C+iS=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right)$, de unde $C=2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$, $S=2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}$. **12.53.** Deoarece $x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1)$, rezultă că polinomul $P(x)=x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1$ are rădăcinile $x_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$, $\bar{x}_k=\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}$, $k=1,\ldots,n-1$. Prin urmare $P(x)=\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k)(x-\bar{x}_k)=$ $=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$. Făcînd $x=1$ în această identitate, ținînd seama că $P(1)=n$, obținem $n=\prod_{k=1}^{n-1}2\left(1-\cos\frac{k\pi}{2}\right)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}2\sin^2\frac{k\pi}{n}=2^{2n-2}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right]^2$ și deci

$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$. Luînd $x = i$ în identitatea de mai sus, găsim $P(i) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \cos \frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^{n-1} 2^{n-1} i^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$. Dacă n este par, $P(i) = 0$ și deci în acest caz $\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = 0$. Dacă n este impar, $n = 2p + 1$, obținem $P(1) = 1 = 2^{n-1}(-1)^p \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$, și de aici rezultatul dorit. **12.54.** Ținînd seama că $x^{2n+1} - 1 = (x-1)(x^{2n} + \ldots + x + 1)$, rezultă că rădăcinile polinomului $P(x) = x^{2n} + \ldots + x + 1$ sînt $x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}$, $\bar{x}_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Astfel, $P(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$. Făcînd $x = 1$ în această identitate, deoarece $P(1) = 2n + 1$, obținem $2n + 1 = \prod_{k=1}^{n} 2^{2^n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$, de unde $\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Luînd $x = -1$, obținem $1 = \prod_{k=1}^{n} 2^{2^n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ și deci $\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$. **12.55.** $f(x)$ se scrie în forma $f(x) = A \cos x - B \sin x$ unde $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos a_k}{2^{k-1}}$, $B = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k}{2^{k-1}}$. Condițiile din enunț se scriu $A \cos x_1 - B \sin x_1 = 0$, $A \cos x_2 - B \sin x_2 = 0$. Dacă $A^2 + B^2$ (determinantul matricii sistemului în x_1 și x_2) este nenul, deducem $\operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} x_2$ și atunci există $k \in \mathbf{Z}$ astfel încît $x_1 - x_2 = k\pi$. Rămîne de arătat că nu putem avea $A = B = 0$. În adevăr, $A \cos a_1 - B \sin a_1 = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\cos(a_1 + a_k)}{2^{k-1}} \geqslant 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$, de unde concluzia. **12.56.** a), b), c), d). Observînd că, dacă g și h sînt funcții periodice de perioade T_g și T_h pentru care raportul perioadelor este rațional, atunci $g + h$ este periodică și are perioada minimă (pozitivă) cel mai mic multiplu comun natural al perioadelor T_g și T_h, funcțiile propuse au perioada minimă 2π. e) Ținînd seama

Scanned with OKEN Scanner

de cele de mai sus, observînd că $\sin mx$ are perioada minimă $\frac{2\pi}{m}$, iar $\cos nx$ are perioada $\frac{2\pi}{n}$, rezultă că funcția are perioada minimă $\frac{2\pi}{(m, n)}$, unde (m, n) este cel mai mare divizor comun natural al numerelor m și n. **12.57.** a) Deoarece $\sin^2 x$ și $|\cos x|$ au perioada π, rezultă că f are perioada π. b) Funcția are perioada 4. c) π. **12.58.** a) Observînd că funcțiile $x - [x]$, $\cos 2\pi x$ au perioada comună 1, rezultă că f are perioada 1. b) Funcția nu este periodică. c) $\cos \pi x$ are perioada 2, iar $\sin 3x$ are perioada $\frac{2\pi}{3}$. Rezultă că funcția nu este periodică. **12.59.** a) În cazul $p = q$ se ține seama că, de exemplu $2\int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(p-q)x\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(p+q)x\, dx = \left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, iar pentru $p=q$, avem, de exemplu, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 px\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2px}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2px}{2p}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$. b) Cu notațiile din enunț, avem $\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(t)]^2\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt - 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\alpha_0}{2} f(t)\, dt - 2\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \alpha_k f(t) \cos kt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \beta_k f(t) \sin kt\, dt\right] + \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \beta_k^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt - 2\pi\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k\alpha_k + b_k\beta_k)\right] + \pi\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]$ ținînd seama de rezultatele anterioare. Pe de altă parte, $\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) - 2\sum_{k=1}^{n} (a_k\alpha_k + b_k\beta_k) = \sum_{k=1}^{n} [(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2] - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$ astfel că $\int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - T_n(t)]^2\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right] +$

$+\pi\left[\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}[(a_k-\alpha_k)^2+(b_k-\beta_k)^2]\right]$, de unde se vede că expresia are un inferior realizat în mulțimea tuturor sistemelor de numere reale $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n\}$ și anume pentru $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Tot odată, deoarece $\int_{-\pi}^{\pi}[f(t) - T_n(f, t)]^2\,dt \geqslant 0$, rezultă și $\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$. **12.60.** a) Este clar că $\sin x + \sin 5x \leqslant 2$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, egalitatea fiind posibilă dacă și numai dacă $\sin x = 1$ și $\sin 5x = 1$. Rezultă $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ și $5x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$. În consecință, ecuația are soluții dacă și numai dacă ecuația în numere întregi $20k - 4l + 4 = 0$ sau $5k - l + 1 = 0$ are soluții. Deoarece 5 și 1 sînt prime între ele, rezultă (vedeți [2, ex. 2.29.]) că ecuația are soluții; observînd soluția $k_0 = 0$, $l = 1$, obținem soluția generală $k = p$, $l = 5p + 1$ cu $p \in \mathbf{Z}$, așa că soluția generală a ecuației date este $x = \frac{\pi}{2} + 2p\pi$, $p \in \mathbf{Z}$. b) Ca mai sus se obține soluția generală $x = \frac{\pi}{2} + 2p\pi$, $p \in \mathbf{Z}$. c) Ecuația nu are soluții. d) Ecuația nu are soluții. **12.61.** a) $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. b) $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. c) Ecuația este echivalentă cu $\sin 4x = \frac{1}{2}$ de unde $x = (-1)^k\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. d) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. e) $x = k\pi$ sau $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. f) $x = k\pi$ sau $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. g) $x = k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. h) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. i) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. i) $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Notînd $\sin x + \cos x = a$, avem $1 + 2\sin x \cos x = a^2$ și obținem $3a^2 - 2a - 5 = 0$ de unde $a = -1$ sau $a = \frac{5}{3}$. Pentru

Scanned with OKEN Scanner

$\sin x + \cos x = -1$ avem $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ de unde $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ecuația $\sin x + \cos x = \frac{5}{3}$ nu are soluții deoarece $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$, în timp ce $\sqrt{2} < \frac{5}{3}$. **12.62.** a) Ecuația este echivalentă cu $\sin x + \cos x = 1$, care are soluția generală $x \in \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$. b) $x \in \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{\pm \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$. c) Ecuația este echivalentă cu $\sin x + \cos x = 1$! **12.63.** Ecuația se scrie în forma echivalentă $(\sin x - \cos x)\left(\sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0$ care conduce la $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$. b) Se observă că $4m^4 - 4m^3 - 3m^2 + 2m + 1 = (2m^2 - m - 1)^2$ astfel că din ecuația de gradul doi în $\sin x$ se obține $\sin x = 2m - 1$ sau $\sin x = \frac{1}{m}$ care au soluții pentru $m \in [0, 1]$, respectiv pentru $m \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. **12.64.** Ecuația este echivalentă cu $\sin x + \cos x = 1$. **12.65.** a) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2}$ de unde $a = \frac{\pi}{12}$. b) Ecuația se scrie în forma simplă $\cos x \cos 2x \left(2 \sin 4x - \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right) = 0$ care are soluția generală $x \in \{(2k+1)\pi : k \in \mathbf{Z}\} \cup \left\{(2k+1)\frac{\pi}{4} : k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbf{Z}\right\}$. **12.66.** Ecuația se scrie $(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^2 2x}{4} + \frac{2}{\sin 2x}\right) = 0$ de unde $\sin x + \cos x = 0$ cu soluția $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ și $\sin 2x = \pm 2$ care nu are soluție. **12.67.** a) Se obține $4\cos^3 x + 8\cos^2 x + 5\cos x + 1 = 0$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $\cos x = -1$ și $\cos x = -\frac{1}{2}$. b) Ecuația se scrie $\sin x(3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2) = 0$ ale cărei soluții sînt date de $\sin x = 0$, avînd soluția $x = k\pi$, respectiv $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 = 0$ care este echivalentă cu $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$ ale cărei soluții sînt $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **12.68.** Se obține $\sin x = 2m - 3$ sau $\sin x = \frac{1}{m-1}$; ecuația are soluții pentru $m \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. **12.69.** a) Remarcăm la început că dacă ecuația admite soluțiile $\frac{\pi}{4}$, $2\frac{\pi}{4}$, $3\frac{\pi}{4}$, atunci ea admite toate soluțiile $k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$. Condițiile ca ecuația să admită cele trei soluții precizate sînt $a + b - c - d = 0$, $a - b + c - d = 0$, deci ecuația admite soluțiile $k\frac{\pi}{4}$ dacă și numai dacă $a = d$ și $b = c$. În acest caz ecuația este echivalentă cu $\sin 4x \cos x \cdot (4a\cos^2 x - 3a + b) = 0$ ale cărei soluții sînt $x = k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$ și cele furnizate de $4a\cos^2 x = 3a - b$. b) Se impune condiția ca ecuația $4a\cos^2 x = 3a - 1$ să admită numai soluții de forma $k\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, astfel că $\cos^2 x = 0$ sau 1, ceea ce se realizează pentru $a = \frac{1}{3}$, respectiv pentru $a = -1$. **12.70.** a) Condiția impusă conduce la sistemul $p\sin 15 + q\cos 15 + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$, $p\cos 15 + a\sin 15 + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$ care are soluția unică $p = q = -\frac{1}{2}$. b) Cu p și a găsiți, ecuația se scrie $2\sin 3x \cos 2x - \sin x - \cos x = 0$ sau $\sin 5x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ de unde $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ sau $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, prima avînd soluția $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$; $k \in \mathbf{Z}$, cea de a doua avînd soluția generală $x = \pm\frac{\pi}{4} -$

Scanned with OKEN Scanner

$-\frac{\pi}{8}+k\pi$ care furnizează soluția particulară $\alpha=\frac{\pi}{8}$. Altfel, ecuația dată se aduce la forma $\operatorname{tg}^4x-2\operatorname{tg}^3x-8\operatorname{tg}^2x+$ $+6\operatorname{tg}x-1=0$ care are rădăcinile $\operatorname{tg}x=2-\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}x=2+\sqrt{3}$ și atunci celelalte două sînt $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}-1$, $\operatorname{tg}x=-\sqrt{2}-1$, dintre care prima ne oferă soluția $\alpha=$ $=\frac{\pi}{8}$. **12.71.** Deoarece $\cos\alpha\in[-1,\ 1]$ pentru orice $\alpha\in\mathbf{R}$, un produs $\prod_{i=1}^{n}\cos\alpha_i$ poate fi 1 dacă și numai dacă un număr par de $\cos\alpha_i$ sînt egali cu -1, iar ceilalți sînt egali cu 1. Rezultă că $(x,\ y,\ z)$ este o soluție a ecuației în unul din următoarele cazuri: 1) $\cos(x+y)=1$ și $\cos(y+z)=1$ și $\cos(z+x)=1$; 2) $\cos(x+y)=1$ și $\cos(y+z)=-1$ și $\cos(z+x)=-1$; 3) $\cos(x+y)=-1$ și $\cos(y+z)=1$ și $\cos(z+x)=-1$; 4) $\cos(x+y)=-1$ și $\cos(y+z)=$ $=-1$ și $\cos(z+x)=1$. Soluția sistemului 1) este $x=$ $=\pi(k-l+m)$, $y=\pi(k+l-m)$, $z=\pi(l+m-k)$, iar a sistemului 2) este $x=\pi(k-l+m)$, $y=\pi(k+l-m)$, $z=\pi(l+m-k+1)$ unde k, l, m sînt numere întregi independente între ele. **12.72.** Ecuația se scrie în forma $\sin x(4\cos^2x+2\cos x-1-\lambda)=0$ cu soluția $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, pentru orice λ. Studiind poziția rădăcinilor ecuației $4y^2+2y-1-\lambda=0$ față de $[-1,\ 1]$ se ajunge la concluziile: pentru $\lambda=-\frac{5}{4}$ ecuația are soluțiile $x=$ $=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi$; dacă $\lambda\in\left(-\frac{5}{4},\ 1\right)$ ecuația are soluțiile $x=\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{4+5\lambda}}{4}+2k\pi$ și $x=$ $=\pm\arccos\frac{-1-\sqrt{4+5\lambda}}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; pentru $\lambda=1$ soluțiile sînt $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ și $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; pentru $\lambda\in(1,\ 5)$ se obține $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{4+5\lambda}-1}{4}+2k\pi$; dacă $\lambda=5$ soluțiile ecuației $4\cos^2x-2\cos x-1-\lambda=0$

Scanned with OKEN Scanner

sînt $x = 2k\pi$. Pentru $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (5, \infty)$ ecuația în cos nu are soluții. **13.73.** a) Ecuația în φ are soluții pentru $x \in [-3, 1] \cup [\sqrt[3]{6}, 2]$. b) Folosind relațiile între rădăcini și coeficienți și condiția impusă, se găsește $\cos \varphi = 1$, deci $\varphi = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sau $\cos^3\varphi + 2\cos^2\varphi - 1 = 0$ cu singura rădăcină $\cos \varphi = -1$, în care caz $\varphi = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. c) Pentru $\varphi = 2k\pi$, rădăcinile sînt -3, 1, 2, iar în al doilea caz, se obțin aceleași rădăcini pentru ecuația în x. **12.74.** a) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{a-1}{2a+1}$ de unde $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ și, respectiv, $x = \pm \arccos\frac{a-1}{2a+1} + 2k\pi$ în ipoteza $-1 \leqslant \frac{a-1}{2a+1} \leqslant 1$. b) Ecuația are soluții în $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dacă și numai dacă $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{a-1}{2a+1} \leqslant 1$, inecuație a cărei soluție este $\left[-\frac{4+3\sqrt{2}}{2}, -2\right]$. c) Să notăm prin $x_n = \arccos\frac{a_n - 1}{2a_n + 1}$ soluția din intervalul $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (demonstrați afirmația!). Deoarece $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir crescător și $a_n \geqslant 1$, rezultă că șirul $\left(\frac{a_n - 1}{2a_n + 1}\right)_n$ este crescător. Întrucît funcția arccos este strict descrescătoare și continuă, rezultă că șirul x_n este descrescător și $\lim\limits_n x_n = \arccos\left(\lim\limits_n \frac{a_n - 1}{2a_n + 1}\right) = \frac{\pi}{3}$. **12.75.** În ipoteza că ecuația are sens ($\sin \ln a > 0$, $\cos \ln a > 0$), soluția este $\{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ unde $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este astfel încît verifică ecuația. Atunci $\log_{\sin \ln a} \cos x_0 = \log_{\cos \ln a} \sin x_0$; fie $u_0 = \log_{\sin \ln a} \cos x_0 = \log_{\cos \ln a} \sin x_0$. Atunci $\sin x_0 = (\cos \ln a)^{u_0}$, $\cos x_0 = (\sin \ln a)^{u_0}$, de unde, ținînd seama că $\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 = 1$ deducem $u_0 = 1$. În adevăr, dacă $u_0 > 1$ atunci $(\sin^2\alpha)^{u_0} \leqslant \sin^2\alpha$, $(\cos^2\alpha)^{u_0} \leqslant \cos^2\alpha$ pentru orice α, cel puțin una din inegalități fiind strictă, iar pentru $u_0 < 1$, se obțin inegalități opuse din care cel puțin una strictă și astfel rămîne $u_0 = 1$. Așadar, $\sin x_0 = \cos \ln a$ și

Scanned with OKEN Scanner

cos $x_0 = \sin \ln a$ de unde $x_0 = \frac{\pi}{2} - \ln a$ (modulo 2π).

12.76. Formula $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ (*) se obține ușor. Făcînd în această formulă $\alpha = \frac{\pi}{36}$ deducem $\operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{36} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{36} - 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{36} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 0$ ceea ce arată că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{36}$ este rădăcină a ecuației din enunț. Dacă x este soluție a acelei ecuații atunci $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ care comparată cu (*) conduce la concluzia că rădăcinile ecuației date sînt de forma $\operatorname{tg} \alpha$ astfel încît $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$. Luînd $\alpha = \frac{\pi}{36}$ se obține rădăcina de mai sus. Punînd $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{36}$ rezultă $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ și deci $x_2 = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{36}$ este rădăcină a ecuației; analog $x_3 = \operatorname{tg} \frac{25\pi}{36}$ este a treia rădăcină. Cu formula $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ egalitatea din enunț este echivalentă cu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{36} \operatorname{tg} \frac{13\pi}{36} \operatorname{tg} \frac{11\pi}{36} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; observînd că $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{36} = -\operatorname{tg} \frac{25\pi}{36}$ egalitatea de demonstrat devine $\operatorname{tg} \frac{\pi}{36} \operatorname{tg} \frac{13\pi}{36} \operatorname{tg} \frac{25\pi}{36} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ care este adevărată în baza relațiilor între rădăcinile și coeficienții ecuației. **12.77.** Polinomul $x^2 - 2x \cos \varphi + 1$ are rădăcinile $\cos \varphi + i \sin \varphi$, $\cos \varphi - i \sin \varphi$. Este suficient să se arate că $P(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 0$, ceea ce se verifică fără dificultate, folosind formula lui Moivre. **12.78.** a) Notînd $\operatorname{tg} x = u$, $\operatorname{tg} y = v$, sistemul se scrie $\frac{u+v}{1-uv} = 2 - \sqrt{3}$, $u - v = 1 + \sqrt{3}$ care are soluțiile $u_1 = \sqrt{3}$, $v_1 = -1$; $u_2 = 4\sqrt{3} - 3$, $v_2 = 3\sqrt{3} - 4$ care conduc la soluțiile sistemului $\left\{ x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ y = -\frac{\pi}{4} - k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\}$;

Scanned with OKEN Scanner

$\left\{x = \operatorname{arctg}(4\sqrt{3}-3)+k\pi,\ y = \frac{\pi}{12} - \operatorname{arctg}(4\sqrt{3}-3) - k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}$. b) Sistemul are soluția evidentă $\{x = k\pi, y = l\pi; k, l \in \mathbf{Z}\}$. Presupunînd $\sin y \neq 0$ (deci $\sin x \neq 0$) obținem $\sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}\cos y$ de unde $\sin y = \frac{1}{2}$ sau $\sin y = -\frac{1}{2}$ și, corespunzător, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, care dau soluțiile sistemului $\left\{x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi : k, l \in \mathbf{Z}\right\}$, $\left\{x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = (-1)^{l+1}\frac{\pi}{6} + l\pi : k, l \in \mathbf{Z}\right\}$. c) Notînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = v$ se obține un sistem în u, v care are soluțiile $u_1 = v_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $u_2 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{30}}{3}$, $v_2 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{30}}{3}$; $u_3 = v_2$, $v_3 = u_2$ etc. d) Se obține $\cos 2x = \frac{1}{2}$ și $\cos 2y = -\frac{1}{2}$ sau $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ și $\cos 2y = \frac{1}{2}$ din care se obțin soluțiile $\left\{x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ y = \pm\frac{\pi}{3} + l\pi;\ k, l \in \mathbf{Z}\right\}$ și $\left\{x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ y = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi : k, l \in \mathbf{Z}\right\}$. e) Prima ecuație se scrie $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}\right) = 0$, de unde se obține: 1) $x - y = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau 2) $x + y = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. În cazul 1) ecuația a doua a sistemului conduce la o absurditate, iar în cazul 2) din aceasta se obține $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ care oferă soluțiile sistemului dat $\left\{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ y = \pm\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

12.79. a) Adunînd ecuațiile sistemului obținem $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}(\cos y + \sin y)$ sau $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)$ de unde $x + \frac{\pi}{3} = (-1)^k\left(y + \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$ sau $y = x + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ și $y = -x + \frac{5\pi}{2} + 2k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$. Aceste valori substituite în prima ecuație a sistemului conduc la ecuațiile $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$ și $(\sqrt{3}+1)\cdot(\cos x - \sin x) = 0$ cu soluțiile $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$. Soluțiile sistemului sînt: $x = k\pi$, $y = k_1\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $y = -\frac{\pi}{6} + (2k + k_1)\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + (2k - k_1)\pi$, cu $k, k_1 \in \mathbf{Z}$. b) Avem $\sin x = 2\sin y$ (1) și $\cos x = \sqrt{3} - 2\cos y$ care înlocuite în $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ conduc la ecuația $2\sqrt{3}\cos y = 3$ sau $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) și $\cos x = 0$ (3). Din (1), (2) și (3) obținem soluțiile sistemului dat: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, $y = -\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ cu $k, k_1 \in \mathbf{Z}$. c) Prima ecuație se scrie $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$ sau $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ cu soluțiile $x = (-1)^k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$, iar din a doua $y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + (2-k)\pi$. d) Din $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ rezultă $x + y = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Scriem $\cos x \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sub forma $\cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2}$. De unde $\cos(x-y) = \sqrt{2} - \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$, sau $\cos(x-y) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ deci $x - y = \pm \arccos\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. Din $x + y = \frac{\pi}{6} + k\pi$ şi $x - y = \pm \arccos\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k_1\pi$ rezultă soluţiile sistemului. e) Avem $\left|\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right| \geqslant 2$ şi $\left|2 \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 2$ deci prima ecuaţia din sistem este satisfăcută numai pentru acele valori ale lui x şi y pentru care $\left|\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right| = 2$ şi $\left|\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$ adică $\operatorname{ctg} x = 1$ şi $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ sau $\operatorname{ctg} x = -1$ şi $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. Se obţin soluţiile $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi$ (1) şi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $y = -\frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi$ (2) $(k, k_1 \in \mathbf{Z})$. Soluţiile (1) nu verifică a doua ecuaţie a sistemului, iar soluţiile (2) o verifică numai pentru $k = 2l + 1$, $l \in \mathbf{Z}$. Se obţin deci soluţiile $x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi$, $y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. f) Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\cos(x+y) = \frac{\alpha}{\beta} - \alpha$, $\cos(x-y) = \frac{\alpha}{\beta} + \alpha$ şi are soluţiile $x = \pm \frac{1}{2}\left[\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\right) + \arccos\left(\frac{\alpha}{\beta} + \alpha\right)\right] + (k + k_1)\pi$, $y = \pm \frac{1}{2}\left[\arccos\left(\frac{\alpha}{\beta} - \alpha\right) - \arccos\left(\frac{\alpha}{\beta} + \alpha\right)\right] + (k - k_1)\pi$. $k, k_1 \in \mathbf{Z}$ dacă $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$ şi $-\alpha - 1 \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \leqslant \alpha + 1$ sau $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ şi $\alpha - 1 \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \leqslant 1 - \alpha$.

12.80. a) Ecuaţia a doua se scrie $\cos^2 y = (1 - 2\cos x)^2$. Dar din prima ecuaţie avem $\cos^2 y = 1 - m^2 \sin^2 x$ deci $1 - m^2 \sin^2 x = (1 - 2\cos x)^2$ sau $(m^2 - 4)\cos^2 x + 4\cos x - m^2 = 0$. Pentru orice valori ale parametrului m sistemul are soluţiile $x = 2k\pi$, $y = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $m \in [0, \sqrt{2})$ sistemul admite şi soluţiile

Scanned with OKEN Scanner

$x = \pm \arccos \frac{m^2}{4 - m^2} + k\pi$, $y = \pm \arccos \frac{4 - 3m^2}{4 - m^2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Pentru $m \in [-\sqrt{2}, 0)$ sistemul admite și soluțiile $x = \pm \arccos \frac{m^2}{4 - m^2} + 2k\pi$, $y = \pm \arccos \frac{4 - 3m^2}{4 - m^2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. b) Sistemul scris sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m$, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{m}{n}$ conduce la ecuația $nz^2 - mnz + n = 0$ (1). Dacă $m > 0$, $n > 0$ și $mn \geqslant 4$ sau $m < 0$, $n < 0$ și $mn \geqslant 4$ ecuația are rădăcini reale, $x = \operatorname{arctg} \frac{mn + \sqrt{mn(mn-4)}}{2n} + k\pi$, $y = \operatorname{arctg} \frac{mn - \sqrt{mn(mn-4)}}{2n} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ sau $x = \operatorname{arctg} \frac{mn - \sqrt{mn(mn-4)}}{2n} + k\pi$, $y = \operatorname{arctg} \frac{mn + \sqrt{mn(mn-4)}}{2n} + k\pi$. Analog pentru $m > 0$, $n < 0$; $mn \leqslant 4$ sau $m < 0$, $n > 0$, $mn \leqslant 4$. Pentru $m = 0$ avem soluțiile $x = y = k\pi$, ($k \in \mathbf{Z}$), iar pentru $m = 0$, $n = 0$, $x + y = k\pi$. c) În prima ecuație, transformînd suma în produs și ținînd seama că $x - y = m$ obținem $\cos(x + y) = \frac{1 + 4\cos^2 m}{4 \cos m}$ unde $-1 \leqslant \frac{1 + 4\cos^2 m}{4 \cos m} \leqslant 1$ de unde rezultă ecuațiile în m: $2 \cos m + 1 = 0$ și $2 \cos m - 1 = 0$ cu soluțiile $m = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ și $m = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$, ($k, k_1 \in \mathbf{Z}$). Pentru aceste valori ale lui m obținem sistemul algebric $x - y = m$, $x + y = \pm \arccos \frac{1 + 4\cos^2 m}{4 \cos m} + 2l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$. d) Transformînd sumele în produse din cele două ecuații se obține prin împărțiri $\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = -\frac{m}{n}$, $n \neq 0$ de unde (1) $x - y = 2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{m}{n}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ridicînd la pătrat cele două ecuații și adunînd obținem $\cos(x+y) = 1 - \frac{m^2 + n^2}{2}$,

Scanned with OKEN Scanner

unde $-1 \leqslant 1 - \frac{m^2+n^2}{2} \leqslant 1$, sau $m^2 + n^2 \leqslant 4$ și $-2 \leqslant n \leqslant 2$. De aici rezultă $x + y = \pm \arccos\left(1 - \frac{m^2+n^2}{2}\right) + k_1\pi$ (2) $k_1 \in \mathbf{Z}$. Relațiile (1) și (2) alcătuiesc un sistem algebric de unde rezultă x și y. e) Prima ecuație din sistem se scrie $\cos 2x + \cos 2y = 2(1 - m)$ sau $\cos(x + y)\cos(x - y) = 1 - m$ cu $-1 \leqslant 1 - m \leqslant 1$ deci $m \in [0, 2]$. Ținînd seama de ecuația a doua rezultă $\cos(x+y) = \frac{1-m}{\cos n}$, $n \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. $-1 \leqslant \frac{1-m}{\cos n} \leqslant 1$, și $x + y = \pm \arccos \frac{1-m}{\cos n} = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$. f) Sistemul se scrie sub forma echivalentă $x + y = n$, $\frac{\sin n}{\cos x \cos y} = m$. Dacă $m \neq 0$ sistemul se scrie $x + y = n$ $\cos x \cos y = \frac{\sin n}{m}$ sau $x + y = n$, $\cos(x - y) = \frac{2\sin n}{m} - \cos n$. Dacă $\left|\frac{2\sin n}{m} - \cos n\right| \leqslant 1$, sistemul admite soluții și este echivalent cu sistemul $x + y = n$, $x - y = \pm\arccos\left(\frac{2\sin n}{m} - \cos n\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, de unde se deduc x și y. Dacă $m = 0$ sistemul se scrie $x + y = n$, $\frac{\sin n}{\cos x \cos y} = 0$. Dacă $\sin n = 0$, $n = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbf{Z}$ și are soluțiile $x = t$, $y = k_1\pi - t$, $t \in \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + l\pi\right\}$, $(l \in \mathbf{Z})$, iar dacă $n \neq k_1\pi$, sistemul este incompatibil. **12.81.** a) Fie funcțiile $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \neq 2(k+1)\pi$ și $g(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x}$, $x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Reprezentînd grafic cele două funcții rezultă $f(x) < g(x)$ pentru $x \in \left(2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left((2k+1)\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. b) Inecuația dată este echivalentă cu

Scanned with OKEN Scanner

inecuația $\frac{\cos x(1-2\cos x)}{\cos 2x} \geqslant 0$ și din tabelul următor:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\cos 2x$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$1-2\cos x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$ |	$-$ |	$+$	0	$-$	0	$+$ |	$-$

rezultă soluțiile $x \in \left[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}+2k\pi, \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)$.

c) Avem $\sin x+\cos x \leqslant |\sin x+\cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}$. Deci inecuația este echivalentă cu $3-4\cos^2 x > 0$ și are soluțiile $x \in \left(\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. d) Soluțiile inecuației sînt $x \in \left(\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(2\pi-\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. e) $x \in \left(\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi, (2k+1)\pi\right)$. f) Inecuația este echivalentă cu $\frac{2(\cos x+\sin x)(2-\sin 2x)}{\sin^2 x(\cos x-\sin x)} > 0$. Dar $2-\sin 2x > 0$ și $\sin^2 x > 0$ deci soluțiile sînt date de inecuația $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} > 0$ și sînt $x \in \left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$. g) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

h) Inecuația dată este echivalentă cu sistemul $2k\pi - \frac{\pi}{2} < 2 \sin x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbf{Z})$ sau $k\pi - \frac{\pi}{4} < \sin x < k\pi + \frac{\pi}{4}$. Ținînd seama că $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ sistemul are sens pentru $k = 0$. Avem soluțiile $x \in \left(\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi, \arcsin\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $(k \in \mathbf{Z})$. i) Pentru $a \in (0,1)$ inecuația este echivalentă cu $\cos x < \sin x$ și are soluțiile $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, 5\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)(k \in \mathbf{Z})$. Pentru $a \in (1, \infty)$ inecuația este echivalentă cu $\cos x > \sin x$ și are soluțiile $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $(k \in \mathbf{Z})$. j) Înmulțind ambii membri ai inecuației cu $2 \sin x$ se obține inecuația $\sin 4x - \sin 3x \leqslant 0$ cu soluțiile $x \in \left[\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{7}, \pi\right]$. **12.82.** a) Avem $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geqslant \frac{1}{2}$ deoarece $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$ pentru orice x. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\sin^2 2x = 1$, deci pentru $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$ și inegalitatea rezultă, egalitatea avînd loc pentru x ca mai sus. c) $\sin x + \cos x = \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, deci $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$, deoarece $|\cos y| \leqslant 1$ pentru orice y. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. **12.83.** Deoarece $\sin^2 x \leqslant 1$ și

Scanned with OKEN Scanner

$\cos^2 x \leqslant 1$, rezultă că $\sin^p x \leqslant \sin^2 x$ și $\cos^q x \leqslant \cos^2 x$, egalitățile realizîndu-se dacă și numai dacă sau $\sin x = 0$ sau $\sin x = \pm 1$, respectiv pentru $\cos x = 0$ sau $\cos x = \pm 1$. Aceasta arată că $\sin^p x + \cos^q x = 1$ dacă și numai dacă $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Dacă p și q sînt numere pare, atunci ecuația are soluțiile $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$; pentru p par și q impar, ecuația are soluțiile $x = 2k\pi$ și $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$; pentru q par și p impar, ecuația are soluțiile $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x = (2k+1)\pi$, iar dacă p și q sînt impari, ecuația are soluțiile $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. **12.84.** Se observă că $|\sin x|^p + |\cos x|^q = (\sin^2 x)^{\frac{p}{2}} + (\cos^2 x)^{\frac{q}{2}} \geqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, deoarece $\sin^2 x \leqslant 1$ și $\frac{p}{2} < 1$ etc. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

12.85. Deoarece funcția tg este strict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem $\operatorname{tg} x_1 \leqslant \operatorname{tg} x_k \leqslant \operatorname{tg} x_n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și deci $\operatorname{tg} x_1 \cos x_k \leqslant \sin x_k \leqslant \operatorname{tg} x_n \cos x_k$, de unde, prin însumare, avem $\operatorname{tg} x_1 \sum_1^n \cos x_k \leqslant \sum_1^n \sin x_k \leqslant \operatorname{tg} x_n \sum_1^n \cos x_k$ și de aici concluzia. Prima egalitate are loc dacă și numai dacă $\operatorname{tg} x_1 \cos x_k = \sin x_k$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$, deci dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. **12.86.** Dezvoltînd $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, etc., ținînd seama de $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, inegalitatea se transformă echivalent în $\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\cos y}{\cos x} + \frac{\sin y}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos z}{\cos y} + \frac{\sin z}{\sin y}\right)\cdot\left(\frac{\cos x}{\cos z} + \frac{\sin x}{\sin z}\right)\right] \geqslant 1$, $\frac{1}{8}[2 + (\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{ctg} x) + (\operatorname{tg} y \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg} z \operatorname{ctg} y) + (\operatorname{tg} z \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} z)] \geqslant 1$ care este adevărată, deoarece

$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y + \operatorname{tg} y \operatorname{ctg} x \geqslant 2$, etc., ținînd seama că $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, pentru orice $a > 0$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = y = z$. **12.87** Se ține seama că dacă $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, atunci $\left(\sum_1^n a_k\right)\left(\sum_1^n \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2$ (vedeți [3, 4.2.12]). Deci, mai general, $\left(\sum_1^n \operatorname{tg} x_k\right)\left(\sum_1^n \operatorname{ctg} x_k\right) \geqslant n^2$ dacă $x_k \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 1, \ldots, n$. **12.88.** Avem $(\sin x + a \cos x)(\sin x + b \cos x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(a+b) \sin 2x + ab \cos^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x + (a+b)\operatorname{tg} x + ab}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(u) = \frac{u^2 + (a+b)u + ab}{1+u^2}$. Dacă $\lambda \in \mathbf{R}$ este astfel încît există $u \in \mathbf{R}$ încît $f(u) = \lambda$, atunci și numai atunci ecuația $u^2 + (a + b) + ab = \lambda u^2 + \lambda$, adică $(1 - \lambda)u^2 + (a + b)u + ab - \lambda = 0$ are soluții (în u) reale. Aceasta este realizat dacă și numai dacă $4\lambda^2 - 4(1 + ab)\lambda - (a - b)^2 \leqslant 0$, adică exact pentru $\lambda \in \left[\frac{1+ab-\sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2}}{2}, \frac{1+ab+\sqrt{1+a^2+b^2+a^2b^2}}{2}\right]$, de unde concluzia. **12.89.** Deoarece $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ inecuația este echivalentă cu $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ și rezultă $x \in \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi(k+1)\right]$. b) Graficul funcției $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ pentru $x \in (-\pi, \pi) \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$ este cel din figura 12.89. Observăm cu ușurință că dreapta $y = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intersectează graficul în punctele de abscise $-\frac{\pi}{3}$ și $\frac{5\pi}{6}$, iar punctul de minim al graficului situat în $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are ordonata $\sqrt{2}\left(\geqslant 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; de aici rezultă că soluția inecuației pe intervalul $(-\pi, \pi)$ este $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$ și din periodicitatea funcțiilor sin și cos deducem soluția pe $\mathbf{R}$ a inecuației. c) Inecuația

Scanned with OKEN Scanner

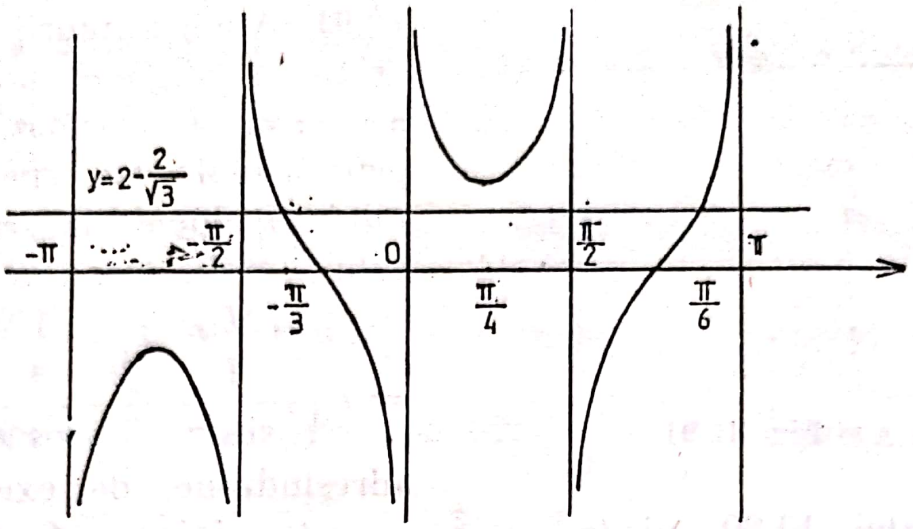


Fig. 12.89

este echivalentă cu $4\sin^2 x + 2\sin x - (2 + \sqrt{2}) \geqslant 0$ care este echivalentă cu $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ și prin urmare soluția inecuației este $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$. d) Inecuația se scrie $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{4}$. Soluția acesteia este $x + \frac{\pi}{6} \in \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi, (2k+1)\pi - \arcsin \frac{1}{4}\right)$. e) Ecuația se transformă, echivalent în $(1 - 2\sin x)(1 - 2\cos x) > 0$. Din analiza semnelor funcțiilor $1 - 2\sin x$, $1 - 2\cos x$ pe intervalul $[0, 2\pi]$, deducem că, pe acest interval, soluția inecuației este $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ și din periodicitate se obține soluția pe **R. 12.90.** a) Inecuația este echivalentă cu $\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 3x\right)^2 \leqslant 0$ deci cu $2\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, de unde $x = k\pi$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} k + \pi$, $k \in \mathbf{Z}$. b) Inecuația este echivalentă cu $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin 2x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ a cărei soluție în $[0, 2\pi]$ este $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

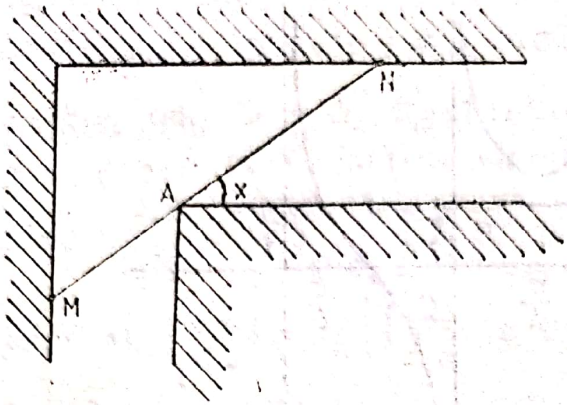


Fig. 12.91

12.91. Analiza figurii 12.91 arată că lungimea maximă a unei nave care poate trece prin canal este egală cu minimul lungimii segmentului $|MN|$. Dar $\| MN \| = \| AM \| + \| AN \| = l\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)$ și adresîndu-ne, de exemplu, graficului 12.89, deducem că acest minim este $l\sqrt{2}$. **12.92.** Deoarece $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deducem $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ și $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$, prin urmare $\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ de unde deducem $\arcsin x + \arcsin y = (-1)^k \arcsin [x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}] + k\pi$ în care k nu poate lua decît valorile -1, 0, 1. Pentru a decide valoarea lui k în diverse situații să observăm că $\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$. De aici rezultă $\cos(\arcsin x + \arcsin y) < 0$ dacă și numai dacă $x^2 + y^2 > 1$. Așadar, dacă $0 < x$, $0 < y$ și $1 < x^2 + y^2$ atunci $\arcsin x + \arcsin y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ și în formula anterioară se impune $k = 1$; dacă $0 > x$, $0 > y$ și $1 < x^2 + y^2$ atunci $\arcsin x + \arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ceea ce impune $k = -1$. În celelalte cazuri $\cos(\arcsin x + \arcsin y) > 0$ ceea ce arată că trebuie să luăm $k = 0$. **12.93.** Ținînd seama că $-\arcsin y = \arcsin(-y)$, afirmația rezultă din 12.92, în care înlocuim y prin $-y$. **12.94.** Ca în exercițiile precedente găsim $\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ de unde rezultă $\arccos x + \arccos y = 2k\pi + (-1)^k \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$, deoarece $\arccos t \in [0, \pi]$. Dacă $x + y \geqslant 0$, rezultă că $0 \leqslant \arccos x + \arccos y \leqslant \pi$, deci se impune $k = 0$; pentru $x + y < 0$ rezultă $\arccos x + \arccos y > \pi$ și atunci se impune $k = 1$. Schimbînd pe y în $-y$ se obține și a doua afirmație. **12.95.** Din formula $(1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b)\operatorname{tg}(a + b) = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$ deducem

Scanned with OKEN Scanner

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$, alegerea lui k făcîndu-se după cum urmează: dacă $xy < 1$, atunci cel puțin unul din numerele y și x este > -1, să zicem $x > -1$, prin urmare $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{4}$ și atunci $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, iar $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci trebuie să avem $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$. Pentru $xy > 1$ și $x > 0$ deducem $0 < y$, $\frac{x+y}{1-xy} < 0$, deci $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} x \in (0, \pi)$ în vreme ce $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ și atunci se impune $k = 1$. Pentru $xy > 1$ și $x < 0$ rezultă $y < 0$ și $\frac{x+y}{1-xy} > 0$, deci $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (-\pi, 0)$, $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \in \in (0, \pi)$ și se impune $k = -1$. A doua afirmație se obține din prima schimbînd pe y în $-y$, folosind $-\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}(-y)$.

12.96. Deoarece, în general $\operatorname{arcctg} t \in (0, \pi)$, rezultă că are loc $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy-1}{x+y} + k\pi$, unde k poate lua una din valorile 0, 1. Observînd că pentru $x + y > 0$ suma $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y \in (0, \pi)$ deducem că în acest caz se impune $k = 0$, iar dacă $x + y < 0$ avem $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y \in (\pi, 2\pi)$ și prin urmare trebuie să luăm $k = 1$. Deoarece $\operatorname{arcctg}(-y) = \pi - \operatorname{arcctg} y$, înlocuind pe y prin $-y$, avem $\operatorname{arcctg} x + \pi - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy+1}{y-x}$ dacă $x - y > 0$, deci $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = -\pi + \operatorname{arcctg} \frac{xy+1}{x-y}$ dacă $x - y > 0$ și, la fel, obținem $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy+1}{y-x}$ dacă $x - y < 0$.

12.97. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$, deci $\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$, deci $\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{4}$;

rezultat care se obține și din formula 12.95, în care luăm $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ observînd că $\frac{x+y}{1-xy}$ este, în acest caz 1. b) $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{12}$, prin urmare $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) + \operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{13\pi}{24}$. Luînd $x = \sqrt{2}-1$ și $y = (2+\sqrt{3})$ avem $xy > 1$ și verificarea se face cu observația că $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{2}}$ etc. **12.98.** Indicăm doar că $\arcsin\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{5\pi}{12}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\pi}{8}$; $\arcsin\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{12}$, $\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{5\pi}{12}$, $\arccos\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\pi}{8}$. **12.99.** Folosind 12.95, avem $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi + \operatorname{arctg}(-1)$ de unde concluzia. Pentru cealaltă afirmație, faceți uz de formula $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha)}$. **12.100.** Conform 12.95, avem $\operatorname{arctg}(k^2+k+1) - \operatorname{arctg}(k^2-k+1) = \operatorname{arctg}\frac{2k}{k^4+k^2+2}$; de unde prin însumare pentru $k = 1, \ldots, n$, se obține egalitatea. **12.101.** Notînd $S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}$, se vede că $S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $S_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. Presupunînd $S_{n-1} = \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}$ avem $S_n = S_{n-1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ astfel că $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ pentru orice n natural. Deoarece funcția arctg este continuă, deducem $\lim_n S_n = \frac{\pi}{4}$. **12.102.** Se pornește de la identitatea $\operatorname{arctg}(k+1)x - \operatorname{arctg} kx = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+k(k+1)x^2}$

Scanned with OKEN Scanner

și se utilizează $\operatorname{arctg}(n+1)x - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\dfrac{nx}{1+(n+1)x^2}$.

12.103. Folosind formula de scădere a funcției arctg, 12.95, avem $\operatorname{arctg} a_{k+1} - \operatorname{arctg} a_k = \operatorname{arctg}\dfrac{a_{k+1}-a_k}{1+a_{k+1}a_k} = \operatorname{arctg}\dfrac{r}{1+a_k a_{k+1}}$ de unde rezultă relația. **12.104.** Observăm la început că $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x} \leqslant 1$ pentru orice x real. Dacă $x \in [0, \infty)$, notînd $2\operatorname{arctg} x = u$ avem $\operatorname{tg}\dfrac{u}{2} = x$ și $u\,[0, \pi)$ și atunci $\cos u = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ astfel că $u = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Dacă $x \in (-\infty, 0)$, păstrînd notațiile, avem $u \in (-\pi, 0)$ ceea ce arată că $u = -\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ și afirmația este demonstrată. **12.105.** Condiția de existență este $x \in [0, 1]$. Ținînd seama că pentru $x \in [0, 1]$ $\arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \dfrac{\pi}{2}$, ecuația este echivalentă cu $\arcsin(1-x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$. **12.106.** Ecuația este echivalentă cu $\arccos x = \arccos(1-x)$ care are soluția $x = \dfrac{1}{2}$. **12.107.** Fie $\arcsin\dfrac{x}{2} = u$, deci $\sin u = \dfrac{x}{2}$, $u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel că $\cos u = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$; deducem $\sin 2u = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$. Pentru $x \in [0, 1]$ avem $2u = \arcsin\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$ și inegalitatea $2\arcsin\dfrac{x}{2} \leqslant \arcsin x$ este echivalentă cu $\sqrt{4-x^2} \leqslant 2$, care este adevărată. Analog, pentru $x \in [-1, 0)$. **12.108.** Pentru $x \geqslant 0$, $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x$ și se ține seama că $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, iar pentru $x \in [-1, 0)$ avem $\arcsin x = -\arccos\sqrt{1-x^2}$ și deci, în acest caz, $\sin x \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos\sqrt{1-x^2} + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

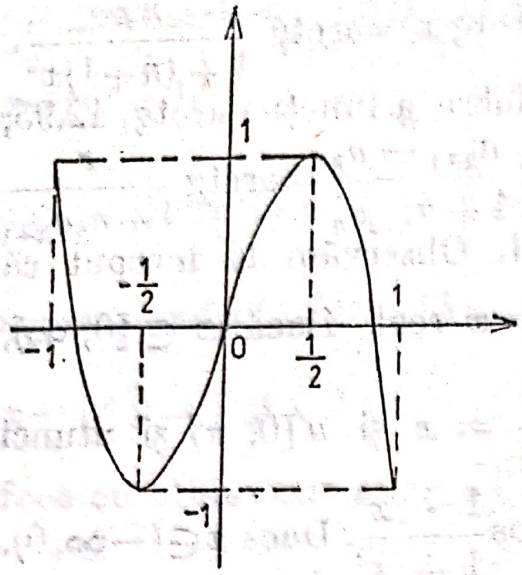


Fig. 12.109

12.109. Din formula $\sin 3u = 3\sin u - 4\sin^3 u$ deducem $3u = (-1)^k \arcsin(3\sin u - 4\sin^3 u) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, și, punînd $u = \arcsin x$, obținem $3\arcsin x = (-1)^k \arcsin(3x - 4x^3) + k\pi$, unde, evident, $k \in \{-1, 0, 1\}$. Pentru $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ avem $3x - 4x^3 \in [-1, 1]$ (analizați graficul 12.109.), $3\arcsin x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(3x - 4x^3) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ceea ce arată că în acest caz trebuie luat $k = -1$. Analog, pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ se impune $k = 0$, iar pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se impune $k = 1$. **12.110.** Din formula $\cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u$ deducem $\arccos(4x^3 - 3x) = \pm 3\arccos x + 2k\pi$ unde $k\{0, 1\}$. Pentru alegerea semnului și valorii lui k să facem apel la

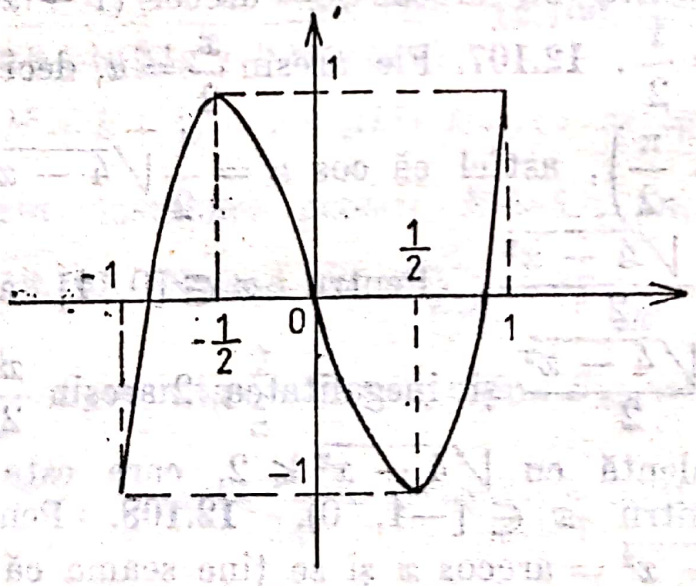


Fig. 12.110

graficul 12.110 cu ajutorul căruia întocmim variația funcțiilor $\arccos(4x^3 - 3x)$ și $3\arccos x$, exprimate în tabelul 12.110. Din analiza acestui tabel se impun concluziile conținute în enunț. **12.111.** a) Funcția $\arcsin x - \arccos x$ este o

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 12.110

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$4x^3-3x$	-1	0	1	0	-1	0	1
$\arccos(4x^3-3x)$	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	0
$3\arccos x$	3π	$\frac{5\pi}{2}$	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	0

funcție strict crescătoare pe $[-1, 1]$ și are loc $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, de unde rezultă soluția inecuației date: $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. b) Funcția $\arcsin x - \arcsin(1-x)$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$, deoarece $\sin(1-x)$ este strict descrescătoare pe $[0, 1]$. Deoarece $x = \frac{1}{2}$ este rădăcină a acestei funcții (unica!), rezultă soluția inecuației: $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. c) Notînd $\arccos x = y$ obținem $y \in [0, 1) \cup (2, \pi]$ din care deducem $x \in [-1, \cos 2) \cup (\cos 1, 1]$. d) Pentru $x \geqslant 0$, avem $-\frac{\pi}{12} \leqslant \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x\sqrt{3}$, iar inegalitatea $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x\sqrt{3} < \frac{\pi}{2}$ se realizează pentru $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, utilizînd monotonia funcției arctg. Pentru $x < 0$ avem $\operatorname{arctg}|x| + \operatorname{arctg} x\sqrt{3} < 0$, deci inegalitatea din dreapta este realizată pentru orice astfel de x. Observînd că $\operatorname{arctg}|-1| + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{12}$, deducem că inegalitatea din stînga este satisfăcută pentru $x \in [-1, 0)$, pentru $x < 0$. Rezultă că inecuația are soluția $x \in \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

12.112. a) Avem $\arcsin \frac{2}{5} = \alpha$, $\arcsin \frac{3}{5} = \beta$, $\arcsin \frac{4}{5} = \gamma$ deci $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ și $\sin \alpha = \frac{2}{5}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, $\sin \gamma = \frac{4}{5}$, $\cos \gamma = \frac{3}{5}$. Înlocuind aceste valori în $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ obținem $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\sqrt{21}}{5}$. b) $\cos\left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$ și $\sin\left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{5}$.

12.113. Notînd $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$, $\beta = \arccos \frac{2}{3}$ avem $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ și $\cos \beta = \frac{2}{3}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ deci $\sin \alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{4}{5}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ deci $\sin\left(\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{2}{3}\right) = \frac{8+3\sqrt{5}}{15}$. Dacă $u = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ și $v = \arcsin \frac{4}{5}$ avem $\sin u = -\frac{2}{3}$, $-\frac{\pi}{2} < u < 0$, $\sin v = \frac{4}{5}$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$, deci $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos v = \frac{3}{5}$ și $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \arcsin \frac{4}{5}\right) = \frac{6\sqrt{2}+8}{15}$. **12.114.** Avem $\cos(\arcsin \alpha + \arccos \alpha) = 0$ de unde $\cos(\arcsin \alpha) = \sin(\arccos \alpha)$ sau $\sqrt{1-\alpha^2} = \sqrt{1-\alpha^2}$. **12.115.** a) Notăm $u = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, $v = \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$. Avem $\operatorname{tg} u = \frac{4}{7}$ și $\operatorname{tg} v = \frac{3}{11}$ deci $u + v = \operatorname{arctg} \frac{4}{7} + \operatorname{arctg} \frac{3}{11}$ deci $\operatorname{tg}(u+v) = 1$. Rezultă $S_1 = \frac{\pi}{4}$. b) Avem $\sin\left(\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} \sin\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{1}{2}$ deoarece $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ deci $S_2 = \frac{\pi}{6}$.

c) Se demonstrează prin inducție că $S_3 = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

12.116. a) Avem $2\arcsin x = -\arccos(1-x)$ sau $\cos(2\arcsin x) = \cos(-\arccos(1-x))$, de unde $1 - x = 1 - 2x^2$ cu soluțiile $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Numai x_1 verifică ecuația dată. b) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1-x^2}$, $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația $\frac{2x}{1-x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}$ și are soluția $x=0$. c) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$, $\cos[\arcsin(1-x)] = \sqrt{x(2-x)}$, $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ și ecuația dată este echivalentă cu ecuația $(1-x)(2x^2-1) = 2x\sqrt{x(2-x)(1-x^2)}$ și cere soluția $x=1$.

12.117. Ecuația se scrie $\operatorname{arctg}(x+1) + \operatorname{arctg} 2x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3x$ și luînd tangenta ambilor membri obținem ecuația $2x^2 - x = 0$ cu $x = 0$ și $x = \frac{1}{2}$. **12.118.** Avem $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ și $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos y$, iar cu notația $\arccos x = u$, $\arccos y = v$, sistemul devine, $u + v = 5\frac{\pi}{12}$; $uv = \frac{\pi^2}{24}$ cu soluțiile $u_1 = \frac{\pi}{4}$, $v_1 = \frac{\pi}{4}$; $u_2 = \frac{\pi}{4}$, $v_2 = \frac{\pi}{6}$. Dar $x = \cos u$ și $y = \cos v$, de unde $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.119.** Avem $\arccos y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ deci inecuația se scrie $\arcsin x > \frac{\pi}{4}$. Funcția arcsin

este definită pentru $x \in [-1, 1]$ și este strict crescătoare pe domeniul său de definiție deci inecuația este echivalentă cu $\sin \frac{\pi}{4} < x \leqslant \sin \frac{\pi}{2}$ de unde rezultă $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. **12.120.** Notăm $\operatorname{arctg} x = t$ și ținem seama că $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, deci inecuația este echivalentă cu sistemul: $2t^2 + t - 1 \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$; sistem satisfăcut pentru $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcția arctg este strict crescătoare pe **R**, prin urmare $x \in (-\infty, -\operatorname{tg} 1) \cup \cup \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}, +\infty\right)$. **12.121.** Domeniul de definiție al funcției $\arccos(x^2 - 1)$ este $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, iar al funcției $\cos(x + 1)$ este $x \in [-1, \pi - 1]$, deci $x \in [-1, \sqrt{2}]$. Din $x^2 - 1 \leqslant x + 1$ rezultă $x^2 - x - 2 \leqslant 0$ cu $x \in [-1, 2]$. Soluția inecuației date este $x \in [-1, \sqrt{2}]$. **12.122.** Din $-1 \leqslant x \leqslant 1$ și $-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1$ rezultă $x \in [0, 1]$. Avem $\arccos(1 - x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(1 - x)$ deci inecuația devine $\arcsin x - \arcsin(1 - x) < 0$ sau $\arcsin x < \arcsin(1 - x)$. Ținînd seama că pe $[0, 1]$ funcția arcsin este crescătoare avem $x < 1 - x$ de unde $x < \frac{1}{2}$. Deci soluția inecuației este $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. **12.123.** a) Notînd prin ρ modulul numărului complex și prin θ argumentul avem $\rho = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ și $\operatorname{tg} \theta = 2 + \sqrt{3}$ deci $\theta = \frac{5\pi}{12}$ și $1 + i(2 + \sqrt{3}) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$. b) $\rho = 2\sqrt{2}$ și $\operatorname{tg} \theta = 2 + \sqrt{3}$ de unde $\theta = \frac{5\pi}{12}$. c) $2 + i\sqrt{2} = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

deci $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}=-2$. d) $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=$ $=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ deci $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{15}=1$ e) $\rho=\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}$, $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. f) $1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ și $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2}\cdot\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right]$, $(k=0,\ 1,\ 2)$ g) $1-i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$, $1+i=$ $=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; $\sqrt{3}+i=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ deci $\frac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^3}+\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^3}=$ $=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)=$ $=-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$ și $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}-i}{(1+i)^3}+\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^3}}=\sqrt[4]{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}}\cdot$ $\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\right]$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

12.124. Avem $2(1+\cos a)=2\cos\frac{a}{2}$, $\cos\theta=\cos\frac{a}{2}$ și $\sin\theta=-\sin\frac{a}{2}$, deci $\theta=2\pi-\frac{a}{2}$. Avem $1+\cos a-i\sin a=$ $=2\cos\frac{a}{2}\left[\cos\left(2\pi-\frac{a}{2}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{a}{2}\right)\right]$. **12.125.** Înmulțind cu conjugata se obține $\frac{\alpha(1-\sqrt{3})-\sqrt{3}-i[\alpha(1+\sqrt{3})+1]}{2\alpha^2+2\alpha+1}$, iar din $1+\alpha(1+\sqrt{3})=0$ se obține $\alpha=\frac{-1}{1+\sqrt{3}}$.

12.126. Din relația $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ rezultă $z^2-2z\cos\theta+$ $+1=0$, deci $z_{1,2}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ și $z_{1,2}^n=\cos n\theta\pm i\sin n\theta$,

iar $\frac{1}{z_{1,2}^n} = \cos n\theta \mp i \sin n\theta$ deci $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ în ambele situații. **12.127.** a) Avem $z^4 = 2\frac{(\sqrt{3}+i)}{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{3}-i$, iar $\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, deci $z = \sqrt[4]{2}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4} - i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right] = \sqrt[4]{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]$, $(k = 0, 1, 2, 3)$. b) $z_{1,2}^4 = \frac{i-1\pm\sqrt{2i}}{2}$. Dar $\sqrt{2i} = 1+i$ deci $z^4 = -1$, $z_2^4 = i$, deci ecuația dată se descompune în ecuațiile $z^4+1=0$ și $z^4 - i = 0$. Pentru $z^4+1=0$ avem $z^4 = \cos\pi + i\sin\pi$ și soluțiile $z = \cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}$, $(k=0, 1, 2, 3)$, iar a doua se scrie $z^4 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ și are soluțiile $z = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

12.128. Avem $\frac{1+iz}{1-iz} = \cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ de unde $iz = \frac{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n} - 1}{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n} + 1}$ sau $iz = \frac{i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}}{1+\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ deci $z = \frac{\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}}{1+\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \operatorname{tg}\frac{\frac{\theta}{2}+k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. **12.129.** Rădăcinile

Scanned with OKEN Scanner

ecuației date sînt $z_{1,2} = 3 + 2i \pm \sqrt{2i}$ sau $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 2 + i$. Dacă B este de afix $w = x + iy$ avem $|\overline{z_1 w}| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$, $|\overline{z_2 w}| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$, $|\overline{z_1 z_2}| = \sqrt{8}$. Din $|\overline{z_1 z_2}| = |\overline{z_1 w}| = |\overline{z_2 w}|$ rezultă sistemul $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 3$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y = -17$ cu soluțiile $x_1 = 3 + \sqrt{3}$, $y_1 = 2 - \sqrt{3}$ și $x_2 = 3 - \sqrt{3}$ și $y_2 = 2 + \sqrt{3}$. Ecuația care are ca rădăcini pe w_1, w_2 este $w^2 - 2(3 + 2i)w + 5 + 18i = 0$. **12.130.** Avem $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$ deci $\frac{1 - z^n}{1 - z} = 0$, $z \neq 1$ deci $z^n = 1$ și $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

12.131. Avem $\sqrt[n]{z} = 1 - \cos\alpha + i \sin\alpha$ de unde $z = (1 - \cos\alpha + i \sin\alpha)^n$. Notînd $w = 1 - \cos\alpha + i \sin\alpha$ avem $|w| = 2\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$ și $\arg w = \theta$ cu $\cos\theta = \frac{1 - \cos\alpha}{2\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} = \left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|$, $\sin\theta = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. Dacă $2k\pi < \frac{\alpha}{2} < (2k+1)\pi$, $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ și $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ deci $w = 2 \sin \frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$. De aici rezultă că pentru $4k\pi < \alpha < 2(2k+1)\pi$, $z = 2^n \sin^n \frac{\alpha}{2}\left[\cos \frac{n(\pi - \alpha)}{2} + i \sin \frac{n(\pi - \alpha)}{2}\right]$. Dacă $(2k+1)\pi < \frac{\alpha}{2} < 2(k+1)\pi$, $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$ și $\theta = \frac{3\pi - \alpha}{2}$ deci $w = -2 \sin \frac{\alpha}{2}\left(\cos \frac{3\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{3\pi - \alpha}{2}\right)$ și $z = (-2)^n \sin^n \frac{\alpha}{2}\left[\cos \frac{n(3\pi - \alpha)}{2} + i \sin \frac{n(3\pi - \alpha)}{2}\right]$. **12.132.** Fie ecuația $z^n - 1 = 0$. Ră-

dăcinile ei sînt $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$. Ţinînd seama de relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi avem $z_1 + z_1 + ... + z_n = 0$ deci $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$ de unde $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$ şi $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$. **12.133.** Pentru $n = 0$ ecuaţia se scrie $z^{-1} = \bar{z}$ deci $|z| = 1$ şi ecuaţia are o infinitate de soluţii. Dacă $n = 1$ ecuaţia devine $\bar{z} = 1$ deci $z = 1$, iar pentru $n = 2$ avem $z = \bar{z}$ deci orice număr real este soluţie. Pentru $n \geqslant 3$ dacă $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\rho \geqslant 0$, $z^{n-1} = \rho^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin (n-1)\theta]$ şi $\bar{z} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$, iar ecuaţia se scrie $\rho^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i \sin (n-1)\theta) = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$ de unde rezultă dacă $\rho \neq 0$, $\rho^{n-1} = \rho$ deci $\rho = 1$ şi $\theta = \frac{2k\pi}{n}$; $k = 0, 1, ..., n-1$, deci soluţiile ecuaţiei sînt $z = 0$ şi $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Dacă $\rho = 0$ avem soluţia $z = 0$. **12.134.** Din $z^6 - 1 = 0$ rezultă $U_k = \cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Avem $|U_k| = 1$ deci imaginile $A_k (k = 0, 5)$ din plan ale numerelcr complexe U_k sînt situate pe cercul cu centrul în origine şi rază 1. Considerînd triunghiurile A_1OA_0, A_2OA_1, ..., A_0OA_5 avem $\widehat{A_1OA_0} = \arg(U_1) - \arg(U_0) = \frac{\pi}{3}$; $\widehat{A_2OA_1} = \frac{\pi}{3}$, ..., $\widehat{A_0OA_5} = \frac{\pi}{3}$ deci triunghiurile sînt congruente deci $A_0, A_1, ..., A_5$ sînt vîrfurile unui exagon regulat înscris în cercul de centru O şi rază 1. **12.135.** a) $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} + 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \left(\cos \frac{A-C}{2} + \cos \frac{A+C}{2} \right)$, ţinînd seama de formule de tipul $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$, $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$ care funcţionează într-un triunghi, după

care se obține rezultatul transformînd în produs suma de cosinusuri din paranteză. b) $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{B}{2} = 1 + 2\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2}\right)$, folosind observațiile de la a) și formula $1 + \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; și apoi se transformă în produs diferența. c) Se pornește de la observația că $\sin(A+B+C) = 0$ de unde $\sin A\cos(B+C) + \cos A\sin(B+C) = \ldots = 0$. d) Folosim faptul că $\cos(A+B+C) = -1$ și după dezvoltări evidente se obține identitatea. e) Se pornește de la $\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 1$. f) Se dezvoltă în egalitatea $\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 0$. g) Se procedează ca la a) și se folosesc relații de tipul $\sin(B+C) = \sin A$, $\cos(B+C) = -\cos A$. h) Se observă că $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$. i) Se pornește de la observația că $\operatorname{tg}(A+B) = -\operatorname{tg} C$ din care se obține identitatea $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$, echivalentă cu cea propusă. j) Suma din enunț se scrie succesiv $\frac{2}{\cos A\cos B\cos C}\sum \sin A\cos^2 A\sin(B-C) = \frac{2}{\cos A\cos B\cos C}\cdot\sum\cos^2 A(\cos^2 C - \cos^2 B) = 0$. k) Se probează mai întîi că $\sin 2B + \sin 2C - \sin 2A = 4\sin A\cos B\cos C$ și $\sin^3 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A$, ceea ce reduce problema la a demonstra că $\sum \operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C = 1$; aceasta se obține imediat din $\operatorname{ctg}(B+C) = -\operatorname{ctg} A$. l) Avem $\sin^2 A\sin(B-C) = \frac{1}{2}\sin A\sin(B-C)(1-\cos^2 A) = \frac{1}{4}(1-\cos 2A)(\cos 2C - \cos B)$; termenii următori au expresii analoage și egalitatea se menține. **12.136.** $2A - \frac{\pi}{3}$, $2B - \frac{\pi}{3}$, $2C - \frac{\pi}{3}$ sînt unghiurile unui triunghi și

se aplică 12.135. **12.137.** $\frac{A}{2}+\frac{\pi}{6}$; $\frac{B}{2}+\frac{\pi}{6}$; $\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}$ sînt unghiurile unui triunghi și se aplică 12.135. **12.138.** Să observăm că pentru două unghiuri ale unui triunghi avem (de exemplu) $\sin B+\sin C>\sin(B+C)$. Presupunînd $m(B)+m(C)\geqslant 45°$ ar rezulta $60°<m(A)\leqslant 135°$ și deci $\sin A\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ și cum $\sin B+\sin C>\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ am obține $\sin A+\sin B+\sin C>\sqrt{2}$. **12.139.** Folosind relația sinusurilor, ipotezele conduc la relațiile $\sin A\sin B=\sin^2 C$, $\sin B\sin C=\sin^2 A$ de unde $\sin A=\sin B=\sin C$. b) Ipoteza conduce la $\sin(B-C)=0$ de unde rezultă $B\equiv C$. c) Utilizînd teorema lui Pitagora generalizată, egalitatea din enunț conduce la $a=b$. **12.140.** Egalitatea din enunț se scrie, succesiv: $a\left(\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\right)=b\left(\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}-\operatorname{tg}B\right)$, $\operatorname{tg}A\sin\frac{A-B}{2}=\operatorname{tg}B\sin\frac{A-B}{2}$; de unde sau $\sin\frac{A-B}{2}=0$ sau $\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}B$, în ambele cazuri avînd $A\equiv B$.

12.141. Cu teorema sinusurilor, relația de demonstrat se transformă, echivalent, în: $\sin B\sin 3C-\sin C\sin 3B=4\sin A\sin B\sin C\sin(B-C)$. Dar $\sin B\sin 3C-\sin C\sin 3B=\sin B(3\sin C-4\sin^3 C)-\sin C(3\sin B-4\sin^3 B)=4\sin B\sin C(\sin B-\sin C)(\sin B+\sin C)=4\sin B\sin C\cdot 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=4\sin B\sin C\sin(B+C)\sin(B-C)=4\sin A\sin B\sin C\sin(B-C)$.

12.142. a) Relația $2b=a+c$ se transformă succesiv în $2\sin B=\sin A+\sin C$, $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{A+C}{2},\cos\frac{A-C}{2}$; $2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2},\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}=3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$. b) Ținînd seama de relația $\sum\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$ condiția de la a) implică $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$ și cu inegali-

tatea mediilor deducem $\operatorname{tg}\frac{B}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ și deci $0° < m(\hat{B}) \leqslant 60°$. Pentru orice $\alpha \in (0, 60°]$ există un triunghi având laturile a, b, c în progresie aritmetică și $m(\hat{B}) = \alpha$. În adevăr, unghiurile A, C sînt date de sistemul $\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$, observînd că $\operatorname{ctg}\frac{2B}{2} \geqslant 3$, sistemul are soluții reale. **12.143.** Relația din enunț este echivalentă cu $\sin 2A - \sin 2B = 0$, deci cu $\sin(A - B)\cos(A + B) = 0$. Dacă $\sin(A - B) = 0$ atunci triunghiul este isoscel ($a = b$), iar dacă $\cos(A + B) = 0$ triunghiul este dreptunghic în C. În astfel de triunghiuri are loc egalitatea. **12.144.** Folosind formula $S = \frac{abc}{4R}$ și relația sinusurilor, egalitatea din enunț este echivalentă cu $\sum \cos A \sin B \sin C = 1 + \cos A \cos B \cos C$, care a făcut obiectul ex. 12.135. d). **12.145.** Condițiile se scriu $2a = b + c$, $2h_a = h_b + h_c$. Ținînd seama de egalitățile $ah_a = bh_b = ch_c$, obținem $\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ care împreună cu $2a = b + c$ conduce la $c = b$ și atunci $a = b = c$. **12.146.** Relația din enunț este echivalentă cu $\sin\frac{C - B}{2}\left[2\sin\frac{A}{2} - \right.$ $\left. - \sin\left(\frac{A}{2} - B\right)\right] = 0$. Dacă unghiurile B, C sînt congruente, atunci relația este verificată. Presupunînd această relație îndeplinită obținem sau că unghiurile B, C sînt congruente sau că $2\sin\frac{A}{2} - \sin\left(\frac{A}{2} - B\right) = 0$. Arătăm că această a doua posibilitate este exclusă. În adevăr $2\sin\frac{A}{2} - \sin\left(\frac{A}{2} - B\right) =$ $= 2\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos B + \sin B\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}2\sin^2\frac{B}{2} + \right.$ $\left. + 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right) = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\right) =$ $= 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + 1\right) \neq 0$. **12.147.**

Scanned with OKEN Scanner

Avem succesiv $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \sec^2 A = \dfrac{\sin B \sin C}{\cos^2 A \cos B \cos C} =$

$= \dfrac{\sin(A+C)\sin(A+B)}{\cos A \cos C \cos A \cos B} = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C)(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B) =$

$= \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C(\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A)$ și rămîne de utilizat 12.135. **12.148.** Presupunînd $A \leqslant B \leqslant C$ deducem că $B = \dfrac{\pi}{3}$. Din ultima condiție rezultă că raza cercului circumscris triunghiului este $R = 2$, iar din $4(\sin A + \sin B + \sin C) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 6$ rezultă $\sin A + \sin C = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Care combinată cu $A + C = \dfrac{2\pi}{3}$ conduce la $\cos \dfrac{C-A}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, de unde $C - A = \dfrac{\pi}{6}$ (vizavi de $A \leqslant B \leqslant C$) și atunci $A = \dfrac{\pi}{4}$, $B = \dfrac{\pi}{3}$, $C = \dfrac{5\pi}{12}$ etc. **12.149.** Scriind $\cos x = \cos\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{x}{2}\right) = \cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}$ ecuația devine $(m-1)\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3x}{2} = 0$, ale cărei soluții sînt $x = \dfrac{2k\pi}{3}$ ale căror imagini pe cercul trigonometric sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. **12.150.** Aplicînd relația sinusurilor în triunghiul AB_1C_1 se găsește ușor că $a_1 = 2a \cdot \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$. Inegalitatea de demonstrat se transformă în $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \geqslant 48\sin^2\dfrac{A}{2}\sin^2\dfrac{B}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}$ care este o consecință a inegalităților $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\sin^2\dfrac{A}{2}\cdot\sin^2\dfrac{B}{2}\cdot\sin^2\dfrac{C}{2}}$ și $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{8}$. **12.151.** Teorema lui Pitagora

Scanned with OKEN Scanner

generalizată conduce la $\| AB \|^2 - \| AC \|^2 = \| BD \|^2 - \| DC \|^2 - 2 \| AD \| (\| BD \| \cos \widehat{ADB} - \| DC \| \cos \widehat{ADC})$. Egalitatea din enunț are loc dacă și numai dacă $\| BD \| \cos \widehat{ADB} - \| DC \| \cos \widehat{ADC} = 0$ și, deoarece $\cos \widehat{ADB} = -\cos \widehat{ADC}$, aceasta se realizează exact pentru $m(\widehat{ADB}) = \frac{\pi}{2}$. **12.152.** Deoarece $h_a = b \sin C$, folosind relația sinusurilor, relația dată se transformă succesiv în $2 \sin B \sin C = \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \cdot 2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} =$ $= 1 - \sin \frac{A}{2}$, $2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = 1$, $\cos \frac{B-C}{2} = 1$, $B \equiv C$. **12.153.** Relația din enunț se transformă echivalent, succesiv, în $4 \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right] - 1 = 0$, $4 \sin^2 \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right] - \sin^2 \frac{B-C}{2} - \cos^2 \frac{B-C}{2} = 0$, $4 \sin^2 \frac{A}{2} - 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \cos^2 \frac{B-C}{2} + \sin^2 \frac{B-C}{2} = 0$, $\left(2 \sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{B-C}{2} = 0$, de unde rezultă $\sin \frac{B-C}{2} = 0$ și $2 \sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} = 0$. Din prima rezultă $B \equiv C$ și atunci din a doua deducem $A = \frac{\pi}{3}$ și astfel $A \equiv B \equiv C$. **12.154.** Avem succesiv $1 - 8 \cos A \cos B \cos C = 1 - 4 \cos C [\cos(A + B) + \cos(A - B)] = 4 \cos^2 C - 4 \cos(A - B) \cos C + 1 = [(2 \cos C - \cos (A - B)]^2 + 4 \sin^2 \frac{A-B}{2}$ și condiția din enunț este echivalentă cu ansamblul egalităților $2 \cos C - \cos(A-B) = 0$ $\sin \frac{A-B}{2} = 0$

de unde deducem $A \equiv B \equiv C$. **12.155.** Ținînd seama de formulele $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\sin 3\alpha = \sin(4\cos^2\alpha - 1)$, determinantul are valoarea $\Delta = 8 \sin A \sin B \sin C(\cos B - \cos A)(\cos C - \cos A)(\cos C - \cos B)$; dar $\cos B - \cos A = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2p(p-c)(a-b)}{abc}$ și cu $a = 2R \sin A$ etc., obținem $\Delta = \frac{8p^3(p-a)(p-b)(p-c)(a-b)(a-c)(b-c)}{R^3a^2b^2c^2} = \frac{p^2(a-b)(a-c)(b-c)}{2R^5}$, utilizînd și formulele $S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **12.156.** Soluția aparține lui Traian Lalescu. Notînd $\cos A = x$, $\cos B = y$, $\cos C = z$ și ținînd seama de identitatea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx) = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx)$, relația din enunț este echivalentă cu $8(x+y+z)^3 - 27 - 12(xy+yz+zx) \cdot [2(x+y+z) - 3] = 0$ și după descompunerea diferenței de cuburi obținem $[2(x+y+z) - 3][4(x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx) + 6(x+y+z) + 9] = 0$. Deoarece $6(\cos A + \cos B + \cos C) + 9 = 24 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 15 > 0$ și $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geqslant 0$, rezultă în mod necesar $2(\cos A + \cos B + \cos C) - 3 = 0$ echivalentă cu $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 1$ din care se obține ca în 12.153 că triunghiul este echilateral. **12.157.** Folosind relația sinusurilor, inegalitatea este echivalentă cu $\sin B + \sin C \geqslant 2 \sin A \sqrt{\sin B \sin C}$. Din inegalitatea mediilor avem $\sin B + \sin C \geqslant 2\sqrt{\sin B \sin C}$ și cum $1 \geqslant \sin A$, obținem rezultatul. **12.158.** Conform 12.135, inegalitatea din enunț se scrie în forma echivalentă $2 \sum \sin A \sin B \sin C \geqslant \sum \sin A \sin B$ și, succesiv, în $\sum \sin A \sin B(2 \cos C - 1) > 0$, $\sum \frac{2 \cos C - 1}{\sin C} \geqslant 0$. Ținînd seama că $2 \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$ inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\sum \frac{a^2+b^2-c^2-ab}{abc} \geqslant 0$, deci cu $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geqslant 0$ care este adevărată. Egalitatea are loc dacă și

numai dacă triunghiul ABC este echilateral. **12.159.** a) Conform 12.135, $\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1$. Folosind inegalitatea mediilor, rezultă $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{3}\right)^3$ de unde inegalitatea din enunț. b) $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqslant$ $\leqslant 2\sin\frac{A+B}{2}$ egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă $A=B$. Adunînd această inegalitate cu cele similare, obținem $\sum\sin A\leqslant\sum\sin\frac{A+B}{2}$ egalitatea avînd loc dacă și numai dacă $A=B=C$. Deci $\sum\sin A\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$, egalitatea exact pentru triunghiul echilateral (S-a ținut seama că $\frac{A+B}{2};\frac{B+C}{2};\frac{C+A}{2}$ pot fi unghiurile unui triunghi). c) Se ține seama că $\sum\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B=1$, conform 12.135 și se aplică inegalitatea mediilor. d) $|2(\cos A+\cos B+$ $+\cos C)|\leqslant|\cos A+\cos B|+|\cos B+\cos C|+$ $+|\cos C+\cos A|=2\left|\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right|+\ldots\leqslant$ $\leqslant 2\left(\left|\cos\frac{A+B}{2}\right|+\cos\left|\frac{B+C}{2}\right|+\cos\left|\frac{C+A}{2}\right|\right)$, egalitatea avînd loc exact pentru triunghiul echilateral, de unde, ținînd seama că $\frac{A+B}{2},\frac{B+C}{2},\frac{C+A}{2}$ pot fi unghiurile unui triunghi, se obține inegalitatea. **12.160.** a) Ținînd seama de formulele $S=pr=\frac{abc}{4R}$ inegalitatea $3\sqrt{3}r\leqslant p$ este succesiv echivalentă cu următoarele $3\sqrt{3}abc\leqslant 4Rp^2$, $6\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C\leqslant$ $\leqslant 16\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}$ care face obiectul ex. 12.159. S-au folosit, încă, teorema sinusurilor și egalitatea 12.135. Inegalitatea $p\leqslant\frac{3}{2}R\sqrt{3}$ este

Scanned with OKEN Scanner

echivalentă cu $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$, cunoscută din 13.159. b) Inegalitatea se obține din prima, înlocuind $R = \frac{abc}{4S}$. c) Inegalitatea este echivalentă cu $p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} R$. Egalitățile au loc exact pentru triunghiul echilateral. **12.161.** Avem succesiv $\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}} =$

$= \frac{\sin C}{\cos\frac{A+C-B}{2} + \cos\frac{A-B-C}{2}} = \frac{\sin C}{\cos\frac{\pi-2B}{2} + \cos\frac{\pi-2A}{2}} =$

$= \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{a+b}$. Așadar, inegalitatea propusă este echivalentă cu $\frac{3}{2} \leqslant \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} < 2$. Să observăm că dacă α, β, γ sînt numere strict pozitive și $\alpha \leqslant \beta$ atunci $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}$. Rezultă $\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}$; $\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$; $\frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$ de unde $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} < 2$. Cealaltă inegalitate se obține astfel: Folosind inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ pentru orice x real pozitiv, cu egalitate pentru $x = 1$, deducem $\frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{b+c} + \frac{c+a}{a+b} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geqslant 6$ și deci $\frac{a+c+2b}{a+c} + \frac{b+c+2a}{b+c} + \frac{a+b+2c}{a+b} \geqslant 6$ de unde $\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$; egalitatea realizîndu-se exact în cazul triunghiului echilateral. **12.162.** Condiția din enunț este echivalentă cu $8 \sin A \sin B \sin C \geqslant 3\sqrt{3}$. Pe de altă parte, conform 12.159, într-un triunghi are loc $8 \sin A \sin B \sin C \leqslant 3\sqrt{3}$,

egalitatea exact pentru triunghiul echilateral, și acum concluzia este clară. **12.163.** Inegalitatea din enunț are scrierea echivalentă $\frac{y^2+z^2-a^2}{yz}+\frac{z^2+x^2-b^2}{zx}+\frac{x^2+y^2-c^2}{xy}\geqslant$ $\geqslant -3$. Notînd $m(\widehat{BPC})=\alpha$, $m(\widehat{CPA})=\beta$, $m(\widehat{APB})=\gamma$, rezultă $\cos\alpha=\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}$ etc., și inegalitatea capătă forma echivalentă $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqslant-\frac{3}{2}$. Dar $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1=$ $=2\cos^2\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-1$, deoarece $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$; problema se reduce la a arăta că $2\cos^2\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$ $+\frac{1}{2}\geqslant 0$. Fie trinomul $2x^2-2x\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}$. Acesta are discriminantul $\Delta\leqslant 0$ pentru orice α, β; prin urmare $2x^2-2x\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}\geqslant 0$ pentru orice x real și de aici concluzia. Egalitatea are loc pentru $\alpha=\beta=\gamma=120°$, deci cînd P este punctul Toricelli al triunghiului ABC. **12.164.** Deoarece $\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{2A-(B+C)}{4}\cos\frac{B-C}{4}=$ $=2\sin\frac{2\pi-3(B+C)}{4}\cos\frac{B-C}{4}=2\cos\frac{3(B+C)}{4}\cos\frac{B-C}{4}$, iar $\sin\frac{3A}{2}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-3\frac{B+C}{2}\right)=-\cos 3\frac{B+C}{2}$, inegalitatea dată este echivalentă cu $1-2\cos^2\frac{3(B+C)}{4}+$ $+2\cos\frac{3(B+C)}{4}\cdot\cos\frac{B-C}{4}-\frac{3}{2}\leqslant 0$ sau cu $2\cos^2\frac{3(B+C)}{4}-$ $-2\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{3(B+C)}{4}+\frac{1}{2}\geqslant 0$. Să considerăm trinomul $2x^2-2x\cos\frac{B-C}{4}+\frac{1}{2}$ al cărui discrimi-

nant $\cos^2 \frac{B-C}{4} - 1$ este nepozitiv ($\leqslant 0$). Rezultă $2x^2 - 2x \cos \frac{B-C}{4} + \frac{1}{2} \geqslant 0$ pentru orice x real, egalitatea putînd fi realizată numai dacă $B = C$ și atunci pentru $x = \frac{1}{2}$. Deci egalitate în inegalitatea propusă se realizează exact în situația $B = C$ și $\cos \frac{3(B+C)}{4} = \frac{1}{2}$ adică pentru $B = C = \frac{2\pi}{9}$ și $A = \frac{5\pi}{9}$. Interesant! **12.165.** Facem la început observația că dacă $a \neq 0$, $c \neq 0$ și $ac - b^2 > 0$, atunci ecuația în numere reale x, y, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, are numai soluția $x = 0$, $y = 0$. (Demonstrați afirmația!). Presupunem, pentru simplitate, $A+B+C=\pi$ și $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ nenule. Din ipotezele $x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0$ și $x^2 \sin 2A + y^2 \sin 2B + z^2 \sin 2C = 0$, prin eliminarea lui z se ajunge la ecuația $x^2 \sin^2 A - 2xy \sin A \sin B \cos(A+B) + y^2 \sin^2 B = 0$ pentru care $ac - b^2 = \sin^2 A \sin^2 B \cdot \sin^2(A+B) > 0$; prin urmare $x = 0 = y$ și atunci $z = 0$, ceea ce antrenează $F(n) = 0$ pentru orice n natural. **12.166.** Fie A_1 piciorul înălțimii din A, M mijlocul laturii $|BC|$ și N proiecția lui H pe OM. Rezultă $\| BA_1 \| = 2R \sin C \cos B$, $\| HA_1 \| = 2R \cos B \cos C$, $\| A_1M \| = \frac{a}{2} - \| BA_1 \| = R(\sin A - 2 \sin C \cos B)$. Atunci $\| ON \| = R(\cos A - 2 \cos B \cos C)$ și deci $\| OH \|^2 = R^2 (\cos^2 A - 4 \cos A \cos B \cos C + 4 \cos^2 B \cos^2 C + \sin^2 A - 4 \sin A \sin C \cos B + 4 \sin^2 C \cos^2 B) = R^2[1 - 4 \cos B(\cos A \cos C + \sin A \sin C) + 4 \cos^2 B] = R^2[1 + 4 \cos(A+C) \cos(A-C) + 4 \cos^2 B] = R^2[4 \cos^2 A + 4 \cos^2 B + 4 \cos^2 C - 3]$ și atunci $\| OH \|^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$. **12.167.** Numerele $1, z, \ldots, z^{n-1}$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, deci poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ este poligonul regulat cu n laturi înscris în cercul unitate și avînd vîrful A_1 în originea arcelor. Fie $\zeta_k = 1 + z + \ldots + z^{k-1}$ afixul punctului B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Atunci $\zeta_{k+1} - \zeta_k = z^k$ și deci $\| B_kB_{k+1} \| = | z^k | = 1$ și B_kB_{k+1} este paralelă cu OA_k, deci cu $A_{k-1}A_k$. Rezultă că poligonul $B_1B_2 \ldots B_n$ este un poligon regulat avînd latura 1. Rezultă că raportul cerut este $4 \sin^2 \frac{\pi}{n}$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 13

13.1. Din problemă rezultă $a^2 = 3b^2$ și deci mediana $|AA'|$ are lungimea $\frac{a}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, mediana $|BB'|$ are lungimea $\sqrt{\|AB\|^2 + \|AB'\|^2} = \sqrt{2b^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{3b}{2}$, mediana $|CC'|$ are lungimea $\sqrt{\|AC\|^2 + \|AC'\|^2} = b\sqrt{\frac{3}{2}}$. Deoarece $c^2 = 2b^2$ rezultă $\frac{\|AC\|}{\|AC'\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$ ceea ce, vizavi de faptul că unghiul A este comun triunghiurilor ABC și ACC', arată că aceste triunghiuri sînt asemenea. b) $\|AG\| = \frac{2}{3} \cdot \|AA'\| = \frac{b\sqrt{3}}{3}$. $\|CG\| = \frac{2}{3}\|CC'\| = \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$ și deci $\|AG\|^2 + \|CG\|^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{2b^2}{3} = b^2 = \|AC\|^2$ adică triunghiul AGC este dreptunghic în G. Deoarece unghiurile $\widehat{A'B'C}$ și $\widehat{A'GC}$ sînt congruente, rezultă că patrulaterul $A'GB'C$ este inscrlptibil. c) Deoarece $\|AG\| = \frac{a}{3}$, ipoteza că $\|AA'\|$ și $\|CC'\|$ sînt perpendiculare conduce la $\|CC'\|^2 = \frac{9b^2 - a^2}{4} = \frac{8b^2 - c^2}{4}$ deci $b^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{8b^2 - c^2}{4}$ de unde $c^2 = 2b^2$. d) Pentru un triunghi dreptunghic ABC de catete de lungimi b, c, volumul corpului ce ia naștere prin rotirea lui în jurul paralelei prin A la BC este $\frac{2\pi b^2 c^2}{3a}$.

13.2. a) Vom presupune $b < c$, ceea ce implică ordinea B, C, D. Triunghiurile ABD și ACD sînt asemenea și, prin urmare, $\frac{\|BD\|}{\|AD\|} = \frac{\|AD\|}{\|CD\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$, de unde $\|CD\| = \frac{ab^2}{c^2 - b^2}$, $\|AD\| = \frac{abc}{c^2 - b^2}$, $\|BD\| = \frac{ac^2}{c^2 - b^2}$. b) Unghiurile $\widehat{MBC}$ și $\widehat{DAC}$ sînt congruente (avînd aceeași măsură — $m(\widehat{AC})/2$) și cum unghiurile $\widehat{DAC}$ și $\widehat{MNA}$ sînt congruente, concluzia se impune. c) Afirmația rezultă, de exemplu, din faptul

că dreapta care trece prin mijloacele bazelor unui trapez trece și prin intersecția laturilor neparalele. d) Fie CC_1 paralela prin C la AD, $C_1 \in |AB|$. Atunci triunghiurile ACC_1 și ABC sînt asemenea, de unde rezultă $\frac{\|AB\|}{\|AC_1\|} = \frac{\|AC\|}{\|AB\|}$, de unde $\frac{\|DB\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$. Apoi, dacă P este mijlocul lui $|CC_1|$ și E intersecția dreptelor AP și BC, teorema lui Menelaus aplicată triunghiului BCC_1 tăiat de transversala APE conduce la $\frac{\|EB\|}{\|EC\|} = \frac{\|AB\|^2}{\|AC\|^2}$. În fapt, $|AE$ este simediana din A a triunghiului ABC (vedeți 3.15. și 3.16.). e) Afirmația rezultă din observația precedentă, cu definiția simedianei. Soluție „în examen": Deoarece triunghiurile ACC_1 și ABC sînt asemenea rezultă $\frac{\|AB\|}{\|AC\|} = \frac{\|BC\|}{\|CC_1\|}$ deci $\frac{\|AB\|}{\|AC\|} = \frac{\|BA'\|}{\|CP\|}$ și cum unghiurile $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ACC_1}$ sînt congruente, deducem că triunghiurile ABA' și ACP sînt asemenea și concluzia se impune. f) Suprafața obținută se constituie din suprafața laterală a unui con avînd raza $\frac{bc}{a}$ și generatoarea de lungime $\|AD\| = \frac{abc}{b^2 - c^2}$ și din suprafața unei calote sferice făcînd parte dintr-o sferă de rază $\frac{a}{2}$ și avînd înălțimea $\frac{b^2}{a}$. **13.3.** a) Folosind patrulaterele inscriptibile $ABRP$ și $AQSB$, deducem că unghiurile din P și Q ale patrulaterului $PQSR$ sînt suplementare, deci PR și QS sînt paralele. b) Fie punctele E și F pe cercul de centru O_1 respectiv pe cercul de centru O_2 astfel încît EF trece prin B și este perpendiculară pe AB. Atunci PE și QF sînt perpendiculare pe PQ; dacă G este mijlocul (fix) segmentului $|EF|$ și M mijlocul segmentului $|PQ|$, rezultă că GM este perpendiculară pe PQ, ceea ce arată că M descrie cercul de diametru $|AB|$. Același cerc este descris și de mijlocul laturii $|RS|$. Deoarece coarda $|PS|$ în cercul O_1 are lungime constantă, egală cu $\|AB\|$, deducem că mijlocul ei descrie un cerc concentric cu cercul O_1 și, analog, mijlocul lui $|QR|$ descrie un cerc concentric cu cercul O_2. Aceste cercuri sînt tangente în mijlocul lui $|AB|$. C.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă U și V sînt mijloacele laturilor $|PS|$ și $|QR|$, atunci UV trece prin C, centrul paralelogramului este mijlocul segmentului $|UV|$. Notînd prin X și Y diametral — opusele punctului C în cercurile „mici" de mai sus, iar prin Z mijlocului segmentului $|XY|$, atunci centrul paralelogramului descrie cercul de diametru $|CZ|$. c) Am văzut mai sus că două din laturi au lungimea egală cu $\|AB\|$, iar din trapezul $PEFQ$, dreptunghic în P și Q rezultă că $\|PQ\| \leqslant \|EF\| = 2 \cdot \|O_1O_2\|$.

13.4. a) Presupunînd unghiul $\widehat{BCD}$ ascuțit, avem $\|DC\| = bc \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $\|AB\| = b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $BC = 2b \operatorname{cosec} \alpha$. b) Triunghiurile în discuție sînt dreptunghice și au cîte un unghi ascuțit congruente, deci sînt asemenea. c) Din asemănarea celor două triunghiuri de mai sus, rezultă $\|OP\| = b$ ceea ce arată că BC rămîne tangentă cercului de centru O și rază b, adică cercului de diametru $|AD|$. d) Afirmația rezultă, de exemplu, observînd că $|BO$ și $|CO$ sînt bisectoare ale unghiurilor din B, respectiv C ale trapezului (deoarece $\|OA\| = \|OP\| = \|OD\|$). e) Fie H proiecția lui O pe SP. Deoarece BC este perpendiculară pe planul OSP fiind perpendiculară pe două drepte din acest plan, OP și OS, deducem că $\|OH\|$ reprezintă distanța punctului O la planul SBC, care este deci $\frac{bd}{\sqrt{b^2+d^2}}$. **13.5.** a) Deoarece PN și MB sînt paralele, iar N este mijlocul lui $|MC|$, rezultă că PR intersectează segmentul $|BC|$ în mijlocul său, fie el Q. Punctele A și Q fiind fixe și unghiul $\widehat{MPQ}$ drept, deducem că P se află pe cercul de diametru $|AQ|$. Cînd M coincide cu A, P se află la intersecția perpendicularei din Q pe tangenta în A la cercul dat cu aceasta, fie P_A acest punct, iar cînd M coincide cu B, P coincide cu proiecția lui Q pe AB, fie P_B acest punct. Din continuitate, rezultă că atunci cînd M parcurge semicercul $\widehat{AB}$, P descrie semicercul (!) $\widehat{P_AP_B}$ din cercul de diametru $|AQ|$. b) Notînd $\mathrm{m}(\widehat{BAC}) = \alpha$, condiția impusă se transcrie $\sin x + \cos x = \sin \alpha + \cos \alpha$, de unde se obține valoarea acceptabilă $x = \alpha$. c) Un patrulater admite un cerc înscris dacă și numai dacă suma lungimilor a două laturi opuse este egală cu suma lungimilor celorlalte laturi opuse. Astfel, patrulaterul $AMBC$ admite un cerc

Scanned with OKEN Scanner

înscris. Fie D intersecția bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{ACB}$ cu AB; D este centrul cercului înscris în patrulaterul $AMBC$. Fie DE perpendiculara din D pe $BC(E \in BC)$. $\| DE \|$ este raza cercului înscris în $AMBC$. Deducem $\| DE \| = \frac{2R \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$; R fiind raza cercului dat. **13.6.** În general, dacă unghiurile ascuțite ale unui trapez isoscel circumscris unui cerc de rază R sînt de mărime 2α, atunci bazele trapezului au lungimile $2R \operatorname{ctg} \alpha$, $2R \operatorname{tg} \alpha$ și deci aria trapezului este $2R^2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$. **13.7.** Fie $|AD|$ bisectoarea unghiului drept $A(D \in |BC|)$ și E, F proiecțiile punctului D pe AB și AC. Folosind teorema bisectoarei rezultă $\| CD \| = \frac{ab}{b+c}$; $\| BD \| = \frac{ac}{b+c}$. Utilizînd relația lui Stewart, deducem $\| AD \| = \frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$. Altfel, se poate folosi pătratul $AEDF$ și evaluînd $\| AF \| = \frac{bc}{b+c}$ se obține rezultatul. **13.8.** Un plan intersectează două plane paralele după două drepte paralele; rezultă A_1B_1 paralelă cu D_1C_1 și A_1D_1 paralelă cu B_1C_1 deci patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram. Unghiurile ascuțite $\widehat{B_1JB}$, $\widehat{A_1IA}$ au aceeași măsură, ceea ce implică asemănarea triunghiurilor A_1AI și B_1BJ din care se obține relația. *Observație:* Rezultatele se mențin pentru o prismă oarecare! **13.9.** Lungimea medianei din vîrful drept al unui triunghi dreptunghic este jumătate din lungimea ipotenuzei, deci $\| MB' \| = \| MC' \| = \frac{\| BC \|}{2}$. Apoi triunghiul isoscel $B'MC$ ne oferă egalitatea: $m(\widehat{B'MC}) = 180° - 2\, m(\hat{C})$; la fel, $m(\widehat{C'MB}) = 180° - 2\, m(\hat{B})$. Rezultă $m(\widehat{C'MB}) = 60°$ și prin urmare triunghiul $B'MC'$ este echilateral. **13.10.** Unghiurile $\widehat{BCE} = \widehat{EDA}$ au aceeași măsură. Apoi, $m(\widehat{EDA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AE}) = m(\widehat{CAE})$. Rezultă că $\widehat{BCE} \equiv \widehat{CAE}$. Triunghiurile CEF și ACF sînt asemenea,

Scanned with OKEN Scanner

de unde se obține relația din enunț. Observînd că $\| FB \|^2 = \| FE \| \cdot \| FA \|$ din puterea punctului F față de cerc, comparînd cu relația demonstrată deducem că F este mijlocul segmentului $| BC |$. **13.11.** Tetraedrul $SA'B'C'$ este asemenea cu tetraedrul $SABC$, deci $\frac{\text{vol}(SA'B'C')}{\text{vol}(SABC)} = \frac{1}{27}$ (cubul raportului înălțimilor). La fel $\frac{\text{vol}(SA''B''C'')}{\text{vol}(SABC)} = \frac{1}{8}$. Rezultă că $\text{vol}(A''B''C''A'B'C') = \frac{19}{8 \cdot 27} \text{vol}(SABC)$, $\text{vol}(ABCA''B''C'') = \frac{7}{8} \text{vol}(SABC)$ de unde deducem $\frac{\text{vol}(ABCA''B''C'')}{\text{vol}(A''B''C''A'B'C')} = \frac{189}{19}$. *Observație:* Problema poate fi pusă pentru o piramidă oarecare. **13.12.** Deoarece $2R = a$, $r = \frac{bc}{p}$, egalitatea de demonstrat este $\frac{2bc}{a+b+c} + a = b + c$, care se verifică imediat. **13.13.** Fie (d_1) și (d_2) două drepte oarecare în spațiu și A_1A_2 perpendiculara comună, $A_1 \in (d_1)$, $A_2 \in (d_2)$, (π) un plan paralel cu dreapta A_1A_2. Fie (D_1), (D_2) proiecțiile dreptelor (d_1), (d_2) pe acest plan. Se știe că un unghi drept avînd o latură paralelă cu un plan se proiectează pe acest plan într-un unghi drept. Rezultă că (D_1) și (D_2) sînt perpendiculare pe B_1B_2 proiecția lui A_1A_2, deci paralele între ele. **13.14.** a) Dacă A este ortocentrul triunghiului ABP, rezultă că PA este perpendiculară pe AB; așadar, $f(P) = A$ dacă și numai dacă P aparține perpendicularei în A pe AB, fără punctul A. Pentru C pe dreapta AB, diferit de A și B $\{P \in \mathcal{M} : f(P) = C\} = \emptyset$. Afirmația $f(f(P)) = P$ este un joc de cuvinte. b) Fie Q intersecția dreptei $Pf(P)$ cu cercul O. Atunci $f(P)$ este simetricul punctului Q față de dreapta AB, ceea ce demonstrează afirmația. **13.15.** Avem $\| HA' \| = \| BA' \| \cdot \text{ctg } C$ și cum $\| BA' \| = \| AB \| \cdot \cos B = 2R \sin C \cos B$, deducem $\| HA' \| = 2R \cos B \cos C$ și, analog, $\| HB' \| = 2R \cos A \cos C$, $\| HC' \| = 2R \cos A \cos B$ și prima relație se impune. Pentru cea de a doua, se observă că $\frac{\| HA \|}{\| HA' \|} = \frac{\| AA' \| - \| HA' \|}{\| HA' \|} = \frac{\| AA' \|}{\| HA' \|} - 1 = \frac{2R \sin B \sin C}{2R \cos B \cos C} - 1 = \text{tg } B \text{ tg } C - 1$ etc. **13.16.** Consi-

derăm situația din figura 13.16, alte situații se tratează analog. a) Din enunț rezultă $\|AB\| = \|CM\| = \|DN\|$. Patrulaterul convex $CMND$ este trapez isoscel. Se constată că unghiurile $\widehat{EMC}$ și $\widehat{FDN}$ sînt congruente, ca și unghiurile $\widehat{CEM}$ și $\widehat{FND}$. Rezultă că triunghiurile $\widehat{CEM}$ și $\widehat{FND}$ sînt asemenea, de unde se obține $\frac{\|CE\|}{\|DN\|} = \frac{\|CM\|}{\|FD\|}$ și deci $\|AB\|^2 = \|CE\| \cdot \|FD\|$. b) Este doar de observat că unghiurile $\widehat{ABF}$ și $\widehat{AEF}$ sînt congruente. **13.17.** Fie V, V_a, V_b, V_c, V_d volumele tetraedrelor $ABCD$, $OBCD$, $OACD$, $OABD$, $OBCA$. Atunci $V = V_a + V_b + V_c + V_d$ și rămîne de observat că $\frac{V_a}{V} = \frac{\alpha}{a}$ etc. **13.18.** a) Drep-

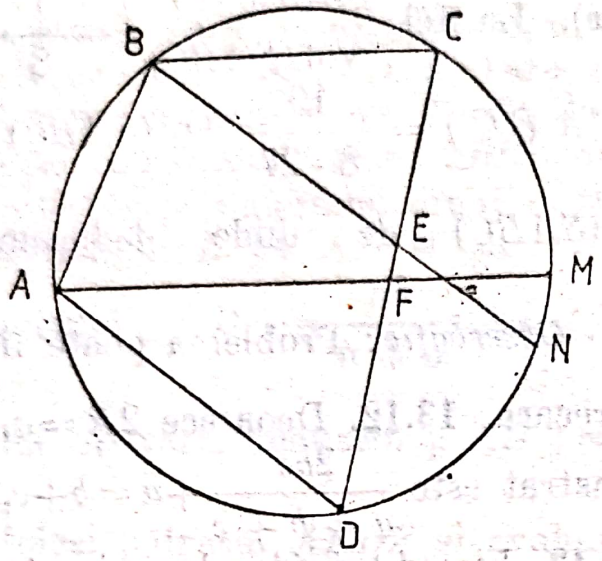


Fig. 13.16

tele AE și BF se taie în C, situat de aceeași parte cu E și F față de AB; triunghiul ABC este echilateral. Notînd $\|AB\| = 3a$ și $\|MB\| = x$, $0 < x < 3a$, rezultă $\|EF\|^2 = x^2 + (3a - x)^2 - x(3a - x)$, prin urmare triunghiul CEF este dreptunghic în E dacă și numai dacă $(3a - x)^2 = 2x^2 + (3a - x)^2 - x(3a - x)$, deci dacă și numai dacă $x = a$. b) Punctul C este, evident, fix și dreapta MC trece prin P, fiind diagonală în paralelogramul $MECF$. Așadar MP trece prin punctul fix C. **13.19.** Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrul regulat și $O_i (i = 1, 2, 3, 4)$ centrul sferei tangente fețelor tetraedrului concurente în vîrful A_i. Notînd prin r raza sferelor, rezultă că teatraedrul $O_1O_2O_3O_4$ este un tetraedru regulat de latură $2r$. Fie O centrul tetraedrului dat și H_1 piciorul înălțimii din A_1 și C_3 proiecția lui O_3 pe planul $A_2A_3A_4$. Atunci $\|A_3H_1\| = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ și deci $\|A_1H_1\| = \frac{l\sqrt{6}}{3}$. Rezultă $\|A_1O_1\| = \frac{l\sqrt{6}}{4}$, $\|OH_1\| = \frac{l\sqrt{6}}{12}$. Dar O este și centrul tetraedrului $O_1O_2O_3O_4$. Rezultă $\|OO_1\| = \frac{r\sqrt{6}}{2}$. Din asemănarea

triunghiurilor $A_3O_3C_3$ și A_3OH_1 deducem $r = \frac{l}{2(1+\sqrt{6})}$.

13.20. Evident, AE este paralelă cu BD, iar ED este paralelă cu AC; rezultă că $AFDE$ este paralelogram și, avînd două laturi consecutive congruente, deducem că este romb. Notînd l latura pentagonului, avem $\cos 36 = \frac{l}{2\|BF\|}$ de unde $\|BF\| = \frac{l}{2}\cos 36$ și atunci $\frac{\|DF\|}{\|BF\|} = \frac{2}{\cos 36}$.

13.21. Notînd $\|AB\| = l$ și $\|AP\| = x$, aria triunghiului PAR este $x(l-x)\frac{\sqrt{3}}{4}$ și este maximă pentru $x = \frac{l}{2}$ cînd devine $\frac{1}{4}\cdot$aria$[ABC]$, ceea ce impune afirmația.

13.22. Fie $ABCD$ tetraedrul avînd muchiile opuse perpendiculare două cîte două și M, N, P, Q mijloacele muchiilor $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|$. Atunci $MNPQ$ este un dreptunghi, deci cele patru mijloace sînt egal depărtate de centrul de greutate al tetraedrului. Din simetrie rezultă că și miiloacele muchiilor $|AC|$ și $|BD|$ au aceeași distanță la centrul de greutate. **13.23.** Folosind teorema sinusurilor, relația dată se transformă, succesiv, echivalent în: $\sin B + \sin A \sin C = \sin C + \sin A \sin B$, $(\sin B - \sin C)(1 - \sin A) = 0$. Această afirmație este echivalentă cu „$1 - \sin A = 0$ sau $\sin B = \sin C$“; echivalentă cu „$A = 90°$ sau $B = C$“. **13.24.** Din enunț avem $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = 1$ de unde $2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = -1$, deci $\cos(x-y) = -\frac{1}{2}$. Dar $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\cdot 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = ab$ adică $\sin(x+y)\,2\cos^2\frac{x-y}{2} = ab$. Deoarece $\cos(x-y) = 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1$, obținem $2\cos^2\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$ și atunci $\sin(x+y) = 2ab$. **13.25.** Considerînd parabola de ecuație $y^2 = 2px$, raportată la un sistem ortonormat, ecuațiile a două tangente perpendiculare sînt $y = mx + \frac{p}{2m}$,

$y = -\frac{1}{m}x - \frac{p}{2}m$. Eliminînd parametrul real m (prin scăderea celor două egalități) obținem $x = -\frac{p}{2}$ care este ecuația directoarei parabolei. Se verifică ușor că tangentele la parabolă dintr-un punct al directoarei sînt perpendiculare. **13.26.** Relația din enunț este echivalentă cu $\|QB\|^2(\|IC\|^2 - \|IP\|^2) = \|MB\|^2\|IC\|^2$, adică $\|QB\|^2\|PC\|^2 = \|MB\|^2 \cdot \|IC\|^2$. Triunghiurile dreptunghice BMQ și CPI sînt asemenea ($\widehat{MBC} \equiv \widehat{PCI}$), ceea ce conduce la relația de mai sus. **13.27.** *Soluția I.* Fie A_1 mijlocul laturii $|BC|$, A_2 punctul în care semidreapta $|AA_1$ taie cercul circumscris triunghiului ABC. Puterea punctului A_1 față de cercul circumscris triunghiului poate fi scrisă în două moduri: $\|AA_1\| \cdot \|A_1A_2\|$ și $\|BA_1\| \cdot \|A_1C\|$ de unde rezultă $\|A_1A_2\| = \frac{a^2}{4 \cdot \|AA_1\|} = \frac{a^2}{4\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2) - \frac{1}{4}a^2}}$, pe scurt $\|A_1A_2\| = \frac{a^2}{4 \cdot m_a}$. Rezultă că puterea punctului G față de cercul circumscris este $\|AG\| \cdot \|GA_2\| = \frac{2}{3}m_a\left(\frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}\right) = \frac{4m_a^2 + 3a^2}{18}$ și folosind formula lungimii medianei, obținem puterea lui $G = \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$. *Soluția a II-a.* Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC; puterea punctului G față de cercul circumscris triunghiului este $R^2 - \|OG\|^2$, R fiind raza cercului. Aplicînd teorema lui Leibniz (vedeți 3.6), avem $\|GO\|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$ și rezultatul se impune. **13.28.** a) Din triunghiul dreptunghic în $AA'AB$ deducem $\|A'B^2\| = \frac{3a^2}{2}$, iar din trapezul $A'ACC'$, dreptunghic în A și C, deoarece $\|AC\| = a\sqrt{2}$, rezultă $\|A'C'\| = 2a$. b) Avem $\|BC'\|^2 = \|A'B\|^2 + \|A'C'\|^2$, deci triunghiul $C'A'B$ este dreptunghic în A'. c) Din simetria

Scanned with OKEN Scanner

figurii față de planul $A'ACC'$, perpendicular pe planul pătratului $ABCD$, deducem că $m(\widehat{C'A'D}) = 90°$. Prin urmare, $C'A'$ este perpendiculară pe planul $BA'D$. Notînd prin O centrul pătratului, avem $\|AO\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și deci $\|A'O\| = a$; aria triunghiului $BA'D$ este $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ și, prin urmare, volumul tetraedrului $C'A'BD$ este $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **13.29.** Este o problemă de calcul. **13.30.** Presupunînd $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$, cum $m(\hat{B}) \to = 60°$ în mod evident, rezultă $\sin A \sin C = \frac{1}{4}$, $\cos(A + C) = -\frac{1}{2}$, $\cos A \cos C = -\frac{1}{4}$, $\cos(C - A) = 0$, $m(\hat{C} - \hat{A}) = 90°$, $m(\hat{A}) = 15°$, $m(\hat{C}) = 105°$. **13.31.** Patrulaterul (convex) $AMDB$ este inscriptibil dacă și numai dacă BM este perpendiculară pe AC. Avem $\|AB\| = \|AC\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ și cum $\|AC\| \cdot \|BM\| = \|BC\| \cdot \|AD\|$ deducem $\|BM\| = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și apoi $\|AM\| = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}$. **13.32.** În mod esențial rezolvarea problemei se bazează pe teorema: raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (care poate fi exprimat ca raport a oricăror dimensiuni omoloage: laturi, înălțimi etc.) Notînd h, h_1 lungimile înălțimilor din A ale triunghiurilor ABC și ADE rezultă $h_1 = h\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, $\|DE\| = a\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, deci înălțimea din M a triunghiului MDE este $h - h_1 = h\left(1 - \sqrt{\frac{S_1}{S}}\right)$. Aria triunghiului MDE este $\frac{ah}{2}\sqrt{\frac{S_1}{S}}\left(1 - \sqrt{\frac{S_1}{S}}\right) = \sqrt{S_1 S} - S_1$ și prin urmare aria patrulaterului $ADME$ este $\sqrt{S_1 S}$. Soluția elegantă se bazează pe observația că triunghiurile DEB și DCM sînt echivalente. Notînd X aria triunghiului AEB, avem $\frac{X}{S - X} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$ de

Scanned with OKEN Scanner

figurii față de planul $A'ACC'$, perpendicular pe planul pătratului $ABCD$, deducem că $m(\widehat{C'A'D}) = 90°$. Prin urmare, $C'A'$ este perpendiculară pe planul $BA'D$. Notînd prin O centrul pătratului, avem $\|AO\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și deci $\|A'O\| = a$; aria triunghiului $BA'D$ este $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ și, prin urmare, volumul tetraedrului $C'A'BD$ este $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **13.29.** Este o problemă de calcul. **13.30.** Presupunînd $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$, cum $m(\hat{B}) \to = 60°$ în mod evident, rezultă $\sin A \sin C = \frac{1}{4}$, $\cos(A + C) = -\frac{1}{2}$, $\cos A \cos C = -\frac{1}{4}$, $\cos(C - A) = 0$, $m(\hat{C} - \hat{A}) = 90°$, $m(\hat{A}) = 15°$, $m(\hat{C}) = 105°$. **13.31.** Patrulaterul (convex) $AMDB$ este inscriptibil dacă și numai dacă BM este perpendiculară pe AC. Avem $\|AB\| = \|AC\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ și cum $\|AC\| \cdot \|BM\| = \|BC\| \cdot \|AD\|$ deducem $\|BM\| = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și apoi $\|AM\| = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}$. **13.32.** În mod esențial rezolvarea problemei se bazează pe teorema: raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (care poate fi exprimat ca raport a oricăror dimensiuni omoloage: laturi, înălțimi etc.) Notînd h, h_1 lungimile înălțimilor din A ale triunghiurilor ABC și ADE rezultă $h_1 = h\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, $\|DE\| = a\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, deci înălțimea din M a triunghiului MDE este $h - h_1 = h\left(1 - \sqrt{\frac{S_1}{S}}\right)$. Aria triunghiului MDE este $\frac{ah}{2}\sqrt{\frac{S_1}{S}}\left(1 - \sqrt{\frac{S_1}{S}}\right) = \sqrt{S_1 S} - S_1$ și prin urmare aria patrulaterului $ADME$ este $\sqrt{S_1 S}$. Soluția elegantă se bazează pe observația că triunghiurile DEB și DCM sînt echivalente. Notînd X aria triunghiului AEB, avem $\frac{X}{S - X} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$ de

Scanned with OKEN Scanner

figurii față de planul $A'ACC'$, perpendicular pe planul pătratului $ABCD$, deducem că $m(\widehat{C'A'D}) = 90°$. Prin urmare, $C'A'$ este perpendiculară pe planul $BA'D$. Notînd prin O centrul pătratului, avem $\|AO\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și deci $\|A'O\| = a$; aria triunghiului $BA'D$ este $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ și, prin urmare, volumul tetraedrului $C'A'BD$ este $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **13.29.** Este o problemă de calcul. **13.30.** Presupunînd $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$, cum $m(\hat{B}) \to = 60°$ în mod evident, rezultă $\sin A \sin C = \frac{1}{4}$, $\cos(A + C) = -\frac{1}{2}$, $\cos A \cos C = -\frac{1}{4}$, $\cos(C - A) = 0$, $m(\hat{C} - \hat{A}) = 90°$, $m(\hat{A}) = 15°$, $m(\hat{C}) = 105°$. **13.31.** Patrulaterul (convex) $AMDB$ este inscriptibil dacă și numai dacă BM este perpendiculară pe AC. Avem $\|AB\| = \|AC\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ și cum $\|AC\| \cdot \|BM\| = \|BC\| \cdot \|AD\|$ deducem $\|BM\| = \frac{2a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ și apoi $\|AM\| = \frac{b^2 - a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}$. **13.32.** În mod esențial rezolvarea problemei se bazează pe teorema: raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (care poate fi exprimat ca raport a oricăror dimensiuni omoloage: laturi, înălțimi etc.) Notînd h, h_1 lungimile înălțimilor din A ale triunghiurilor ABC și ADE rezultă $h_1 = h\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, $\|DE\| = a\sqrt{\frac{S_1}{S}}$, deci înălțimea din M a triunghiului MDE este $h - h_1 = h\left(1 - \sqrt{\frac{S_1}{S}}\right)$. Aria triunghiului MDE este $\frac{ah}{2}\sqrt{\frac{S_1}{S}}\left(1 - \sqrt{\frac{S_1}{S}}\right) = \sqrt{S_1 S} - S_1$ și prin urmare aria patrulaterului $ADME$ este $\sqrt{S_1 S}$. Soluția elegantă se bazează pe observația că triunghiurile DEB și DCM sînt echivalente. Notînd X aria triunghiului AEB, avem $\frac{X}{S - X} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}$ de

unde $X = \sqrt{S_1 S}$. **13.33.** Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ obținem $\|AA'\|^2 = \frac{a^2}{4} - c^2$ și, ținînd seama de formula lungimii medianei, obținem $a^2 = b^2 + 3c^2$. Rezultă $\cos A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = -\frac{c}{b}$ și $\cos C = \frac{2a^2 + b^2}{ab}$. **13.34.** Fie M, N, P miiloacele muchiilor $|A'B'|$, $|BB'|$, $|BC|$. Planul determinat de aceste trei puncte intersectează dreapta AB într-un punct U astfel încît avem ordinea A, B, U și $\|BU\| = \frac{a}{2}$, a fiind lungimea laturii cubului. Dreapta UP intersectează latura $|CD|$ în miilocul Q al acesteia. La fel se arată că planul MNP conține și miiloacele R, S ale muchiilor $|DD'|$ și $|A'D'|$. Este clar că laturile hexagonului $MNPQRS$ au lungimile $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, iar, de exemplu, calculînd unghiul NPQ din triunghiul NPQ, avem $\cos \widehat{NPQ} = -\frac{1}{2}$, deci $\mathrm{m}(\widehat{NPQ}) = 120°$ și analog se arată că unghiurile hexagonului au toate această măsură. **13.35.** Ecuația se scrie în forma echivalentă $\sin x(3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2) = 0$, deci e soluțiile sînt date de $\sin x = 0$ și $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$, prima cu soluția generală $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, cea de a doua echivalentă cu $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$, cu soluția generală $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\mathrm{arctg}\, 2 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. **13.36.** Notînd prin O intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$, din paralelismul dreptelor BE și AD rezultă $\frac{\|OE\|}{\|OA\|} = \frac{\|OB\|}{\|OD\|}$ (1), iar din paralelismul dreptelor AF și BC deducem $\frac{\|OF\|}{\|OB\|} = \frac{\|OA\|}{\|OC\|}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\frac{\|OE\|}{\|OF\|} = \frac{\|OC\|}{\|OD\|}$ care conform reciprocei teoremei lui Tales, implică paralelismul dreptelor EF și CD. *Comentariu:* Într-o problemă în care trebuie să probăm paralelismul a două drepte, două sînt căile frecvent de utilizat: a) evidențierea congruenței anumitor unghiuri (corespondente, alterne interne etc.), b) demonstrarea pro-

Scanned with OKEN Scanner

unde $X = \sqrt{S_1 S}$. **13.33.** Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ obținem $\|AA'\|^2 = \frac{a^2}{4} - c^2$ și, ținînd seama de formula lungimii medianei, obținem $a^2 = b^2 + 3c^2$. Rezultă $\cos A = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = -\frac{c}{b}$ și $\cos C = \frac{2a^2 + b^2}{ab}$. **13.34.** Fie M, N, P mijloacele muchiilor $|A'B'|$, $|BB'|$, $|BC|$. Planul determinat de aceste trei puncte intersectează dreapta AB într-un punct U astfel încît avem ordinea A, B, U și $\|BU\| = \frac{a}{2}$, a fiind lungimea laturii cubului. Dreapta UP intersectează latura $|CD|$ în mijlocul Q al acesteia. La fel se arată că planul MNP conține și mijloacele R, S ale muchiilor $|DD'|$ și $|A'D'|$. Este clar că laturile hexagonului $MNPQRS$ au lungimile $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, iar, de exemplu, calculînd unghiul NPQ din triunghiul NPQ, avem $\cos \widehat{NPQ} = -\frac{1}{2}$, deci $m(\widehat{NPQ}) = 120°$ și analog se arată că unghiurile hexagonului au toate această măsură. **13.35.** Ecuația se scrie în forma echivalentă $\sin x(3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2) = 0$, deci e soluțiile sînt date de $\sin x = 0$ și $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$, prima cu soluția generală $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, cea de a doua echivalentă cu $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0$, cu soluția generală $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \{\operatorname{arctg} 2 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$. **13.36.** Notînd prin O intersecția diagonalelor $|AC|$ și $|BD|$, din paralelismul dreptelor BE și AD rezultă $\frac{\|OE\|}{\|OA\|} = \frac{\|OB\|}{\|OD\|}$ (1), iar din paralelismul dreptelor AF și BC deducem $\frac{\|OF\|}{\|OB\|} = \frac{\|OA\|}{\|OC\|}$ (2). Din (1) și (2) rezultă $\frac{\|OE\|}{\|OF\|} = \frac{\|OC\|}{\|OD\|}$ care conform reciprocei teoremei lui Tales, implică paralelismul dreptelor EF și CD. *Comentariu:* Într-o problemă în care trebuie să probăm paralelismul a două drepte, două sînt căile frecvent de utilizat: a) evidențierea congruenței anumitor unghiuri (corespondente, alterne interne etc.), b) demonstrarea pro-

Scanned with OKEN Scanner

porționalității unor segmente și utilizarea reciprocei teoremei lui Tales sau asemănarea unor triunghiuri. În cazul problemei este dificil de presupus că se poate evita a doua metodă. **13.37.** Evident, putem presupune că punctul M se află pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ care nu conține pe A, $M \neq B$, $M \neq C$. *Soluția I.* În patrulaterul convex $ABMC$ are loc relația lui Ptolemeu $\|AM\| \cdot \|BC\| = \|AB\| \cdot \|MC\| + \|BM\| \cdot \|AC\|$ și cum $\|BC\| = \|AB\| = \|AC\|$ obținem $\|AM\| = \|BM\| + \|CM\|$. *Soluția a II-a.* Fie punctul $D \in |AM|$ astfel încît $\|MD\| = \|MC\|$ (se poate arăta ușor că există un astfel de punct D). Deoarece $m(\overset{\frown}{AMC}) = 60°$, rezultă că triunghiul DMC este echilateral, deci $\|DC\| = \|MC\|$. Deoarece $m(\overset{\frown}{MCD}) = 60° = m(\overset{\frown}{MCB}) + m(\overset{\frown}{BCD}) = m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{DCA}) = m(\overset{\frown}{BCA}) = 60°$, rezultă $m(\overset{\frown}{MCB}) = m(\overset{\frown}{DCA})$; astfel, triunghiurile MCB și DCA sînt congruente, deci $\|AD\| = \|MB\|$ și prin urmare, $\|AM\| = \|BM\| + \|CM\|$. *Soluția a III-a.* Să notăm $m(\overset{\frown}{BM}) = 2\alpha$; atunci $m(\overset{\frown}{MC}) = 120° - 2\alpha$, $m(\overset{\frown}{ABM}) = 120° + 2\alpha$. Dacă R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă $\|BM\| = 2R \sin \alpha$, $\|MC\| = 2R \sin(60° - \alpha)$, $\|AM\| = 2R \sin(60° + \alpha)$ și relația de demonstrat este echivalentă cu $\sin(60° + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60° - \alpha)$, care poate fi iustificată imediat, în mai multe moduri. **13.38.** Fie E în planul (q) astfel că BE este perpendiculară pe intersecția planelor. Atunci, din perpendicularitatea planelor, rezultă că BC și BE sînt perpendiculare. Prin urmare, BC este perpendiculară pe planul $(q,)$ în particular BC este perpendiculară pe BD. Apoi, deoarece AD este perpendiculară pe DB și, din cele demonstrate, pe BC, deducem că este perpendiculară pe planul DBC și deci pe DC. **13.39.** Vedeți problema 9.42. **13.40.** Înlocuind $\cos x$ prin $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$, în condiția impusă lui m, ecuația se reduce la $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0$, a cărei soluție generală este $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ și concluzia se impune. **13.41.** Patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil, deci $\overset{\frown}{AMN} \equiv \overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ANM} \equiv \overset{\frown}{ABC}$. Dacă $\|AB\| = \|AC\|$,

Scanned with OKEN Scanner

porționalității unor segmente și utilizarea reciprocei teoremei lui Tales sau asemănarea unor triunghiuri. În cazul problemei este dificil de presupus că se poate evita a doua metodă. **13.37.** Evident, putem presupune că punctul M se află pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ care nu conține pe A, $M \neq B$, $M \neq C$. *Soluția I.* În patrulaterul convex $ABMC$ are loc relația lui Ptolemeu $\|AM\| \cdot \|BC\| = \|AB\| \cdot \|MC\| + \|BM\| \cdot \|AC\|$ și cum $\|BC\| = \|AB\| = \|AC\|$ obținem $\|AM\| = \|BM\| + \|CM\|$. *Soluția a II-a.* Fie punctul $D \in |AM|$ astfel încît $\|MD\| = \|MC\|$ (se poate arăta ușor că există un astfel de punct D). Deoarece $m(\widehat{AMC}) = 60°$, rezultă că triunghiul DMC este echilateral, deci $\|DC\| = \|MC\|$. Deoarece $m(\widehat{MCD}) = 60° = m(\widehat{MCB}) + m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{BCA}) = 60°$, rezultă $m(\widehat{MCB}) = m(\widehat{DCA})$; astfel, triunghiurile MCB și DCA sînt congruente, deci $\|AD\| = \|MB\|$ și prin urmare, $\|AM\| = \|BM\| + \|CM\|$. *Soluția a III-a.* Să notăm $m(\widehat{BM}) = 2\alpha$; atunci $m(\widehat{MC}) = 120° - 2\alpha$, $m(\widehat{ABM}) = 120° + 2\alpha$. Dacă R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă $\|BM\| = 2R \sin \alpha$, $\|MC\| = 2R \sin(60° - \alpha)$, $\|AM\| = 2R \sin(60° + \alpha)$ și relația de demonstrat este echivalentă cu $\sin(60° + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60° - \alpha)$, care poate fi iustificată imediat, în mai multe moduri. **13.38.** Fie E în planul (q) astfel că BE este perpendiculară pe intersecția planelor. Atunci, din perpendicularitatea planelor, rezultă că BC și BE sînt perpendiculare. Prin urmare, BC este perpendiculară pe planul $(q,)$ în particular BC este perpendiculară pe BD. Apoi, deoarece AD este perpendiculară pe DB și, din cele demonstrate, pe BC, deducem că este perpendiculară pe planul DBC și deci pe DC. **13.39.** Vedeți problema 9.42. **13.40.** Înlocuind $\cos x$ prin $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$, în condiția impusă lui m, ecuația se reduce la $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0$, a cărei soluție generală este $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ și concluzia se impune. **13.41.** Patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil, deci $\widehat{AMN} \equiv \widehat{ACB}$, $\widehat{ANM} \equiv \widehat{ABC}$. Dacă $\|AB\| = \|AC\|$,

Scanned with OKEN Scanner

porționalității unor segmente și utilizarea reciprocei teoremei lui Tales sau asemănarea unor triunghiuri. În cazul problemei este dificil de presupus că se poate evita a doua metodă. **13.37.** Evident, putem presupune că punctul M se află pe arcul $\overset{\frown}{BC}$ care nu conține pe A, $M \neq B$, $M \neq C$. *Soluția I.* În patrulaterul convex $ABMC$ are loc relația lui Ptolemeu $\|AM\| \cdot \|BC\| = \|AB\| \cdot \|MC\| + \|BM\| \cdot \|AC\|$ și cum $\|BC\| = \|AB\| = \|AC\|$ obținem $\|AM\| = \|BM\| + \|CM\|$. *Soluția a II-a.* Fie punctul $D \in |AM|$ astfel încît $\|MD\| = \|MC\|$ (se poate arăta ușor că există un astfel de punct D). Deoarece $m(\overset{\frown}{AMC}) = 60°$, rezultă că triunghiul DMC este echilateral, deci $\|DC\| = \|MC\|$. Deoarece $m(\overset{\frown}{MCD}) = 60° = m(\overset{\frown}{MCB}) + m(\overset{\frown}{BCD}) = m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{DCA}) = m(\overset{\frown}{BCA}) = 60°$, rezultă $m(\overset{\frown}{MCB}) = m(\overset{\frown}{DCA})$; astfel, triunghiurile MCB și DCA sînt congruente, deci $\|AD\| = \|MB\|$ și prin urmare, $\|AM\| = \|BM\| + \|CM\|$. *Soluția a III-a.* Să notăm $m(\overset{\frown}{BM}) = 2\alpha$; atunci $m(\overset{\frown}{MC}) = 120° - 2\alpha$, $m(\overset{\frown}{ABM}) = 120° + 2\alpha$. Dacă R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă $\|BM\| = 2R \sin \alpha$, $\|MC\| = 2R \sin(60° - \alpha)$, $\|AM\| = 2R \sin(60° + \alpha)$ și relația de demonstrat este echivalentă cu $\sin(60° + \alpha) = \sin \alpha + \sin(60° - \alpha)$, care poate fi justificată imediat, în mai multe moduri. **13.38.** Fie E în planul (q) astfel că BE este perpendiculară pe intersecția planelor. Atunci, din perpendicularitatea planelor, rezultă că BC și BE sînt perpendiculare. Prin urmare, BC este perpendiculară pe planul $(q,)$ în particular BC este perpendiculară pe BD. Apoi, deoarece AD este perpendiculară pe DB și, din cele demonstrate, pe BC, deducem că este perpendiculară pe planul DBC și deci pe DC. **13.39.** Vedeți problema 9.42. **13.40.** Înlocuind $\cos x$ prin $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$, în condiția impusă lui m, ecuația se reduce la $\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2} = 0$, a cărei soluție generală este $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ și concluzia se impune. **13.41.** Patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil, deci $\overset{\frown}{AMN} \equiv \overset{\frown}{ACB}$, $\overset{\frown}{ANM} \equiv \overset{\frown}{ABC}$. Dacă $\|AB\| = \|AC\|$,

Scanned with OKEN Scanner

atunci MN este paralel cu BC și proprietatea rezultă din faptul că paralela prin N la AB intersectează segmentul $|BC|$ într-un punct interior. Putem, deci, presupune $\|AB\| < \|AC\|$. Fie $B' \in |AC|$ astfel încît BB' este paralelă cu MN. Rezultă $m(\widehat{BB'C}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C}) > m(\hat{C})$ și deci $\|BB'\| < \|BC\|$. Cum $\|MN\| < \|BB'\|$ rezultă $\|MN\| < \|BC\|$. **13.42.** Evident, există un singur punct M cu proprietățile din enunț. Triunghiul PQR este dreptunghic în Q și $m(\widehat{QPR}) = 60°$, $m(\widehat{QRP}) = 30°$. Triughiul ARB este echilateral de latură c, $\|PC\| = \|PB\| = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $m(\widehat{PCB}) = 30°$.

Cu acestea, avem $\|PQ\|^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ab}{2\sqrt{3}}\cos(C + 30°) =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{3} + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}}\right)$, S fiind aria triunghiului ABC, ținînd seama de teorema cosinusului și de $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.

În mod analog, $\|RQ\|^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{a^2}{3} + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}}\right)$ și prin urmare aria triunghiului PQR este $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a^2+3c^2}{3} + \frac{S}{2}$. Dar $a^2+3c^2 \geqslant$

$\geqslant 2ac\sqrt{3}$ și deci aria $[PQR] \geqslant \frac{ac}{4} + \frac{S}{2} > S$ deoarece $\frac{ac}{2} > S$.

13.43. Problema revine la a găsi trei puncte M, N, P în planul hexagonului astfel ca pentru orice punct X din interiorul hexagonului să avem $\min\{\|XM\|, \|XN\|, \|XP\|\} < 1$. Fie M mijlocul lui $|OA|$, N mijlocul lui $|OC|$ și P mijlocul lui $|OE|$. Avem $\|BM\| = \|MF\| = 1 >$

$> \frac{1}{\sqrt{3}} = \|AM\|$, deci cercul de centru M și rază 1 conține rombul $ABOF$. Analog, cercul de centru N și rază 1 conține rombul $BCDO$, iar cercul de centru P și rază 1 conține rombul $DEFO$. Rezultă că orice punct din interiorul hexagonului se află în cel puțin unul din cele trei cercuri, ceea ce demonstrează afirmația. **13.44.** Planul (ABC) intersectează sfera după un cerc, care trebuie să fie cercul înscris triunghiului ABC, avînd centrul I. Centrul sferei, Ω, se află pe perpen-

Scanned with OKEN Scanner

diculara în I pe planul (ABC), deci SI este perpendiculară pe (ABC). Fie A_1 punctul de tangență al laturii $|BC|$ cu cercul înscris. Acest punct este punctul de tangență al lui $|BC|$ cu sfera, deci el este punctul de tangență al laturii $|BC|$ la cercul înscris triunghiului SBC (intersecția sferei cu planul (SBC)). Perpendiculara în A_1 pe $|BC|$, situată în planul (SBC) este SA_1 și ea trebuie să treacă prin centrul cercului înscris în triunghiul SBC, deci triunghiul SBC este isoscel, $\|SB\| = \|SC\|$. Prin urmare $\|SA\| = \|SB\| = \|SC\|$. Atunci piciorul înălțimii din S este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cum acesta este I, centrul cercului înscris în acest triunghi, rezultă că triunghiul ABC este echilateral și concluzia se impune. Notînd prin T punctul de tangență al sferei la muchia $|SA|$ și $\|\Omega O\| = x$, din asemănarea triunghiurilor $ST\Omega$ și SOA, ținînd seama că $\|OA\| = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, se obține relația $2\sqrt{(r^2 - x^2)(k^2 - 1)} = kr + x$ de unde se obține x.

13.45. Fie a raza cercului. Este clar că P și Q sînt simetrice față de mijlocul O al diametrului $|AB|$. Notînd $\|PO\| = \|OQ\| = x$, teorema înălțimii în triunghiul ARB conduce la $x = \frac{a}{\sqrt{5}}$ deci latura pătratului are lungimea $\frac{2a}{\sqrt{5}}$, aria lui este $\frac{4a^2}{5}$. Rezultă că înălțimea triunghiului ABC este $h = \frac{4a}{5} < \frac{2a}{5}$. Există două puncte cu această proprietate, fie ele C și C', C situat pe arcul $\overset{\frown}{BR}$. Se deduce ușor $\|CB\| = \frac{2a}{\sqrt{5}}$; $\|AC\| = \frac{4a}{\sqrt{5}}$; astfel că arcele $\overset{\frown}{AC'}$, $\overset{\frown}{SR}$, $\overset{\frown}{CB}$ sînt congruente și atunci SB este bisectoarea unghiului ABC. Ea taie pe $|RQ|$ în I. Din asemănarea triunghiurilor IQB și SPB rezultă $\|IQ\| = \frac{a(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{5}}$. Pe de altă parte, raza cercului înscris în triunghiul ABC este $\frac{4a^2}{5} : \left(a + \frac{3a}{\sqrt{5}}\right) = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \|IQ\|$. Prin urmare I este

diculara în I pe planul (ABC), deci SI este perpendiculară pe (ABC). Fie A_1 punctul de tangență al laturii $|BC|$ cu cercul înscris. Acest punct este punctul de tangență al lui $|BC|$ cu sfera, deci el este punctul de tangență al laturii $|BC|$ la cercul înscris triunghiului SBC (intersecția sferei cu planul (SBC)). Perpendiculara în A_1 pe $|BC|$, situată în planul (SBC) este SA_1 și ea trebuie să treacă prin centrul cercului înscris în triunghiul SBC, deci triunghiul SBC este isoscel, $\|SB\| = \|SC\|$. Prin urmare $\|SA\| = \|SB\| = \|SC\|$. Atunci piciorul înălțimii din S este centrul cercului circumscris triunghiului ABC și cum acesta este I, centrul cercului înscris în acest triunghi, rezultă că triunghiul ABC este echilateral și concluzia se impune. Notînd prin T punctul de tangență al sferei la muchia $|SA|$ și $\|\Omega O\| = x$, din asemănarea triunghiurilor $ST\Omega$ și SOA, ținînd seama că $\|OA\| = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, se obține relația $2\sqrt{(r^2 - x^2)(k^2 - 1)} = kr + x$ de unde se obține x.

13.45. Fie a raza cercului. Este clar că P și Q sînt simetrice față de mijlocul O al diametrului $|AB|$. Notînd $\|PO\| = \|OQ\| = x$, teorema înălțimii în triunghiul ARB conduce la $x = \frac{a}{\sqrt{5}}$ deci latura pătratului are lungimea $\frac{2a}{\sqrt{5}}$, aria lui este $\frac{4a^2}{5}$. Rezultă că înălțimea triunghiului ABC este $h = \frac{4a}{5} < \frac{2a}{5}$. Există două puncte cu această proprietate, fie ele C și C', C situat pe arcul $\overset{\frown}{BR}$. Se deduce ușor $\|CB\| = \frac{2a}{\sqrt{5}}$; $\|AC\| = \frac{4a}{\sqrt{5}}$; astfel că arcele $\overset{\frown}{AC'}$, $\overset{\frown}{SR}$, $\overset{\frown}{CB}$ sînt congruente și atunci SB este bisectoarea unghiului ABC. Ea taie pe $|RQ|$ în I. Din asemănarea triunghiurilor IQB și SPB rezultă $\|IQ\| = \frac{a(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{5}}$. Pe de altă parte, raza cercului înscris în triunghiul ABC este $\frac{4a^2}{5} : \left(a + \frac{3a}{\sqrt{5}}\right) = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \|IQ\|$. Prin urmare I este

centrul cercului înscris în triunghiul ABC. **13.46.** Evident, drumul cel mai scurt pe suprafața trunchiului, care unește pe A cu C', este format din segmente de dreaptă situate pe fețele trunchiului astfel încît desfășurarea lor într-un plan să determine un segment de dreaptă. Din simetria trunchiului față de planul $ACC'A'$ este suficient să ne referim la drumuri realizate pe: a) fețele $ABB'A'$ și $A'B'C'D'$; b) fețele $ABCD$ și $DCC'D'$; c) fețele $ABB'A'$ și $BCC'B'$. Se observă (vedeți figurile 13.46.) că dintre situațiile a), b)

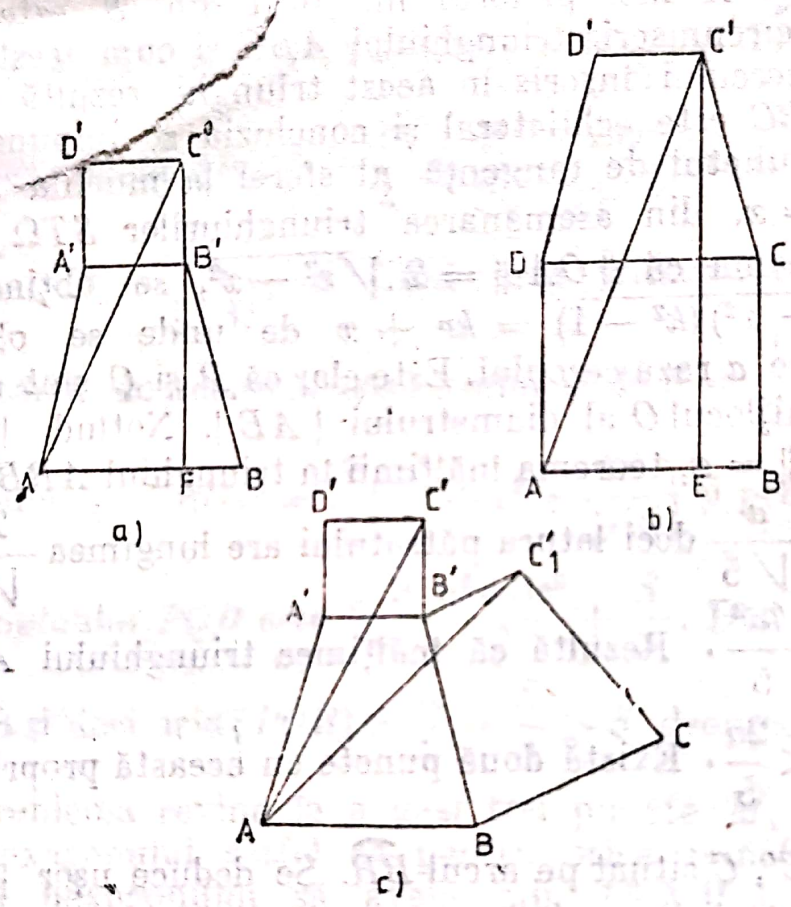


Fig. 13.46.

drumul minim este realizat în situația a). Analizăm fig. c). Ipoteza asupra razelor arată că $m(\widehat{AB'B}) < 45°$. Deducem: $m(\widehat{AB'C'}) = 90° + m(\widehat{AB'A'}) > m(\widehat{AB'B}) + m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{CB'C'_1}) = m(\widehat{AB'C'_1})$. Rezultă $\| AC'_1 \| < \| AC' \|$ ceea ce arată că drumul de lungime minimă se realizează pe două fețe laterale consecutive, fără a intersecta bazele decît în A și C'. **13.47.** Fie P, Q, R, S mijloacele segmentelor $|LM|$, $|MN|$, $|NK|$, $|KL|$. Este

clar că patrulaterul $PQRS$ este un pătrat avînd centrul O și laturile paralele cu ale pătratului $ABCD$ și $\|OP\| = \frac{\|OL\|}{\sqrt{2}} = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Deoarece întreaga configurație are ca axe de simetrie dreptele AC, BD, LN și MK este suficient să arătăm că, notînd cu E mijlocul segmentului $|AK|$, au loc $\|OE\| = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ și $m(\widehat{EOP}) = 30°$. Este clar că E este intersecția dreptelor LB și AK, evident perpendiculare; patrulaterul $AEOB$ este inscriptibil și atunci $m(\widehat{EOP}) = 30°$. În triunghiul AOE, aplicînd teorema sinusurilor deducem $\|EO\| = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. **13.48.** Fie I al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor $BC'H$ și $CB'H$. Atunci $m(\widehat{B'IC'}) = 180° - m(\widehat{B'AC'})$, deci patrulaterul $AB'IC'$ este inscriptibil, ceea ce probează prima parte a enunțului. Apoi, triunghiurile $BC'H$ și $CB'H$ sînt isoscele, fapt ce arată că $B'C'$ este tangentă acestor cercuri în punctele C' și, respectiv B'. Dreapta HI este axa radicală a cercurilor respective și prin urmare ea intersectează segmentul $|B'C'|$ în mijlocul acestuia. **13.49.** Notînd $\|BT_a\| = x$ și $\|CT_a\| = y$ avem $b + y = c + x$, $x + y = a$ și deducem $\|BT_a\| = p - c$, $\|CT_a\| = p - b$ și analog $\|CT_b\| = p - c$, $\|AT_b\| = p - a$, $\|AT_c\| = p - a$, $\|BT_c\| = p - b$. Cu acestea se verifică relația $\|AT_c\|^2 - \|BT_c\|^2 + \|BT_a\|^2 - \|CT_a\|^2 + \|CT_b\|^2 - \|AT_b\|^2 = 0$, ceea ce arată că dreptele O_aT_a, O_bT_b, O_cT_c sînt concurente (conform 3.17). Dreapta O_aO_b este bisectoare a unghiurilor exterioare unghiului C al triunghiului ABC, deci IC este perpendiculară pe O_aO_b. În particular obținem $\widehat{PO_aO_b} \equiv \widehat{PO_bO_a}$ și deci $\|PO_a\| = \|PO_b\|$. Analog, $\|PO_b\| = \|PO_c\|$ și deci $\|PO_a\| = \|PO_b\| = \|PO_c\|$. Scriind teorema sinusurilor în triunghiul BO_aC, observînd că $m(\widehat{BO_aC}) = 90° + m\left(\frac{A}{2}\right)$, deducem $\|CO_a\| = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ iar din triunghiul CO_bA

clar că patrulaterul $PQRS$ este un pătrat avînd centrul O și laturile paralele cu ale pătratului $ABCD$ și $\|OP\| = \frac{\|OL\|}{\sqrt{2}} = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Deoarece întreaga configurație are ca axe de simetrie dreptele AC, BD, LN și MK este suficient să arătăm că, notînd cu E mijlocul segmentului $|AK|$, au loc $\|OE\| = \frac{l}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ și $m(\widehat{EOP}) = 30°$. Este clar că E este intersecția dreptelor LB și AK, evident perpendiculare; patrulaterul $AEOB$ este inscriptibil și atunci $m(\widehat{EOP}) = 30°$. În triunghiul AOE, aplicînd teorema sinusurilor deducem $\|EO\| = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. **13.48.** Fie I al doilea punct de intersecție a cercurilor circumscrise triunghiurilor $BC'H$ și $CB'H$. Atunci $m(\widehat{B'IC'}) = 180° - m(\widehat{B'AC'})$, deci patrulaterul $AB'IC'$ este inscriptibil, ceea ce probează prima parte a enunțului. Apoi, triunghiurile $BC'H$ și $CB'H$ sînt isoscele, fapt ce arată că $B'C'$ este tangentă acestor cercuri în punctele C' și, respectiv B'. Dreapta HI este axa radicală a cercurilor respective și prin urmare ea intersectează segmentul $|B'C'|$ în mijlocul acestuia. **13.49.** Notînd $\|BT_a\| = x$ și $\|CT_a\| = y$ avem $b + y = c + x$, $x + y = a$ și deducem $\|BT_a\| = p - c$, $\|CT_a\| = p - b$ și analog $\|CT_b\| = p - c$, $\|AT_b\| = p - a$, $\|AT_c\| = p - a$, $\|BT_c\| = p - b$. Cu acestea se verifică relația $\|AT_c\|^2 - \|BT_c\|^2 + \|BT_a\|^2 - \|CT_a\|^2 + \|CT_b\|^2 - \|AT_b\|^2 = 0$, ceea ce arată că dreptele O_aT_a, O_bT_b, O_cT_c sînt concurente (conform 3.17). Dreapta O_aO_b este bisectoare a unghiurilor exterioare unghiului C al triunghiului ABC, deci IC este perpendiculară pe O_aO_b. În particular obținem $P\widehat{O_aO_b} \equiv P\widehat{O_bO_a}$ și deci $\|PO_a\| = \|PO_b\|$. Analog, $\|PO_b\| = \|PO_c\|$ și deci $\|PO_a\| = \|PO_b\| = \|PO_c\|$. Scriind teorema sinusurilor în triunghiul BO_aC, observînd că $m(\widehat{BO_aC}) = 90° + m\left(\frac{A}{2}\right)$, deducem $\|CO_a\| = 4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ iar din triunghiul CO_bA

Scanned with OKEN Scanner

rezultă $\| CO_b \| = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$, astfel că $\| CO_a \| + \| CO_b \| = 4R \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = 4R \cos \frac{C}{2}$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul $O_a P O_b$ conduce la $\| PO_a \| = 2R$. Dacă notăm prin I_a proiecția punctului I pe BC, atunci $\| BI_a \| = \| T_a C \|$ și, prin urmare, mediatoarea segmentului $| I_a T_a |$ este și mediatoarea segmentului $| BC |$. Rezultă că mediatoarea segmentului $| BC |$ trece prin mijlocul segmentului $| IP |$. În mod analog, mediatoarele segmentelor $| AB |$ și $| CA |$ trec prin mijlocul segmentului $| IP |$ și deci O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, este mijlocul segmentului $| IP |$. **13.50.** Dacă un cerc Γ se află pe o sferă S atunci centrul sferei se află pe perpendiculara în centrul cercului Γ pe planul acestuia. De aici rezultă că, dacă centrele celor trei sfere date în enunț sînt coliniare, nu există nici o sferă care să le taie pe toate după cercuri mari. Fie deci O_1, O_2, O_3 centrele sferelor, necoliniare; dacă O este centrul unei sfere care intersectează sferele date după cercurile mari Γ_1, Γ_2, Γ_3, obținem $\| OO_1 \|^2 - \| OO_2 \|^2 = R_2^2 - R_1^2$, $\| OO_2 \|^2 - \| OO_3 \|^2 = R_3^2 - R_2^2$. Prima relație arată că punctul O se află într-un plan perpendicular pe dreapta O_1O_2, iar cea de a doua arată că O se află într-un plan perpendicular pe O_2O_3. Cele două plane se intersectează după o dreaptă, evident perpendiculară pe planul triunghiului $O_1O_2O_3$. Observăm că relațiile de mai sus implică $\| OO_3 \|^2 - \| OO_1 \|^2 = R_1^2 - R_3^2$ ceea ce arată că cele trei plane corespunzătoare ca mai sus celor trei perechi de sfere au o dreaptă comună, d. Rămîne de arătat că dacă $O \in (d)$, atunci există o sferă cu centrul în O și cu proprietatea din enunț. Este suficient să luăm raza acestei sfere $R = \sqrt{\| OO_1 \|^2 + R_1^2}$ (!). **13.51.** Este cunoscut faptul că dacă A', B', C' sînt picioarele înălțimilor triunghiului ABC, atunci triunghiul $AB'C'$ este asemenea cu ABC și au raportul de asemănare cos A. Așadar triunghiurile OPQ și $OP'Q'$ (vedeți fig. 13.51) sînt asemenea și au raportul de asemănare cos α. Cum M este ortocentrul triunghiului $OP'Q'$ rezultă că $\| OH \| = \| OM \| \cos \alpha$. Să observăm în plus că dreptele OH și OM sînt izogonale față de AOB, deoarece $\widehat{POH} \equiv \widehat{P'OM}$. Fie $G \in |OM$ astfel încît $| OG | \equiv | OH |$. Rezultă $\| OG \| = \| OM \| \cos \alpha$. Astfel, dacă M descrie o mulțime de puncte $\mathcal{M}$, atunci G descrie

rezultă $\| CO_b \| = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$, astfel că $\| CO_a \| + \| CO_b \| = 4R \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = 4R \cos \frac{C}{2}$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul $O_a P O_b$ conduce la $\| PO_a \| = 2R$. Dacă notăm prin I_a proiecția punctului I pe BC, atunci $\| BI_a \| = \| T_a C \|$ și, prin urmare, mediatoarea segmentului $| I_a T_a |$ este și mediatoarea segmentului $| BC |$. Rezultă că mediatoarea segmentului $| BC |$ trece prin mijlocul segmentului $| IP |$. În mod analog, mediatoarele segmentelor $| AB |$ și $| CA |$ trec prin mijlocul segmentului $| IP |$ și deci O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC, este mijlocul segmentului $| IP |$. **13.50.** Dacă un cerc Γ se află pe o sferă S atunci centrul sferei se află pe perpendiculara în centrul cercului Γ pe planul acestuia. De aici rezultă că, dacă centrele celor trei sfere date în enunț sînt coliniare, nu există nici o sferă care să le taie pe toate după cercuri mari. Fie deci O_1, O_2, O_3 centrele sferelor, necoliniare; dacă O este centrul unei sfere care intersectează sferele date după cercurile mari Γ_1, Γ_2, Γ_3, obținem $\| OO_1 \|^2 - \| OO_2 \|^2 = R_2^2 - R_1^2$, $\| OO_2 \|^2 - \| OO_3 \|^2 = R_3^2 - R_2^2$. Prima relație arată că punctul O se află într-un plan perpendicular pe dreapta O_1O_2, iar cea de a doua arată că O se află într-un plan perpendicular pe O_2O_3. Cele două plane se intersectează după o dreaptă, evident perpendiculară pe planul triunghiului $O_1O_2O_3$. Observăm că relațiile de mai sus implică $\| OO_3 \|^2 - \| OO_1 \|^2 = R_1^2 - R_3^2$ ceea ce arată că cele trei plane corespunzătoare ca mai sus celor trei perechi de sfere au o dreaptă comună, d. Rămîne de arătat că dacă $O \in (d)$, atunci există o sferă cu centrul în O și cu proprietatea din enunț. Este suficient să luăm raza acestei sfere $R = \sqrt{\| OO_1 \|^2 + R_1^2}$ (!). **13.51.** Este cunoscut faptul că dacă A', B', C' sînt picioarele înălțimilor triunghiului ABC, atunci triunghiul $AB'C'$ este asemenea cu ABC și au raportul de asemănare $\cos A$. Așadar triunghiurile OPQ și $OP'Q'$ (vedeți fig. 13.51) sînt asemenea și au raportul de asemănare $\cos \alpha$. Cum M este ortocentrul triunghiului $OP'Q'$ rezultă că $\| OH \| = \| OM \| \cos \alpha$. Să observăm în plus că dreptele OH și OM sînt izogonale față de AOB, deoarece $\widehat{POH} \equiv \widehat{P'OM}$. Fie $G \in |OM$ astfel încît $| OG | \equiv | OH |$. Rezultă $\| OG \| = \| OM \| \cos \alpha$. Astfel, dacă M descrie o mulțime de puncte $\mathcal{M}$, atunci G descrie

Scanned with OKEN Scanner

omotetica acestei mulțimi în omotetia de centru O și raport $\cos \alpha$ și atunci H descrie simetrica față de bisectoarea unghiului dat a mulțimii descrise de G. În particular, dacă M descrie segmentul $|AB|$ atunci G descrie un segment paralel cu acesta și deci H descrie un segment. Observînd că dacă M coincide cu A atunci H este proiecția A' a lui A pe OB, iar cînd M coincide cu B, H coincide cu proiecția B' a lui B pe OA, rezultă că H descrie segmentul $|A'B'|$. Cînd M descrie interiorul triunghiului OAB, din cele de mai sus

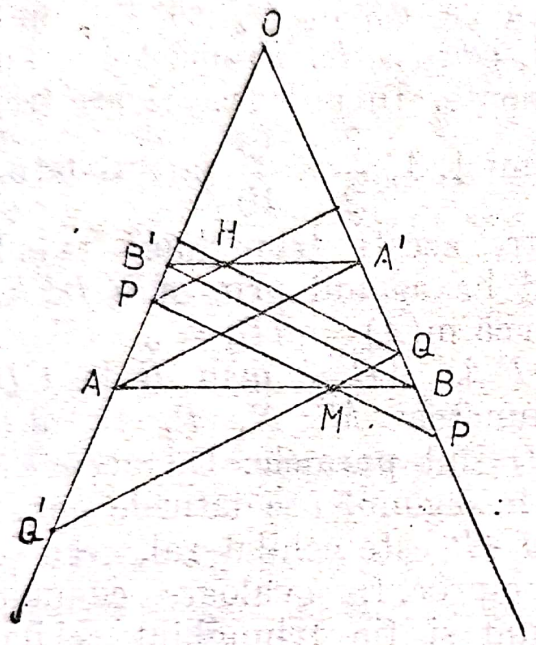


Fig. 13.51

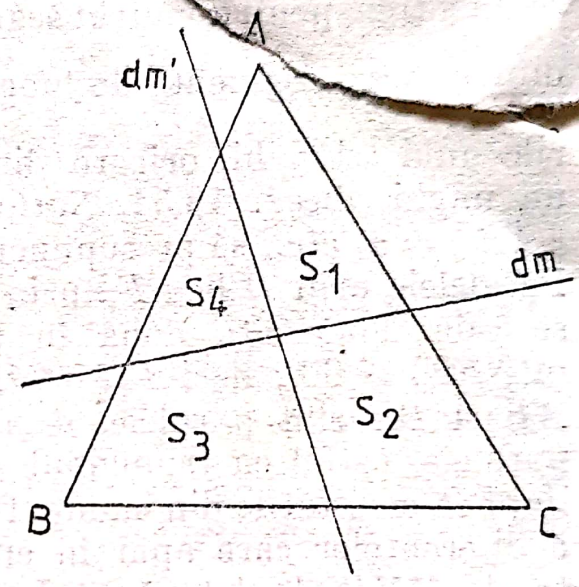


Fig. 13.52

rezultă că H descrie interiorul triunghiului $OA'B'$. **13.52.** Fie o direcție fixată m și (d) o dreaptă variabilă de direcție m. Atîta vreme cît dreapta taie triunghiul, raportul ariilor poligoanelor în care este împărțit triunghiul este variabil cu valori între 0 și ∞. Deoarece acesta variază continuu, rezultă că există o poziție a dreptei de direcție m astfel încît acest raport să fie 1. Considerînd direcția perpendiculară pe m, $m' = -\frac{1}{m}$, există o dreaptă de direcție m' care împarte triunghiul în două părți echivalente. Cele două drepte d_m și $d_{m'}$, împart triunghiul în patru părți de arii S_1, S_2, S_3, S_4 (vedeți fig. 13.52) astfel încît $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ și $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Dacă am avea $S_1 = S_2$ atunci ar rezulta $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Arătăm că există m astfel încît să avem $S_1(m) = S_2(m)$. În adevăr, fie $S(m) = S_1(m) - S_2(m)$ — evident

omotetica acestei mulțimi în omotetia de centru O și raport $\cos\alpha$ și atunci H descrie simetrica față de bisectoarea unghiului dat a mulțimii descrise de G. În particular, dacă M descrie segmentul $|AB|$ atunci G descrie un segment paralel cu acesta și deci H descrie un segment. Observînd că dacă M coincide cu A atunci H este proiecția A' a lui A pe OB, iar cînd M coincide cu B, H coincide cu proiecția B' a lui B pe OA, rezultă că H descrie segmentul $|A'B'|$. Cînd M descrie interiorul triunghiului OAB, din cele de mai sus

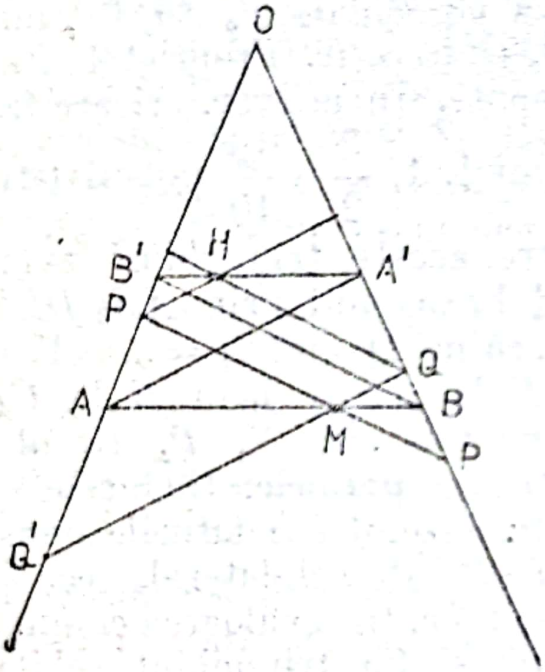


Fig. 13.51

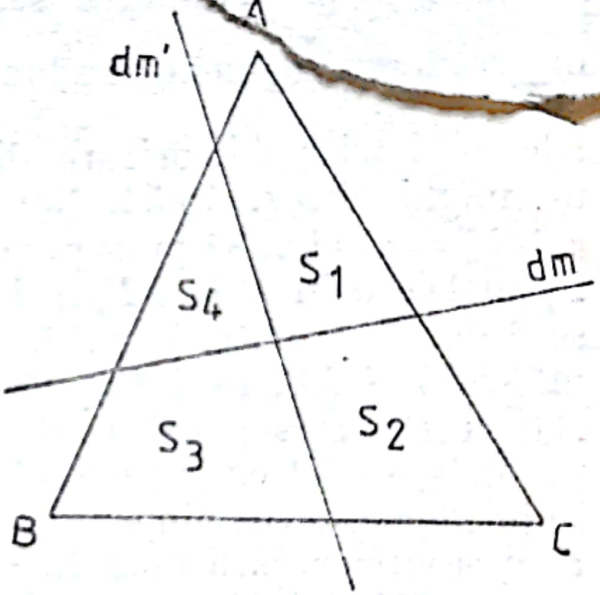


Fig. 13.52

rezultă că H descrie interiorul triunghiului $OA'B'$. **13.52.** Fie o direcție fixată m și (d) o dreaptă variabilă de direcție m. Atîta vreme cît dreapta taie triunghiul, raportul ariilor poligoanelor în care este împărțit triunghiul este variabil cu valori între 0 și ∞. Deoarece acesta variază continuu, rezultă că există o poziție a dreptei de direcție m astfel încît acest raport să fie 1. Considerînd direcția perpendiculară pe m, $m' = -\frac{1}{m}$, există o dreaptă de direcție m' care împarte triunghiul în două părți echivalente. Cele două drepte d_m și $d_{m'}$, împart triunghiul în patru părți de arii S_1, S_2, S_3, S_4 (vedeți fig. 13.52) astfel încît $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ și $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$. Dacă am avea $S_1 = S_2$ atunci ar rezulta $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Arătăm că există m astfel încît să avem $S_1(m) = S_2(m)$. În adevăr, fie $S(m) = S_1(m) - S_2(m)$ — evident

Scanned with OKEN Scanner

funcție continuă de m. Observînd că $S\left(-\frac{1}{m}\right) = -S(m)$ deducem că S are și valori pozitive și valori negative, deci există m pentru care $S(m) = 0$. **13.53.** Fie d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 lungimile celor cinci segmente în ordine crescătoare. Presupunînd, prin absurd, că oricare triunghi format cu trei din cele cinci segmente ca laturi nu este ascuțitunghic, avem: $d_5^2 \geqslant d_4^2 + d_3^2$, $d_4^2 \geqslant d_3^2 + d_2^2$, $d_3^2 \geqslant d_2^2 + d_1^2$ de unde obținem $d_5^2 \geqslant 2d_1^2 + 3d_2^2 = 2(d_1^2 + d_2^2) + d_2^2 \geqslant (d_1+d_2)^2 + d_2^2 > (d_1+d_2)^2$, ceea ce contrazice posibilitatea ca d_1, d_2, d_5 să fie lungimile laturilor unui triunghi. *Observație.* Proprietatea nu se menține pentru patru segmente. În adevăr, oricare trei dintre patru segmente de lungimi 1, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{19}{10}$ pot fi laturile unui triunghi, oricare dintre aceste triunghiuri avînd un unghi obtuz. **13.54.** Notînd hexagonul prin $ABCDEF$, $\|AB\| = a_1$ etc., să presupunem că $m(A) = m(B) = \ldots = 120°$. Paralelele prin D la EF, prin F la AB și prin B la CD se taie două cîte două în punctele M, N, P. Rezultă $m(NFE) = 60°$, deci FN și ED sînt paralele. Deducem că AB și DE sînt paralele, deci hexagonul are laturile opuse paralele, astfel că triunghiul MNP este echilateral, ceea ce implică egalitățile din enunț. Reciproc, fie a valoarea comună a diferențelor care apar în enunț și fie triunghiul echilateral MNP de latură a. Luînd B pe semidreapta $|MP$ astfel încît $\|MB\| = a_1$, F pe dreapta PN astfel încît $\|NF\| = a_2$, D pe semidreapta $|NM$ încît $\|ND\| = a_3$, paralelele prin B la MP și prin F la MN se taie în A, paralelele prin B la NP și prin D la MN se taie în C, paralelele prin D la MP și prin F la NP se taie în E. Hexagonul $ABCDEF$ satisface condițiile. **13.55.** Inegalitățile următoare sînt evidente: $4 \geqslant \|AE\|^2 = \|AC\|^2 + \|CE\|^2 - 2 \cdot \|AC\| \cdot \|CE\| \cdot \cos \widehat{ACE} \geqslant \|AC\|^2 + \|CE\|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos ABC + c^2 + d^2 - 2cd \cos \widehat{CDE}$ și demonstrarea inegalității din enunț revine la a arăta că $abc + bcd < -2ab \cos \widehat{ABC} - 2cd \cos \widehat{CDE}$, pentru care este suficient (din simetria configurației) să arătăm inegalitatea $c < -2 \cos \widehat{ABC}$. Dar $m(\widehat{ABC}) > 90° + \frac{1}{2} m(\widehat{CD})$, de unde

$\cos \widehat{ABC} < \cos\left(90° + \frac{1}{2}\, m(\widehat{CD})\right) = -\sin \frac{1}{2}\, m(\widehat{CD})$ și deci $-2 \cos \widehat{ABC} > 2 \sin \frac{1}{2}\, m(\widehat{CD}) = c$. **13.56,** Fie $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ hexagonul regulat de latură 1. Evident $\| P_1P_3 \| = \| P_3P_5 \| = \| P_5P_1 \| = \sqrt{3}$. Astfel, dacă A, B, C sînt vîrfuri P_i, P_{i+2}, P_{i+4} ale hexagonului, atunci inegalitatea devine egalitate. Vom arăta că egalitatea are loc numai în acest caz. Fie A, B, C trei puncte într-un cerc de rază 1 și centru O. Considerăm sectoarele interior disjuncte S_1, S_2, S_3 avînd unghiurile la centru de 120°, astfel că raza de direcție OA separă sectoarele S_1 și S_2. Este clar că cel puțin două din punctele A, B, C se află într-unul din sectoarele închise S_1, S_2, S_3. Dar un asemenea sector se poate înscrie într-un cerc de rază $\frac{\sqrt{3}}{2}$, deci orice două puncte din el au distanța între ele cel mult $\sqrt{3}$. **13.57.** Unghiurile $\widehat{BA'C}$, $\widehat{CB'A}$ și $\widehat{AC'B}$ au măsura 120°. Presupunînd că toate unghiurile triunghiului ABC au măsuri strict mai mici de 120°, observăm că, de exemplu arcul $\widehat{BC}$ din cercul de centru A' care nu se află de aceeași parte cu A' față de BC are proprietatea că pentru orice punct Q al său $m(\widehat{BQC}) = 120°$. Astfel, cercurile de centre A' și B' se intersectează, în afară de C, într-un punct Q, interior triunghiului și încît $m(\widehat{BQC}) = m(\widehat{AQC}) = 120°$. Rezultă că $m(\widehat{BQA}) = 120°$, deci cercul cu centrul C' și care trece prin A și B trece prin Q. Dacă, de exemplu $m(\widehat{ACB}) = 120°$, atunci cercurile cu centrele în A' și B' sînt tangente în C, punct prin care trece și cercul de centru C' și rază $\| C'A \|$. Presupunînd $m(\widehat{ACB}) = 120°$, cercurile de centre B' și C' se taie într-un punct Q, exterior triunghiului ABC, astfel încît $m(\widehat{AQC}) = m(\widehat{CQB}) = 60°$, deci $m(\widehat{AQB}) = 120°$, ceea ce arată că cercul de centru C' și rază $\| C'A \|$ trece prin Q. b) Un punct este un „punct Q“ pentru un triunghi ABC dacă și numai dacă sau toate laturile triunghiului sînt privite din Q sub unghiuri la 120° (în cazul

că triunghiul ABC nu are unghiuri mai mari de 120°) sau una din laturi este văzută sub un unghi de 120° și celelalte două sub unghiuri de 60°. Rezultă că un astfel de punct pentru un triunghi înscris într-un cerc de rază r se află cu necesitate în cercul concentric cu acesta și de rază $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ (cercul din ale cărui puncte se duc tangente la cercul dat formînd între ele un unghi de 120°). Ținînd seama de cele spuse la a), nu este greu de văzut că orice punct interior acestui cerc sau de pe acesta este un „punct Q" pentru un triunghi înscris în cercul de rază r;. **13.58.** Este clar că pe una din cele n laturi ale poligonului regulat se găsesc două vîrfuri ale poligonului cu $n+1$ laturi, fie aceasta $|A_1A_2|$ și pe ea vîrfurile B_1, B_2 ale poligonului cu $n+1$ laturi. Notînd $\|A_1B_1\| = x$, rezultă $\|B_2A_2\| = \frac{l}{n+1} - x$, $\|A_2B_3\| = \frac{(n-1)l}{n+1} + x$, $\|B_3A_3\| = \frac{2l}{n+1} - x$, $\|B_nA_n\| = \frac{(n-1)l}{n+1} - x$, $\|A_nB_{n+1}\| = \frac{l}{n+1} + x$, $\|B_{n+1}A_1\| = \frac{nl}{n+1} - x$. Suma ariilor „colțurilor" $B_2A_2B_3$, $B_3A_3B_4$, ... $B_{n+1}A_1B_1$ este $\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{nl}{n+1} - x\right)\left(\frac{(n-k)l}{n+1} + x\right)$, α fiind unghiul poligonului cu n laturi. Efectuînd calculele, suma se scrie $\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\left[-nx^2 + \frac{nl}{n+1}x + \frac{n(n^2-1)l^2}{6(n+1)}\right]$. Este clar că $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{n+1}$. Suma este minimă pentru $x = 0$ $\left(\text{sau } x = \frac{l}{n+1}, \text{ ceea ce geometric este același lucru}\right)$, în care caz poligonul $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ are arie maximă. Pentru $x = \frac{l}{2(n+1)}$ poligonul $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$ are arie minimă. **13.59.** Notînd $m(\widehat{BC}) = 2\alpha$, $m(\widehat{DE}) = 2\beta$, $m(\widehat{FA}) = 2\gamma$, M, N, P mijloacele segmentelor $|BC|$, $|DE|$, $|FA|$ rezultă $\|MN\|^2 = r^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta+60°)]$

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seama că $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, avem $\| MN \|^2 = r^2[\cos\alpha + \cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma]$. Este suficient să dovedim egalitatea $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma = \cos^2\beta + \cos^2\gamma - \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha$ echivalentă cu $\cos^2\alpha - \cos^2\gamma = \cos\beta[\cos\alpha\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha]$ care se transformă succesiv în $(\cos\alpha - \cos\gamma)(\cos\gamma + \cos\alpha) = \cos\beta\sin(\gamma - \alpha)$, $\sin(\gamma - \alpha)\sin(\alpha + \gamma) = \cos\beta\sin(\gamma - \alpha)$, care este adevărată deoarece $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. **13.60.** a) Fie α și β submulțimi disjuncte ale mulțimii $\{A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1\}$ a căror reuniune să fie întreaga mulțime și care să satisfacă condiția din enunț. Dacă $A \in \alpha$, atunci B, D, A_1 sînt în β, deci C, B_1, D_1 sînt necesar în α și C_1 în β. Mulțimile $\alpha = \{A, C, B_1, D_1\}$, $\beta = \{B, D, A_1, C_1\}$ satisfac condițiile. b) Muchiile celor două tetraedre sînt congruente, deci cele două tetraedre sînt regulate și congruente între ele. c) Centrul de greutate al unui tetraedru este mijlocul oricărui segment care unește mijloacele a două muchii opuse. În tetraedrul BDA_1C_1 două muchii opuse sînt $|BD|$ și $|A_1C_1|$ și, evident, segmentul ce le unește mijloacele are mijlocul în centrul cubului. d) Dacă a este lungimea laturii cubului atunci latura tetraedrelor are lungimea $a\sqrt{2}$, iar înălțimea este $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ și volumul tetraedrului este $\frac{a^3}{2}$, aria totală este de 4 ori aria unei fețe, $\frac{6a^2}{\sqrt{3}}$. **13.61.** a) Evident, AC și AA' sînt perpendiculare pe MN, deci MN este perpendiculară pe planul dreptelor AC și AA', care conține pe $A'C$. b) Fie P mijlocul segmentului $|MN|$ și în planul ACA', O piciorul perpendicularei din P pe $|A'C|$. Este clar că planul (MNO) este perpendicular pe $A'C$. Din asemănarea triunghiurilor COP și CAA' se obține $\| CO \| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, adică O este mijlocul diagonalei $|A'C|$, deci centrul cubului. Altfel, notînd O centrul cubului și observînd că $\| A'P \| = 3\frac{a\sqrt{2}}{4} = \| CP \|$, rezultă că triunghiul $A'AC$ este isoscel, deci $|PO|$ este perpendiculară pe $A'C$. c) Planul (π) intersectează secțiunea diagonală $ACC'A'$ după dreapta PO, care înțeapă fața $A'B'C'D'$ în punctul $P' \in |A'C'|$ astfel

că $\| C'P' \| = \| AP \| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Fața $A'B'C'D'$ va fi tăiată de planul (π) după un segment ce trece prin P' și este paralel cu $| MN |$, fie el $| M'N' |$, $M' \in | B'C' |$, $N' \in | C'D' |$. Fie $R = MN \cap BC$ și $S = MN \cap CD$. Dreapta $M'R$ intersectează segmentul $| BB' |$ în Q, iar dreapta $N'S$ intersectează segmentul $| DD' |$ în T, puncte situate în planul (π), secțiunea realizată în cub de planul (π) este hexagonul $MNTN'M'Q$, care este un hexagon regulat având aria $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. d) Distanțele vîrfurilor A, B, D, C', B', D' la planul (π) sînt egale, iar distanțele de la A' și C sînt triplul acestora. Deoarece $A'C$ este perpendiculară pe planul (π), rezultă că aceste distanțe sînt $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ și respectiv $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

13.62. a) Fie P pe diagonala $| BD |$ astfel ca $\| BP \| = \| AM \|$. Atunci MP este paralelă cu CD și NP este paralelă cu DF, deci planul (MPN) este paralel cu planul $(CDEF)$, de unde rezultă că MN este paralelă cu planul $(CDEF)$. b) Fie R mijlocul lui $| AB |$ și S mijlocul lui $| SC |$. Triunghiurile AMR și BNR sînt congruente, deci $\| MR \| = \| NR \|$; triunghiurile CMS și FNS sînt congruente, deci $\| MS \| = \| SN \|$. Din acestea deducem că SR este mediatoarea segmentului $| MN |$. Pentru $M \equiv A$ avem $N \equiv B$ și mijlocul lui $| MN |$ este R, iar pentru $M \equiv C$ avem $N \equiv F$ și mijlocul lui $| MN |$ este S. Din continuitate rezultă că locul geometric al mijlocului segmentului $| MN |$ este segmentul închis $[SR]$. c) În general, pentru două drepte în spațiu (oarecare) (d_1) și (d_2), pentru $M_1 \in (d_1)$ și $M_2 \in (d_2)$, segmentul $| M_1M_2 |$ are cea mai mică lungime dacă M_1M_2 este perpendiculara comună (!). Pentru partea a doua, este suficient să observăm că AC este perpendiculară pe DE, analog FB este perpendiculară pe DE, deci DE este paralelă cu perpendiculara comună dreptelor AC și BF. **13.63.** Fie $ABB'A'$ pătratul înscris în cilindru, A, B pe circumferința inferioară, M' mijlocul laturii $| A'B' |$, M mijlocul laturii $| AB |$, N proiecția punctului M' pe baza inferioară, O centrul acestei baze. Notînd lungimea laturii pătratului prin a, avem $\| MM' \| = a$, $\| M'N \| = h$, $\| OM \| = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}$ și prin

urmare $a^2 = h^2 + 4\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)$ de unde $a = \sqrt{\frac{4r^2 + h^2}{2}}$.

13.64. a) Fie H proiecția punctului S pe planul triunghiului ABC și A', B', C' proiecțiile punctului H pe BC, CA, AB. Atunci $\| HA' \| = \| SH \| \operatorname{ctg} \alpha$, $\| HB' \| = \| SH \| \operatorname{ctg} \beta$, $\| HC' \| = \| SH \| \operatorname{ctg} \gamma$ și înlocuind în relația evidentă aria$[AHB]$ + aria$[BHC]$ + aria$[CHA]$ = aria$[ABC]$ obținem $\| SH \| = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ac \operatorname{tg} \alpha + bc \operatorname{tg} \beta + cc \operatorname{tg} \gamma}$. b) Cu expresia anterioară a lui $\| SH \|$, obținem: vol$(SABCD)$ = $= \frac{2p(p-a)(p-b)(p-c)}{3[ac \operatorname{tg}\alpha + bc \operatorname{tg} \beta + cc \operatorname{tg}\gamma]}$. c) Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci din faptul că BC este perpendiculară pe AH și SH deducem că BC este perpendiculară pe SA; analog, CA este perpendiculară pe SB, iar AB pe SC. Condiția „$BC \perp SA$ și $CA \perp SB$ și $AB \perp SC$“ este deci necesară pentru ca proiecția lui S pe planul ABC să fie ortocentrul triunghiului ABC. Această condiție este și suficientă. În fapt este suficientă condiția „$SA \perp BC$ și $SB \perp AC$“. **13.65.** a) Evident $\| AB \| = a$, $\| AC \| = a\sqrt{2}$, iar $\| BC \|$ se calculează cu teorema cosinusurilor: $\| BC \| = a\sqrt{3}$. b), c). Deoarece $\| BC \|^2 = \| AB \|^2 + \| AC \|^2$ rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic. Deoarece muchiile $| SA |$, $| SB |$, $| SC |$ ale piramidei sînt congruente, rezultă că piciorul înălțimii din S se află în centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Prin urmare S' este mijlocul lui $| BC |$ și atunci $\| SS' \| = a/2$. d) Aria totală a piramide este suma ariilor fețelor: $\frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$. **13.66.** După cum știm, planele care trec prin muchiile unui tetraedru oarecare $ABCD$ și prin mijloacele muchiilor opuse se intersectează două cîte două după o dreaptă care unește un vîrf cu centrul de greutate al fetei opuse, iar toate șase au un punct comun — centrul de greutate al tetraedrului, punct care împarte fiecare segment ce unește un vîrf cu centrul de greutate al fetei opuse în raportul 1/3 de la bază spre vîrf. Fie G centrul de greutate al tetraedrului și B', C', D' mijloacele muchiilor $| CD |$, $| BD |$, $| BC |$. Piramida $GBCD$ este tăiată în interior de trei din cele șase plane, anume de planele (ABB'), (ACC'), (ADD') și este astfel descompusă în șase

corpuri. De aci rezultă că tetraedrul este descompus de cele șase plane considerate în enunț în 24 corpuri (piramide triunghiulare). Deoarece piramidele $GBCD$, $GABC$, $GABD$, $GACD$ au același volum, iar într-un triunghi medianele formează 6 triunghiuri de aceeași arie, rezultă că cele 24 de piramide au același volum: $\frac{a^3\sqrt{2}}{288}$. **13.67.** a) Cînd Y coincide cu B' și X este mobil pe segmentul $|AC|$, mijlocul lui $|XY|$ descrie segmentul care unește centrele fețelor $ABB'A'$ și $BCC'B'$, iar cînd Y coincide cu D', iar X descrie segmentul $|AC|$, mijlocul lui $|XY|$ descrie segmentul care unește centrele fețelor $ADD'A'$ și $DCC'D'$. Au loc afirmații similare cînd X este fixat în A și respectiv C. Se vede ușor, acum, că locul cerut este pătratul închis care are vîrfurile în centrele fețelor în care $|AC|$ și $|B'D'|$ nu sînt diagonale. b) Este dreptunghiul cu vîrfurile în punctele care împart segmentele $|AD'|$, $|AB'|$, $|CB'|$, $|CD'|$ în raportul $\frac{1}{2}$.

13.68. Fie (π) un plan oarecare, A și B două puncte în plan, r_a și r_b razele a două sfere tangente în A și B, respectiv, planului (π), O_a și O_b centrele celor două sfere. Din trapezul dreptunghic ABO_bO_a rezultă $\|AB\|^2 = 4r_ar_b$. Cu aceasta rezultă cu ușurință $r_a = \frac{bc}{2a}$ și analoagele. **13.69.** Dacă o sferă este tangentă fețelor care au vîrful comun $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$, atunci centrul ei se află pe înălțimea din A_i, fie el O_i. În mod evident A_iA_j este paralelă cu O_iO_j. Fie O intersecția tuturor înălțimilor și H_i piciorul înălțimii din A_i. Atunci, cum se arată ușor, $\|A_iO\| / \|OH_i\| = 3$ și $\|A_iH_i\| = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Considerăm în triunghiul $A_1A_2H_1$, O_2' proiecția lui O_2 pe A_2H_1; atunci $\|O_2O_2'\| = r$. Din asemănarea triunghiurilor $A_2O_2O_2'$ și A_2OH_1 rezultă $\frac{r}{\|A_2O_2\|} = \frac{\|OH\|}{\|A_2O\|} = \frac{1}{3}$, iar din asemănarea triunghiurilor A_1OA_2 și O_1OO_2 rezultă

$$\frac{2r}{\|A_1A_2\|} = \frac{\frac{3a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} - \|A_2O_2\|}{\frac{3a}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}},$$

ceea ce conduce, împreună

cu relaţia precedentă, la $r = \frac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$. **13.70.** Fie $ABCD$ tetraedrul în care perechile de muchii opuse ($|AB|$, $|CD|$) etc. sînt formate din perpendiculare şi M, N, P, Q, RS mijloacele muchiilor $|AB|$, $|BC|$, $|AD|$, $|CD|$, $|AC|$, $|BD|$. Segmentele $|MQ|$, $|NP|$, $|RS|$ sînt concurente în centrul de greutate al tetraedrului, mijloc al fiecăruia (vedeţi 9.9). Din ipoteză rezultă că, de exemplu, paralelogramul $MNQP$ este dreptunghi. Rezultă că segmentele $|GM|$, $|GN|$, $|GQ|$, $|GP|$, $|GR|$, $|GS|$ sînt congruente, ceea ce dovedeşte afirmaţia. **13.71.** a) Dacă rotim un triunghi ABC de latură $\|BC\| = a$ şi de înălţime h_a în jurul dreptei BC, volumul corpului obţinut este $V = \frac{\pi}{3} ah_a^2$. Notînd distanţele lui M la AB şi BC prin x şi y obţinem, cu notaţii evidente: $V_1 = \frac{\pi}{2} ax^2$, $V_2 = \frac{\pi}{3} ay^2$, $V_3 = \frac{\pi}{3} a(a-x)^2$, $V_4 = \frac{\pi}{3} a(a-y)^2$ a căror sumă este $V = \frac{2\pi a}{3}[a^2+x^2+y^2 - a(x+y)]$ b) În triunghiul BMD, $|OM|$ este mediană, deci $\|OM\|^2 = \frac{1}{2}[x^2+y^2+(a-x)^2+(a-y)^2] - \frac{a^2}{2}$ de unde deducem $x^2+y^2-a(x+y) = d^2 + \frac{a^2}{2}$ şi deci $V = \frac{2\pi a}{3}\left(\frac{3a^2}{2}+d^2\right)$. **13.72.** Se demonstrează că fiecare din cele două afirmaţii este echivalentă cu afirmaţia: Triedrul $Oxyz$ este tridreptunghic în O (vedeţi şi 9.23). **13.73.** Dacă $|SA|$, $|SB|$, $|SC|$ sînt trei generatoare perpendiculare, S — vîrful conului, atunci triunghiul ABC este echilateral, avînd latura de lungime $a\sqrt{2}$, deci raza bazei conului este $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ şi înălţimea conului este $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, volumul conului este $\frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. Notînd O centrul bazei conului, ω centrul sferei inscrise în con şi T punctul de tangenţă al acesteia la muchia $|SA|$, raza r a sferei inscrise se află din asemănarea

triunghiurilor $S\omega T$ și SAO: $\frac{3r}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}/3 - r}{a}$ de unde $r = \frac{a\sqrt{2}}{3+\sqrt{6}}$. Notînd prin P proiecția lui T pe SO, avem $\| \omega P \| = \frac{r^2}{\| S\omega \|} = \frac{2a}{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$; deci înălțimea calotei superioare este $r - \| \omega P \| = \frac{a}{3}[5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}]$, iar înălțimea calotei inferioare este $r + \| \omega P \| = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Raportul ariilor celor două calote este raportul înălțimilor lor. **13.74.** a), b). Într-o secțiune axială obținem un triunghi isoscel BAC, cu cercul înscris de centru I și rază R și un cerc tangent segmentelor $|AB|$ și $|AC|$ și cercului înscris în triunghiul BAC avînd centrul pe $|AI|$. Notînd punctele de tangență ale celor două cercuri cu latura $|AC|$ prin T și T' și centrul cercului mic prin I', din asemănarea triunghiurlior $AI'T'$ și AIT se obține înălțimea conului $h = \frac{2R^2}{R-r}$, $\| AI \| = R\frac{R+r}{R-r}$, $\| AT \| = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}$ și atunci raza cercului de bază al conului este $\frac{R^2}{\sqrt{Rr}}$, volumul conului este $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$. Razele cercurilor de contact ale celor două sfere cu generatoarele conului sînt $\frac{2R\sqrt{Rr}}{R+r}$ și respectiv $\frac{2r\sqrt{Rr}}{R+r}$ și semisuma lor este $\sqrt{Rr}$. **13.75.** *Lemă*: Fie MNP un triunghi. Prin vîrfurile sale se duc trei drepte paralele, neconținute în planul triunghiului și fie M', N', P' puncte pe aceste paralele situate de aceeași parte a planului MNP. Atunci piramidele $P'MNP$ și $PM'N'P'$ au volume egale. În adevăr, distanțele punctelor M și M' la planul $NPP'N'$ sînt egale, iar triunghiurile $NP'P$ și $PN'P'$ sînt echivalente. *Rezolvarea problemei.* Fie $A' = AD_1 \cap BC$, și B', C' analoagele. Paralela prin A la DD_1

intersectează fața DBC în punctul în care intersectează pe DA'. La fel se obțin punctele B_1 și C_1. Planele $AA'A_1$, $BB'B_1$, $CC'C_1$ au dreapta comună DD_1; rezultă că dreptele după care aceste plane intersectează planul $A_1B_1C_1$ sînt concurente într-un punct D' situat pe DD_1. Folosind lema, deducem că piramidele $D_1A_1D'C'$ și $D'AD_1C'$ sînt echivalente etc..., de unde rezultă că piramidele $D_1A_1B_1C_1$ și $D'ABC$ au același volum. Rămîne de arătat că $\|D'D_1\|=3\|DD_1\|$. Să notăm lungimile segemtelor $|AB'|$, $|B'C|$, $|CA'|$, $|A'B|$, $|BC'|$, $|C'A|$ prin x, y, z, u, v, t. Conform teoremei lui Ceva avem $xzv = yut$. Folosind teorema lui Menelaus găsim $\dfrac{\|A'D_1\|}{\|A'A\|} = \dfrac{uy}{uy+ux+xz}$ și din asemănarea triunghiurilor $A'DD_1$ și $A'AA_1$ se obține $\|AA_1\| = \|DD_1\|\dfrac{uy+ux+xz}{uy}$. Analog $\|BB_1\| = \|DD_1\|\dfrac{ux+uy+xz}{xz}$, $\|CC_1\| = \|DD_1\|\dfrac{yt+yv+xv}{xv}$. Din trapezul AA_1C_1C obținem, folosind 2.1, $\|B'B_1'\| = \dfrac{x\|CC_1\|+y\|AA_1\|}{x+y} = \|DD_1\|\dfrac{2uxv+2uvy+2xzv}{uv(x+y)}$ și acum din trapezul $B'B_1'B_1B$, ținînd seama că $\dfrac{\|B'D_1\|}{\|D_1B\|} = \dfrac{xz}{u(x+y)}$, rezultă $\|D'D_1\| = \dfrac{xz\|BB_1\|+u(x+y)\|B'B_1'\|}{xz+u(x+y)}$ și ținînd seama de expresiile lui $\|BB_1\|$ și $\|B'B_1'\|$ rezultă

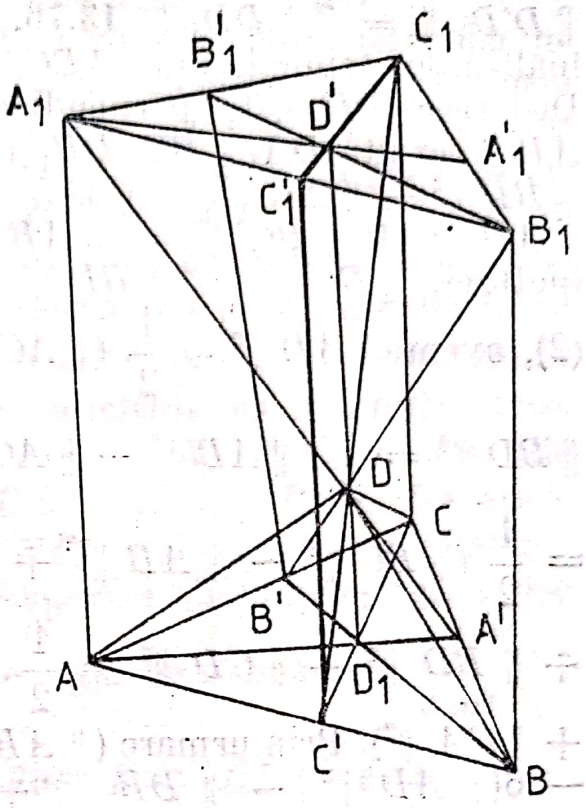


Fig. 13.75

intersectează fața DBC în punctul în care intersectează pe DA'. La fel se obțin punctele B_1 și C_1. Planele $AA'A_1$, $BB'B_1$, $CC'C_1$ au dreapta comună DD_1; rezultă că dreptele după care aceste plane intersectează planul $A_1B_1C_1$ sînt concurente într-un punct D' situat pe DD_1. Folosind lema, deducem că piramidele $D_1A_1D'C'$ și $D'AD_1C'$ sînt echivalente etc..., de unde rezultă că piramidele $D_1A_1B_1C_1$ și $D'ABC$ au același volum. Rămîne de arătat că $\|D'D_1\|=3\|DD_1\|$. Să notăm lungimile segemtelor $|AB'|$, $|B'C|$, $|CA'|$, $|A'B|$, $|BC'|$, $|C'A|$ prin x, y, z, u, v, t. Conform teoremei lui Ceva avem $xzv = yut$. Folosind teorema lui Menelaus găsim $\dfrac{\|A'D_1\|}{\|A'A\|} = \dfrac{uy}{uy+ux+xz}$ și din asemănarea triunghiurilor $A'DD_1$ și $A'AA_1$ se obține $\|AA_1\| = \|DD_1\|\dfrac{uy+ux+xz}{uy}$. Analog $\|BB_1\| = \|DD_1\|\dfrac{ux+uy+xz}{xz}$, $\|CC_1\| = \|DD_1\|\dfrac{yt+yv+xv}{xv}$. Din trapezul AA_1C_1C obținem, folosind 2.1, $\|B'B_1'\| = \dfrac{x\|CC_1\|+y\|AA_1\|}{x+y} = \|DD_1\|\dfrac{2uxv+2uvy+2xzv}{uv(x+y)}$ și acum din trapezul $B'B_1'B_1B$, ținînd seama că $\dfrac{\|B'D_1\|}{\|D_1B\|} = \dfrac{xz}{u(x+y)}$, rezultă $\|D'D_1\| = \dfrac{xz\|BB_1\|+u(x+y)\|B'B_1'\|}{xz+u(x+y)}$ și ținînd seama de expresiile lui $\|BB_1\|$ și $\|B'B_1'\|$ rezultă

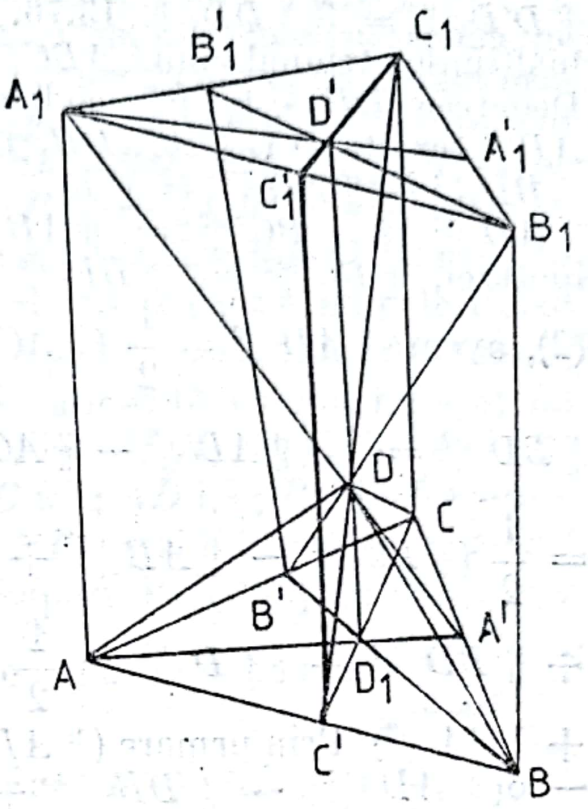


Fig. 13.75

$\| D'D_1 \| = 3 \| DD_1 \|$. **13.76.** Fie $| AA_1 |$, $| BB_1 |$, $| CC_1 |$ înălțimile triunghiului ABC și H ortocentrul acestuia. Deoarece DH este perpendiculară pe planul triunghiului ABC, rezultă $DA_1 \perp BC$, $DB_1 \perp AC$, $DC_1 \perp AB$. Prin urmare $\| BD \|^2 - \| AD \|^2 = \| BC \|^2 - \| AC \|^2$ (1); analog, $\| AD \|^2 + \| BC \|^2 = \| AB \|^2 + \| DC \|^2$ (2). Conform ipotezei, $\| BC \|^2 = \| BD \|^2 + \| DC \|^2$. Folosind (1) și (2), avem $\| AD \|^2 = \frac{1}{2} (\| AC \|^2 + \| AB \|^2 - \| BC \|^2)$, $\| BD \|^2 = \frac{1}{2} (\| AB \|^2 - \| AC \|^2 + \| BC \|^2)$, $\| CD \|^2 = \frac{1}{2} (\| BC \|^2 - \| AB \|^2 + \| AC \|^2)$, deci $\| AD \|^2 + \| BD \|^2 + \| CD \|^2 = \frac{1}{2} (\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CA \|^2)$. Prin urmare $(\| AB \| + \| BC \| + \| CA \|)^2 - 6(\| AD \|^2 + \| DB \|^2 + \| CD \|^2) = (\| AB \| + \| BC \| + \| CA \|)^2 - 3(\| AB \|^2 + \| BC \|^2 + \| CA \|^2) = 2(\| AB \| \cdot \| BC \| + \| BC \| \cdot \| CA \| + \| CA \| \cdot \| AB \| - \| AB \|^2 - \| BC \|^2 - \| CA \|^2) = 0$, egalitatea realizîndu-se dacă și numai dacă $\| AB \| = \| BC \| = \| CA \|$, ceea ce, împreună cu condiția din enunț, se realizează exact pentru tetraedrul regulat. **13.77.** Condiția din enunț se exprimă prin faptul că medianelor triunghiurilor care au un vîrf comun, de exemplu ABC, ACD, ABD, care pornesc din același vîrf sînt congruente. Notînd $\| AB \| = a$, $\| AC \| = c$, $\| AD \| = d$, $\| BC \| = \delta$, $\| CD \| = \beta$, $\| BD \| = \alpha$, obținem relațiile $\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{\delta^2}{4} = \frac{b^2 + d^2}{2} - \frac{\beta^2}{4} = \frac{a^2 + d^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4}$ și încă trei astfel de duble egalități, din care se deduce cu ușurință că toate muchiile tetraedrului sînt congruente. Există și alte soluții; sînteți invitați să le găsiți! **13.78.** Este cunoscut că înălțimile din A și B ale tetraedrului $ABCD$ sînt concurente (adică sînt în același plan) dacă și numai dacă muchiile $| AB |$ și $| CD |$ sînt perpendiculare. Astfel, dacă $| AB |$ și $| CD |$ sînt perpendiculare, rezultă că și înălțimile $| CC' |$ și $| DD' |$ sînt situate în planul ce conține dreapta CD și este perpen-

Scanned with OKEN Scanner

dicular pe AB. Astfel, înălțimile $|AA'|$, $|BB'|$, $|CC'|$, $|DD'|$ sînt concurente dacă și numai dacă perechile de muchii opuse sînt formate din perpendiculare. Să notăm prin A_b, A_c, A_d, pozițiile în care ajunge punctul A în planul (BCD) prin rotirea fețelor ACD, ABD, ABC în jurul dreptelor CD, BD, BC. Relația $\|A_dB\|^2 + \|CD\|^2 = \|A_dC\|^2 + \|BD\|^2$ este echivalentă cu condiția ca A_dD să fie perpendiculară pe BC și, deci, echivalentă cu perpendicularitatea muchiilor $|AD|$ și $|BC|$. Așadar egalitățile din enunț formează condiție necesară și suficientă ca muchiile opuse să fie perpendiculare. **13.79.** Fie M, N, P, Q intersecțiile planului (π) cu $|BC|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BD|$. Deoarece $MN \parallel AB \parallel PQ$, $MQ \parallel CD \parallel NP$, rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. Raportul distanțelor dreptelor AB și CD la planul (π) este egal cu rapoartele $\frac{\|BM\|}{\|MC\|}$, $\frac{\|AN\|}{\|NC\|}$; $\frac{\|AP\|}{\|PD\|}$, $\frac{\|BQ\|}{\|QD\|}$. Fie $R \in |CD|$ astfel încît $PR \parallel AC$ (atunci $QR \parallel BC$) și $S \in |AB|$ astfel ca $SN \parallel BC$ (atunci $PS \parallel BD$). Notînd cu V_1 volumul piramidei $ASNP$, V_2 volumul prismei $BMQSNP$, V_3 volumul prismei $NMCPQR$, V_4 volumul piramidei $PQRD$, trebuie să calculăm $\frac{V_1 + V_2}{V_3 + V_4}$. Notînd cu S aria triunghiului ABC avem aria $(ASN) = \frac{k^2}{(k+1)^2} S$, aria $(NMC) = \frac{1}{(k+1)^2} S$, deci aria $(MNSB) = \frac{2k}{(k+1)^2} S$. Fie h distanța punctului D la planul (ABC); atunci distanța de la P la planul (ABC) este $h_1 = \frac{k}{k+1} h$, iar distanța de la D la planul (PQR) este $h_2 = \frac{1}{k+1} h$. Rezultă $V_1 = \frac{k^3}{3(k+1)^3} \cdot Sh$, $V_2 = \frac{k^2}{(k+1)^3} Sh$, $V_3 = \frac{k}{(k+1)^3} Sh$, $V_4 = \frac{1}{3(k+1)^3} Sh$. Se obține $\frac{V_1 + V_2}{V_3 + V_4} = \frac{k^2(k+3)}{3k+1}$.

INDEX DE NOȚIUNI

(probleme care se referă la această noțiune)

Arc de cerc (măsura arcelor, măsura unghiurilor): 1.11; 1.12; 1.13; 1.29; 1.35; 1.70; 1.86; 1.88; 1.89; 1.94.

Asemănare (segmente proporționale, teorema lui Tales): 1.33; 1.69; 1.77; 1.91; 1.98; 2.1—2.35; 3.35.

Arie (a triunghiului, a poligonului, a cercului etc.): 1.6; 1.84; 1.91; 5.1—5.31; 8.8; 8.16; 8.46; 11.9; 12.32; 12.42; 13.52.

Axă radicală: 1.14; 3.9; 8.19.

Centru de greutate (al unui triunghi): 1.17; 1.26; 1.71; 5.10; 5.30; 6.13; 6.21; 7.17; 7.21; 7.22; 7.23; 12.27.

Cercul, generalități: 1.24; 1.56; 1.66; 1.73—1.76; 1.78; 1.79; 1.91; 1.92; 1.93; 2.18; 3.33; 3.34; 12.3; 13.48; 13.57.
— lui Apollonius: 7.4.
— lui Euler: 1.25; 7.14.
— tangent unei drepte: 1.19.
— ecuația cercului: 8.17; 8.22; 8.27; 8.29; 8.48; 8.52.

Cilindru: 11.11; 13.63.

Con: 9.18; 11.20; 11.24; 13.71; 13.73; 13.74.

Cub: 9.14; 9.22; 10;32; 13.34; 13.60; 13.61; 13.67.

Coliniaritate: 1.5; 1.34; 1.50; 1.86; 1.93; 1.96; 2.19; 2.20; 3.17; 3.18; 3.35; 3.36; 4.4; 4.7; 4.8; 4.20; 4.33; 4.37; 4.38—4.42; 4.44; 4.45; 6.7; 6.8; 8.13; 8.16; 8.22; 8.24; 9.8; 9.9; 9.44; 13.49.

Coliniaritate: 1.1; 1.6; 1.14 1.16 1.38 1.53; 1.59; 1.61; 1.75; 1.89; 1.98; 2.8; 2.16; 2.23; 3.40; 4.6; 4.11; 4.29; 4.36; 4.43; 5.15; 6.24; 8.7; 8.16; 8.28; 9.8.

Diedru (unghi diedru): 9.13; 9.25.

Diviziune armonică: 1.25; 4.12; 4.13; 4.21; 8.27.

Dreapta: — drepte antiparalele: 2.7; 6.3.
— drepte izogonale: 3.15.
— drepte izotomice: 4.19.
— ecuația dreptei: 8.1; 8.2; 8.3; 8.5; 8.8; 8.9; 8.14.
— dreaptă paralelă cu un plan: 10.22; 13.62.
— perpendiculară pe plan: 9.16; 9.17; 9.21; 13.4; 13.64.
— lui Euler: 1.9.

Scanned with OKEN Scanner

— Newton-Gauss: 4.29.
— lui Simpson: 1.9.
Dreptunghi: 1.4; 1.90; 10.4; 11.5.
Ecuaţie (trigonometrică): 13.35; 13.40; 12.60—12.77.
Elipsă: 8.30; 8.31; 8.53.
Extreme geometrice: 1.3; 1.32; 1.41; 1.43; 1.95; 3.32; 5.6; 5.8; 5.16; 5.19; 5.26; 5.31; 6.4; 9.18; 11.1—11.27; 13.47.
Funcţie: — trigonometrică inversă: 12.92—12.110, 12.115.
— periodică: 12.55—12.58.
Hiperbolă: 8.21; 8.37; 8.38; 8.39; 8.44; 8.47.
Identităţi (trigonometrice): 12.1—12.22; 12.27; 12.112—12.114.
Inecuaţii (trigonometrice): 12.81; 12.89—12.90; 12.107—12.111; 2.119—12.112.
Inegalităţi: — trigonometrice: 12.23; 12.25; 12.26; 12.82—12.88.
— inegalitatea Bessel: 12.59.
Inversiune: 6.25—6.36.
Linie mijlocie: 1.3; 1.20; 1.24; 3.36.
Loc geometric: 1.13; 1.17; 1.18; 1.21—1.24; 1.26; 1.29; 1.31; 1.33; 1.35; 1.41; 1.51; 1.53; 1.54; 1.58; 1.61; 1.62; 1.65—1.68; 1.70; 1.71; 1.74—1.76; 1.79—1.83; 1.85; 1.87; 1.94; 1.95; 2.19; 2.24; 2.34; 3.6; 3.12; 3.13; 3.14; 3.16; 3.41; 4.3; 4.14; 4.16; 4.28; 4.32; 4.34; 4.35; 5.3; 5.27; 6.6; 6.20 6.22; 7.10; 7;15; 7.16; 7.28; 7.29; 7.31; 8.6; 8.8; 8.10; 8.12; 8.15; 8.19; 8.20; 8.22; 8.24; 8.26; 8.27; 8.39; 8.41; 8.44; 8.45; 8.46—8.49; 8.52; 9.12; 9.20; 9.21; 11.3; 13.3; 13.5; 13.25; 13.57.
Mediană: 1.71; 1.72; 3.5; 3.37; 3.43; 4.37; 5.11; 7.11.
Omotetie: 1.25; 7.17—6.24; 6.34.
Ortocentru: 1.57; 1.67; 1.75; 1.87; 1.88; 1.92; 2.18; 6.9; 6.20; 7.7; 13.51.
Parabolă: 8.32—8.36; 8.40—8.43; 8.46—8.47; 8.50.
Paralelogram: 1.8; 1.24; 1.80; 1.83; 1.89; 1.96; 1.97; 2.26; 7.19; 7.25; 7.26; 8.1; 10.3; 11.4; 13.20.
Paralelipiped: 9.46; 9.65; 9.73.
Patrulater: — complet: 1.15; 4.15.
— ortodiagonal: 1.81.
— inscriptibil: 1.9; 1.32; 1.36; 1.58; 1.88; 1.89; 1.97; 1.31—1.33; 1.35; 2.8; 2.26; 3.29; 3.32—3.35; 3.39; 9.17; 13.1; 13.2; 13.16; 13.31.
Pătrat: 1.89; 10.10; 13.28; 13.48; 13.47.
Perpendiculară (comună a două drepte în spaţiu): 9.2; 10.17; 13.13.
Piramidă: 9.9; 9.21; 9.37; 9.49—9.53; 9.58; 9.63; 9.68; 10.28; 10.29; 11.23; 13.44; 13.65; 13.75.

Scanned with OKEN Scanner

Prismă: 9.27; 13.8.
Polară: — față de un unghi: 4.14.
— față de un cerc: 4.16.
Poligon regulat: 1.63; 5.22; 13.20; 13.43; 13.47; 13.56; 13.58.
Polinom: — trigonometric: 12.59.
— Fourier: 12.59.,
Produs: 12.41; 12.42; 12.48—12.50; 12.53; 12.54.
Punctul lui — Gergonne: 4.18.
— Lemoine: 2.20.
— Miquel: 1.15.
Punct fix: 1.2; 1.13; 1.44; 1.45; 1.58; 1.79; 2.3; 2.22; 6.7; 6.22; 8.13; 8.14; 8.41; 8.50; 13.18.
Puterea punctului: 3.5; 3.29; 3.32; 3.34; 3.46; 8.29; 13.27.
Raport anarmonic: 4.1; 4.2.
Relație: — a lui Euler (I): 2.13; (II) 3.7; 7.5.
— a lui Leibniz: 3.4; 3.27.
— a lui Ptolemeu (I): 3.22; (II): 3.23.
— a lui Steiner: 3.15.
Relații metrice în triunghi: 3.1—3.46; 13.23; 13.26; 13.30; 13.33; 13.53; 13.135—13.167.
Simediană: 3.15; 3.16; 6.3.
Simetrie: — față de un punct: 1.8; 1.35; 4.20; 6.5—6.8; 6.14; 4.20; 8.51.
— față de o dreaptă: 2.11; 2.16; 2.20; 3.32; 6.1; 6.3; 8.12; 8.49.
Sisteme (de ecuații trigonometrice): 13.78—13.80; 13.118.
Sferă: 9.18; 9.19; 9.41; 9.43; 9.56; 9.69; 11.24; 13.39; 13.50.; 13.68; 13.69; 13.77.
Sume (trigonometrice): 12.28—12.33; 12.39—12.40; 12.44—12.47, 12.51; 12.52.
Tangentă (la cerc): 1.55; 1.89; 1.95; 3.33; 8.25; 8.26; 13.4; 13.10.;
Trapez: 1.20; 1.25; 1.34; 1.77; 2.1; 13.4; 13.6.
Teorema: — lui Brianchon: 4.24.
— lui Ceva: 4.17; 4.18.
— lui Desargues: 4.9; 4.10; 4.36.
— lui Menelaus: 4.17.
— ortopolului: 1.14.
— a lui Pappus (I): 3.21; (II); 4.6; (III): 4.13; (IV): 6.13.
— a lui Pascal: 4.23.
— a lui Pitagora: 3.1; 3.2; 3.28; 3.29; 3.38.
— a lui Stewart: 3.3; 3.25.

Scanned with OKEN Scanner

Tetraedru: 9.9—9.11; 9.15; 9.16; 9.23; 9.26; 9.29—9.30; 9.32; 9.38; 9.45; 9.60; 9.62; 9.64; 9.66; 9.67; 9.70—9.72; 11.25—11.27; 13.11; 13.17; 13.22; 13.28; 13.60; 13.64; 13.66; 13.69; 13.70; 13.76; 13.78; 13.79.

Tetraedru echifacial: 9.39; 9.40—9.32.

Triunghi: — triunghiuri congruente: 1.12; 1.22; 1.29; 1.36; 1.92;
— isoscel: 1.18; 1.19; 1.36; 2.28.
— echilateral: 1.27; 1.31; 2.5; 3.30; 5.23; 5.25; 5.29; 7.34; 10.5; 10.6; 11.8; 13.9; 13.21; 13.37; 13.59.

Trunchi de piramidă: 9.31; 9.36; 9.48; 9.54—9.57; 13.11; 13.46.

Zonă sferică (calotă): 11.19; 13.2; 13.29; 13.73.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Țițeica, G., — Probleme de geometrie, Edit. Tehnică, Ed. VI-a, București, 1982.
2. Gazeta matematică — Colecția 1960—1984.
3. Trandafir, R. Leonte, A. — Culegere de probleme și exerciții de matematică. Edit. Junimea, Iași, 1976.
4. Botez, M. Șt. — Probleme de geometrie. Edit. tehnică, București, 1976.
5. Ionescu, I. — Maxime și minime geometrice, Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice, Edit. Tehnică, București, 1955.
6. Alexandrov, I.I. — Probleme de construcții geometrice. Edit. Tehnică, București, 1951.
7. Ionescu-Bujor, C. — Elemente de transformări geometrice Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice, Edit. Tehnică, București, 1958.
8. Hadamard, I. — Leçons de géometrie élémentaire, A. Colin, 1931—1932.
9. Efimov, H.V. — Geometrie superioară, Edit. Tehnică, București, 1952.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

PREFAȚĂ 5

Introducere 9

SCURT ITINERAR DE CUNOȘTINȚE .. 16

Capitolul 1. NOȚIUNI GENERALE. PROBLEME
Enunțuri (1.1—1.98) 26
Soluții 181

Capitolul 2. SEGMENTE PROPORȚIONALE
Enunțuri (2.1—2.38) 46
Soluții 203

Capitolul 3. RELAȚII METRICE
Enunțuri (3.1—3.61) 54
Soluții 215

Capitolul 4. COLINIARITATE. CONCURENȚĂ
Enunțuri (4.1—4.45) 67
Soluții 235

Capitolul 5. ARII
Enunțuri (5.1—5.31) 75
Soluții 243

Capitolul 6. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE
Enunțuri (6.1—6.36) 81
Soluții 252

Capitolul 7. CALCUL VECTORIAL
Enunțuri (7.1—7.35) 88
Soluții 262

Capitolul 8. GEOMETRIE ANALITICĂ
Enunțuri (8.1—8.53) 95
Soluții 273

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 9. GEOMETRIE ÎN SPAŢIU
Enunţuri (9.1—9.73) 107
Soluţii 287

Capitolul 10. CONSTRUCŢII GEOMETRICE
Enunţuri (10.1—10.41) 120
Soluţii 311

Capitolul 11. MAXIME ŞI MINIME GEOMETRICE
Enunţuri (11.1—11.27) 124
Soluţii 319

Capitolul 12. TRIGONOMETRIE
Enunţuri (12.1—12.167) 132
Soluţii 325

Capitolul 13. PROBLEME DATE LA CONCURSURI
Enunţuri (13.1—13.79) 137
Soluţii 379

TESTE 172

INDEX DE NOŢIUNI 408

BIBLIOGRAFIE 412

Scanned with OKEN Scanner

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 9.I.1986. Apărut 1986
Comanda nr. 2418
Coli de tipar 26

Tiparul executat sub comanda 50280
la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii"
Piața Scînteii, nr. 1, București
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner

Volumul reprezintă o sinteză a cunoștințelor de geometrie plană, calcul vectorial, geometrie analitică, geometrie în spațiu și trigonometrie, în ordinea în care sînt studiate în liceu

Folosind noțiunile și notațiile în concordanță cu orientarea și conținutul programelor și manualelor școlare actuale, pentru fiecare secțiune sînt date definițiile și principalele teoreme care se folosesc în rezolvarea problemelor propuse

În final sînt date soluții, rezultate sau indicații de rezolvare

Lei 16,50

Scanned with OKEN Scanner